ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ ΠΛΗ 12: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι» 2001-02

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελετήστε τα Κεφάλαια 4, 5 **και** 6.1 – 6.3 **του βιβλίου « ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ »**

Προτεινόμενες Ασκήσεις: Κεφ. **4**, σελ. 85 : 3, 5, 7, 10, 14, 17, 20, 24, 25, 28

Κεφ. **5**, σελ. 101 : 2, 4, 5. Κεφ. **6**, σελ. 132: 3, 5, 7, 8 , 10 , 12, 13, 15, 18, 21, 26, 30

1. **Αν** W_1 **και** W_2 **είναι πραγματικοί διανυσματικοί υπόχωροι που γεννώνται αντίστοιχα από τα διανύσματα**

$$\alpha_1 = [1 \quad 2 \quad -1 \quad -2]^T, \quad \alpha_2 = [3 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T, \quad \alpha_3 = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad -1]^T$$

και

$$\beta_1 = [\ 2 \quad 5 \quad -6 \quad -5\ ]^T, \quad \beta_2 = [\ -1 \quad 2 \quad -7 \quad 3\ ]^T$$

βρείτε τις διαστάσεις και βάσεις των $\mathbf{W_1 \cap W_2}$ **και** $W_1 + W_2$**.** [20]

2. **Να βρείτε το διανυσματικό χώρο των πινάκων που αντιμετατίθενται με τον πίνακα**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και επιπλέον μία βάση του χώρου αυτού. (Υπόδειξη: Βρείτε όλους τους πίνακες X **που έχουν την ιδιότητα** AX=XA**).** [10]

3.

Έστω A **και** B **είναι** 3×2 **και** 2×3 **πίνακες αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε**

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(1)}$$

4.

I. **Δείξτε ότι οι στήλες του** AB **είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα και ανά δύο οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες.**

II. **Βρείτε μια βάση** $\{u_1, u_2\}$ **του χώρου στηλών του AB**

III. **Αν A είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα** u_1, u_2, **βρείτε πίνακα B που να ικανοποιεί τη σχέση (1) και διαπιστώστε ότι** $\mathbf{BA=9I_2}$. [15]

5. **Αν ο πραγματικός** $\nu\times\nu$ **πίνακας** A **είναι συμμετρικός και** λ **είναι ιδιοτιμή του, ποιες είναι οι ιδιοτιμές των πινάκων** I – iA **και** I + iA ($\mathbf{i}=\sqrt{-1}$, **είναι η φανταστική μονάδα). Δείξτε ότι οι πίνακες αυτοί είναι αντιστρέψιμοι και ότι** [15]

$$(I - iA)(I + iA)^{-1}$$

είναι ορθομοναδιαίος πίνακας.

6. **Αν f(x) είναι μία γραμμική απεικόνιση επί του** $\mathbf{R}^3$ **τέτοια ώστε**

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\0\\-2\end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix}-2\\7\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$$ [15]

βρείτε την εικόνα της f(x) και τα διανύσματα y = f(x). **(Βλ. Παράδειγμα 5.2, σελ. 92).**

7. **Αν** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

I. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A. **Ο πίνακας** A **διαγωνιοποιείται;** [5]

II. Χωρίς να υπολογίσετε τον πίνακα A^{-1}, **βρείτε τις ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του** A^{-1}. [5]

Για τον συμμετρικό πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ [15]

βρείτε ορθογώνιο πίνακα Μ, **ώστε** $\mathbf{M}^T\mathbf{AM}$ **είναι διαγώνιος πίνακας. Βρείτε, επιπλέον τους πίνακες** Χ **που ικανοποιούν** $\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$ **.**
(Υπόδειξη : Για τη διπλή ιδιοτιμή $\lambda = 2$**, βρείτε ορθομοναδιαία ιδιο-διανύσματα. Μελετήστε το Παράδειγμα 6.12, σελ. 117).**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ $2^η$ ΕΡΓΑΣΙΑ

1. Τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ είναι βάση του $\mathbf{W}_1$ και τα διανύσματα $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ είναι βάση του $\mathbf{W}_2$.
Τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\Rightarrow$ βάση του $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$
Επειδή $\dim(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2) = \dim \mathbf{W}_1 + \dim \mathbf{W}_2 - \dim \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 \Rightarrow \dim \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = 1$.
Τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1$ είναι γραμμικά εξαρτημένα $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_1$ βάση του $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$.

2. Οι πίνακες $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ αντιμετατίθενται με τον $\mathbf{A}$, και ανήκουν στο $\text{span}\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3\}$.

3. Στον πίνακα $\mathbf{AB}$ οι δύο πρώτες στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.
Επειδή $3^η$ στ. = $\frac{1}{2}$($1^η$ στ.) + ($2^η$ στ.) έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Rightarrow \lambda \in \mathbf{R}$. Ιδιοτιμές των $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{iA}$ και $\mathbf{N} = \mathbf{I} + \mathbf{iA}$ είναι οι αριθμοί $1 - i\lambda$, $1 + i\lambda$.
Επίσης $\det(\mathbf{MN}) = \prod (1 - i\lambda)(1 + i\lambda) = \prod (1 + \lambda^2) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{M}, \mathbf{N}$ αντιστρέψιμοι.
Αν $\boldsymbol{\Theta} = (\mathbf{I} - \mathbf{iA})(\mathbf{I} + \mathbf{iA})^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{\Theta}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{iA})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{iA}) \Rightarrow \boldsymbol{\Theta}^*\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{I}$, έχοντας υπόψη ότι οι πίνακες $\mathbf{I} - \mathbf{iA}$, $\mathbf{I} + \mathbf{iA}$ είναι αντιμεταθετικοί .

5. Από τις ισότητες $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + f(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - f(\boldsymbol{\varepsilon}_2) + f(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ και

$$-2\, f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + 7f(\boldsymbol{\varepsilon}_2) - f(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = [\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)\ \ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\ \ f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)\ ] = \begin{bmatrix} -11 & -1 & 13 \\ 15 & 3 & -12 \\ 9 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -11x_1 - x_2 + 13x_3 \\ 15x_1 + 3x_2 - 12x_3 \\ 9x_1 + x_2 - 10x_3 \end{bmatrix}.$$

6. $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$

Για $\lambda = 1 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda = 2$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = -1$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει 3 ιδιοδιανύσματα γραμ. ανεξάρτητα $\Rightarrow$ διαγωνοποιείται.

$\{1,\ -1,\ 1/2\}$ ιδιοτιμές του $\mathbf{A}^{-1}$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_2$.

$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}| = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{2})$.

7. $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 8)$.

$\lambda = 2 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = 8 \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ορθογωνοποιούμε $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1$, $\bar{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{M} = \text{diag}\,(2, 2, 8) = \mathbf{D}.$$

$\mathbf{X}^2 = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{Y}^2 = \mathbf{D}$ όπου $\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{X}\mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{D}^{1/2} = \text{diag}\,(\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2},\ \pm 2\sqrt{2})$.