ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

24-08-2002

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

1. Για ποιές τιμές των παραμέτρων α και β το σύστημα

$$x + \alpha y = 1$$
$$2x - y = \beta$$

(α) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες και να βρεθούν

(β) δεν έχει καμία λύση

(γ) έχει μία μόνο λύση η οποία και να βρεθεί

ΛΥΣΗ Ο επαυξημένος πίνακας μετά από τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γράφεται $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 2 & -1 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & -1-2\alpha & \beta-2 \end{bmatrix}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσις

Ι) Αν –1-2 α=0 δηλ. α=-1/2, τότε

Ια) αν β-2=0 δηλ. β=2, το σύστημα έχει άπειρες λυσεις

y=t αυθαίρετο και x=1-α y=1+ t/2

Ιβ) αν β=2 τότε το συστημα είναι αδύνατο

ΙΙ) Αν –1-2 α είναι διάφορον του μηδενός δηλ. α διάφορο του –1/2 τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $\begin{array}{l} x = 1 - a(2-\beta)/(1+2\alpha) \\ y = (2-\beta)/(1+2\alpha) \end{array}$

2. Να λυθεί <u>με χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών των γραμμών του αντίστοιχου επαυξημένου πίνακα</u> το σύστημα

$$2x - y + z = 1$$
$$x + 2y - 3z = 2$$
$$5x - 3y + z = 0$$

ΛΥΣΗ Ο επαυξημένος πίνακας μετά από τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 5\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 2\\0 & -5 & 7 & -3\\0 & -13 & 16 & -10\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to(-1/5)\Gamma_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 2\\0 & 1 & -7/5 & 3/5\\0 & -13 & 16 & -10\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+13\Gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 2\\0 & 1 & -7/5 & 3/5\\0 & 0 & -11/5 & -11/5\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to(5/11)\Gamma_3}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 2\\0 & 1 & -7/5 & 3/5\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[\Gamma_1\to\Gamma_1+3\Gamma_3]{\Gamma_2\to\Gamma_2+(7/5)\Gamma_3}$$

$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-2\Gamma_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ από τον οποίο έχουμε την μοναδική λύση

τού συστήματος x=1, y=2, z=1.

3. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}$ και να εξετασθεί αν αυτός διαγωνοποιείται ή όχι

<u>**ΛΥΣΗ**</u>

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$\phi_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2\\2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3+4=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$ με διπλή ρίζα

λ=1.

Προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή 1:

$\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y=x\\-2x-y=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $x\neq 0$. Δηλαδή ο ιδιόχωρος έχει διάσταση 1, συνεπώς ο Α δεν

διαγωνοποιείται.

4. Για την γραμμική απεικόνιση $f:R^3\to R^3$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+x_2-3x_3\\2x_1-x_3\\x_2-2x_3\end{pmatrix}$$

(α) Να γραφεί ο αντίστοιχος πίνακας Α της f (ως προς την συνήθη βάση)

(β) Να βρεθεί βάση του πυρήνα *Kerf* της απεικόνισης

(γ) Να υπολογισθεί η διάσταση του *Kerf* και η διάσταση της εικόνας Imf

ΛΥΣΗ (α) A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(β) Λύνουμε το ομογενές σύστημα AX=0 με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

από όπου προκύπτει $X = a\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,α αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Άρα μία βάση του πυρήνα της απεικόνισης είναι το μονοσύνολο $\{(1/2,2,1)^T\}$

(γ) Η διάσταση του πυρήνα είναι 1 και η διάσταση της εικόνας της απεικόνισης σύμφωνα με τον τύπο είναι dim R^3 –dim Ker*f*=3-1=2.

5. (α) Δίδεται η ακολουθία $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, $n \geq 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα και βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(β) Θεωρείστε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Να βρεθούν όλα τα διαστήματα της ευθείας των πραγματικών αριθμών όπου η συνάρτηση είναι μονότονα αύξουσα και όλα τα διαστήματα όπου η συνάρτηση είναι μονότονα φθίνουσα.

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε την παράγωγο $f'(x) = \dfrac{x^2+1-x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ η οποία είναι θετική στο διάστημα (-1, 1) και αρνητική στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$.

Ετσι για μεν το (β) η απάντηση είναι ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα στο διάστημα (-1, 1) και φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$.

Για το (α) έχουμε ότι εφόσον $n \geq 1$, η ακολουθία είναι φθίνουσα και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{1+(1/n^2)} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+(1/n^2))} = \dfrac{0}{1} = 0$

6. Να βρεθούν τα κάτωθι όρια:

(α) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$, (β) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1/2}}{\ln x}$, (γ) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hopital έχουμε:

(α) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2\sqrt{x+6}}=\frac{1}{6}$

(β) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1/2}}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1/2)x^{-1/2}}{1/x}=\lim_{x\to\infty}(1/2)x^{1/2}=+\infty$

(γ) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0$

7. Εξετάστε αν οι κάτωθι σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν (δικαιολογείστε γιατί) και σε περίπτωση σύγκλισης να βρεθεί το άθροισμα της σειράς:

(α) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

(β) $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{3}{2^n}+\cdots$

ΛΥΣΗ

(α) Η σειρα αποκλίνει ως αρμονική σειρά. (Βλ. Βιβλίο η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων δεν είναι Cauchy)

(β) Γεωμετρική πρόοδος με λόγο ½ (απολύτως μικροτερος της μονάδος) άρα συγκλίνουσα σειρά με αθροισμα ισον προς $\frac{3}{1-(1/2)}=6$

8. Να κατασκευαστεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν αν η περίμετρός του ισούται προς 12 μέτρα.

ΛΥΣΗ

Απάντηση: Μεγιστοποιώντας το εμβαδό με τον περιορισμό η περιμετρος να ειναι ιση προς 12 μέτρα βρίσκουμε τετράγωνο με πλευρά 3 μέτρα

9. Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

(α) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αντικατάσταση) (β) $\int x^2 e^{-x} dx$ (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε παραγοντική ολοκλήρωση)

ΛΥΣΗ

(α)Με αντικατάσταση $x+1=u$ βρίσκουμε $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + C$

(β) Με παραγοντικές ολοκληρώσεις βρίσκουμε $\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2+2x+2) + C$

10. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής του άνω ημιεπιπέδου ($y \geq 0$) που περικλείεται μεταξύ τού γραφήματος τής συνάρτησης $y=-x^2+2x+3$ και τού άξονα τών x.

ΛΥΣΗ

$y=-x^2+2x+3=(x+1)(3-x)$

Οπότε

$$E=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{3} = 9-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=11-\frac{1}{3}=\frac{32}{3}$$