ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ ΠΛΗ 12: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι»

1η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 2001-02

- Παράλληλα με το διάβασμά σας προσπαθείστε να λύσετε τις ασκήσεις αυτοαξιολόγησης που είναι μετά από κάθε εδάφιο. Στις ασκήσεις που δε θα μπορέσετε ν'ανταποκριθείτε βρείτε τη λύση τους στο τέλος του βιβλίου, σελ.157.
- Επιπλέον σας προτείνω ν' ασχοληθείτε και με τις ασκήσεις του βιβλίου σας για ν' αποκτήσετε μεγαλύτερη εμπειρία στα θέματα που θα διαπραγματευθείτε στην 1η γραπτή εργασία σας.

  Κεφ. 1 : εδαφ. 1.6, σελ. 22, ασκήσεις 2, 6, 8, 13, 14, 16, 18, 19.

  Κεφ. 2 : εδαφ. 2.4, σελ. 38, ασκήσεις 2, 6, 8, 9, 14, 17, 20, 25, 28.

  Κεφ. 3 : εδαφ. 3.4, σελ. 59, ασκήσεις 4, 6, 7, 8, 10.

1. Έστω x είναι πίνακας τύπου $\nu \times 1$ (δηλ. διάνυσμα) και $P_x = \dfrac{1}{x^T x} x x^T$, $\quad Q_x = I - P_x$.

Δείξτε ότι :

I. $P_x^2 = P_x$, $\quad Q_x^2 = Q_x$, $\quad P_x Q_x = Q_x P_x = 0$. [10]

II. $P_x = P_y \;\Rightarrow\; x = \dfrac{y^T x}{y^T y} y$. [5]

2. Έστω $u = [\,p \;\; q \;\; r\,]^T$ και $A = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$.

I. Δείξτε ότι $Au = 0$, $A^2 = -u^T u I + u u^T$ και $A^2 = -u^T u\, Q_u$, όπου Q_u είναι ο πίνακας στην άσκηση 1. [10]

II. Δείξτε ότι ο πίνακας A^2 είναι συμμετρικός και ότι ο A^3 είναι αντισυμμετρικός. [5]

3. **I.** Δικαιολογείστε γιατί η ορίζουσα του παρακάτω πίνακα ισούται με μηδέν :

[8]

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

αναπτύσσοντάς την ως προς τη πρώτη γραμμή του A. Χρειάζεται να κάνετε υπολογισμούς, ή μήπως διακρίνετε ότι detA=0 από τη μορφή των υποπινάκων $A_{1,j}$, j=1,2,3,4 ;

II. Εφαρμόζοντας τον τύπο του βιβλίου (2.7), βρείτε τον αντίστροφο του 3×3 Vandermonde πίνακα

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}$$ [7]

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ είναι διάφοροι μεταξύ τους αριθμοί.

4. Λύστε το κάτωθι γραμμικό σύστημα (βλ. Παραδ. 3.6, 3.7 και Ασκ. Αυτοαξιολ. 1.3.3)

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & \beta x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ \alpha x_1 & + & (2\beta-1)x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & + & (\beta+3)x_3 & = & 2\beta-1 \end{array}$$

και εξετάστε τις περιπτώσεις :

$\beta = 1$; $\beta = 5$, $\alpha \neq 0$; $\beta = -1$; $\beta = 5$, $\alpha = 0$. [20]

5. Δείξτε ότι όλα τα διανύσματα $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ που επαληθεύουν το ομογενές σύστημα (βλ. Παράδ. 3.9)

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \end{array}.$$ [20]

είναι της μορφής x = (-3α /2 - β, 7 α/2 - 2β, α, β), όπου α, β αυθαίρετες παράμετροι.

6.

Λύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = \beta$ εφαρμόζοντας την παραγοντοποίηση LU , όπου

[15]

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

βλ. Παράδ. 3.2 του βιβλίου. Επαληθεύσατε το αποτέλεσμα λύνοντας και πάλι το σύστημα με οποιονδήποτε τρόπο θέλετε.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. I $$P_x^2 = \frac{1}{x^T x} xx^T \cdot \frac{1}{x^T x} xx^T = \frac{1}{(x^T x)^2}(xx^T)(xx^T) = \frac{1}{(x^T x)^2} x \underbrace{(x^T x)}_{\text{αριθμός}} x^T =$$

$$= \frac{1}{(x^T x)^2}(x^T x) \cdot xx^T = \frac{1}{x^T x} xx^T = P_x$$

$$Q_x^2 = (I - P_x)^2 = I - 2P_x + P_x^2 = I - 2P_x + P_x = I - P_x = Q_x$$

$P_x Q_x = P_x(I - P_x) = P_x - P_x^2 = P_x - P_x = O$ και $Q_x P_x$ ομοίως.

II $P_x = P_y \Leftrightarrow \frac{1}{x^T x} xx^T = \frac{1}{y^T y} yy^T$. Πολλαπλασιάζουμε με x από δεξιά και παίρνουμε

$$\frac{1}{x^T x} x \underbrace{(x^T x)}_{\text{αριθμός}} = \frac{1}{y^T y} y \underbrace{(y^T x)}_{\text{αριθμός}} \Leftrightarrow x = \frac{y^T x}{y^T y} y$$

2. I. Au=O και $A^2 = - u^T u\, I + uu^T$ άμεσα, απλοί υπολογισμοί.

$$A^2 = - u^T u\, I + uu^T = - u^T u(I - \frac{1}{u^T u} uu^T) = - u^T u(I - P_u) = - u^T u\, Q_u .$$

(Εννοείται ότι $u \neq 0$).

II. A^2 συμμετρικός, απλή επαλήθευση. Άρα και ο Q_u είναι συμμετρικός.

$A^3 = AA^2 = - u^T u\, A + \underbrace{(A\,u)}_{\text{μηδέν}} u^T = - u^T u A$, αριθμητικό πολλαπλάσιο αντισυμμετρικού, άρα αντισυμμετρικός.

Σημείωση: Γενικότερα, $A^{2\nu} = (A^2)^\nu = (-u^T u)^\nu Q_u^\nu = (-u^T u)^\nu Q_u$, αριθμητικό πολλαπλάσιο συμμετρικού, άρα συμμετρικός.

Επίσης

$$A^{2\nu+1} = AA^{2\nu} = (-u^T u)^\nu AQ_u = (-u^T u)^\nu (A - \frac{1}{u^T u} \underbrace{(Au)}_{\text{μηδέν}} u^T) = (-u^T u)^\nu A,$$

αριθμητικό πολλαπλάσιο αντισυμμετρικού, άρα αντισυμμετρικός.

3. I. $$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_4 & \beta_5\\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0\\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 0\end{vmatrix}-\alpha_4\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_5\\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0\\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 0\end{vmatrix}+\alpha_5\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0\\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-\alpha_1\beta_5\begin{vmatrix}\gamma_2 & 0 & 0\\ \delta_2 & 0 & 0\\ \varepsilon_2 & 0 & 0\end{vmatrix}+\alpha_2\beta_5\begin{vmatrix}\gamma_1 & 0 & 0\\ \delta_1 & 0 & 0\\ \varepsilon_1 & 0 & 0\end{vmatrix}-\alpha_3\beta_5\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & 0\\ \delta_1 & \delta_2 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0\end{vmatrix}+\alpha_4\beta_5\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & 0\\ \delta_1 & \delta_2 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0\end{vmatrix}-.$$

$$-\alpha_3\beta_4\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & 0\\ \delta_1 & \delta_2 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0\end{vmatrix}=0$$

Οι νές υποορίζουσες που εμφανίζονται είναι μηδέν γιατί έχουν μια τουλάχιστον στήλη μηδενική.

II. Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$V^{-1}=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}\begin{bmatrix}\alpha_2\alpha_3(\alpha_2-\alpha_3) & -(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3) & \alpha_2-\alpha_3\\ -\alpha_1\alpha_3(\alpha_1-\alpha_3) & (\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3) & -(\alpha_1-\alpha_3)\\ \alpha_1\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2) & -(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2) & \alpha_1-\alpha_2\end{bmatrix}$$

4. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 2 & 1\\ \alpha & 2\beta-1 & 3 & 1\\ \alpha & \beta & \beta+3 & 2\beta-1\end{bmatrix}$. Αφαιρώντας την 1η γραμμή από τη δεύτερη και τρίτη παίρνουμε $\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 2 & 1\\ 0 & \beta-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \beta+1 & 2(\beta-1)\end{bmatrix}$. Από την τελευταία γραμμή διαπιστώνουμε ότι αν $\beta=-1$ τότε το σύστημα δεν έχει λύση. Έστω $\beta\neq-1$. Τότε πολλαπλασιάζοντας την τελευταία γραμμή επί $(\beta+1)^{-1}$ και αφαιρώντας τη από τη δεύτερη παίρνουμε $\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 2 & 1\\ 0 & \beta-1 & 0 & -\dfrac{2(\beta-1)}{\beta+1}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2(\beta-1)}{\beta+1}\end{bmatrix}$. Αφαιρώντας τώρα το διπλάσιο της τελευταίας γραμμής από την πρώτη παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dfrac{-3\beta+5}{\beta+1} \\ 0 & \beta-1 & 0 & -\dfrac{2(\beta-1)}{\beta+1} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2(\beta-1)}{\beta+1} \end{bmatrix}.$$

Αν $\beta = 1$ παίρνουμε $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, οπότε από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε

$x_1 = t \in \mathbf{R}$ οτιδήποτε, $x_2 = 1 - \alpha t$ και από την τελευταία, $x_3 = 0$.

Έστω τώρα $\beta \neq \pm 1$. Διαιρώντας τη δεύτερη εξίσωση με $\beta - 1$ παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dfrac{-3\beta+5}{\beta+1} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{2}{\beta+1} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2(\beta-1)}{\beta+1} \end{bmatrix}$$

Αφαιρώντας τώρα το πολλαπλάσιο της δεύτερης επί β από την 1η παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dfrac{-\beta+5}{\beta+1} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{2}{\beta+1} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2(\beta-1)}{\beta+1} \end{bmatrix}$$

Αν τώρα $\beta = 5$ και $\alpha = 0$ παίρνουμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{4}{3} \end{bmatrix}$. Άρα $x_1 = t \in \mathbf{R}$,

$x_2 = -\dfrac{1}{3}$ και $x_3 = \dfrac{4}{3}$.

Αν $\beta = 5$ και $\alpha \neq 0$ παίρνουμε $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$ και $x_3 = \dfrac{4}{3}$.

Έστω $\beta \neq \pm 1$, και $\beta \neq 5$. Αν $\alpha \neq 0$ παίρνουμε $x_1 = \dfrac{-\beta+5}{\alpha(\beta+1)}$, $x_2 = -\dfrac{2}{\beta+1}$ και

$x_3 = \dfrac{2(\beta-1)}{\beta+1}$, ενώ αν $\beta \neq \pm 1$, και $\beta \neq 5$ και $\alpha = 0$ το σύστημα είναι αδύνατο.

5. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

Κάνοντας γραμμοπράξεις έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -9 & 7 & 0 \end{bmatrix} \underset{\approx}{\overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}}{}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα το σύστημα μετασχηματίζεται στο $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5\ x_3 - x_4 = 0 \\ \quad 2\ x_2 - 7\ x_3 + 4\ x_4 = 0 \end{cases}$

Θέτοντας $x_3 = \alpha$ και $x_4 = \beta$ και λύνοντας ως προς x_1 και x_2 παίρνουμε τη ζητούμενη μορφή των λύσεων.

6. Κάνουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & 5 & -5 & 12 \end{array}\right]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & 5 & -5 & 12 \end{array}\right] \underset{\approx}{\overset{\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + 3R_1}}{}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & 4 & -9 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -16 & -11 & 18 \end{array}\right]$$

$$\underset{\approx}{\overset{\substack{R_3 \to R_3 + 5R_2 \\ R_4 \to R_4 - 8R_2}}{}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right] \underset{\approx}{\overset{R_4 \to R_4 - 3R_2}{}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -14 & -23 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Ο αντίστροφος του πίνακα $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -14 & -23 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ο $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y_1 & & & & = -9 \\ -y_1 & +y_2 & & & = 5 \\ 2y_1 & -5y_2 & +y_3 & & = 7 \\ -3y_1 & +8y_2 & +3y_3 & +y_4 & = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & & & = -9 \\ & y_2 & & = -4 \\ & -5y_2 & +y_3 & = 25 \\ & 8y_2 & +3y_3 & +y_4 = -16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & & & = -9 \\ & y_2 & & = -4 \\ & & y_3 & = 5 \\ & & 3y_3 & +y_4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & & & = -9 \\ & y_2 & & = -4 \\ & & y_3 & = 5 \\ & & & y_4 = 1 \end{cases}$$

Λύνουμε τώρα το σύστημα

$$\begin{cases} 3x_1 & -7x_2 & -2x_3 & +2x_4 = -9 \\ & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 = -4 \\ & & -x_3 & +x_4 = 5 \\ & & & -x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & & & = 3 \\ & x_2 & & = 4 \\ & & x_3 & = -6 \\ & & & x_4 = -1 \end{cases}$$

Λύνουμε το ίδιο σύστημα κάνοντας γραμμοπράξεις.

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ -3 & 5 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & -4 & 0 & -5 & 7 \\ -9 & 5 & -5 & 12 & 11 \end{bmatrix}$.

Κάνουμε γραμμοπράξεις:

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ -3 & 5 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & -4 & 0 & -5 & 7 \\ -9 & 5 & -5 & 12 & 11 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + 3R_1}}{\approx} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 10 & 4 & -9 & 25 \\ 0 & -16 & -11 & 18 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3 \to R_3 + 5R_2 \\ R_4 \to R_4 - 8R_2}}{\approx} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 16 \end{bmatrix} \overset{R_4 \to R_4 - 3R_2}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 + R_4}{\approx} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\approx}{R_2 \to R_2 - R_3 + 2R_4}\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\approx}{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\approx}{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\approx}{\begin{matrix} R_1 \to \frac{1}{3}R_1 \\ R_3 \to -R_3 \\ R_4 \to -R_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -6 \\ x_4 = -1 \end{cases}$