ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 28/12/2001

Γ΄ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαθηματικά για την Πληροφορική Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

Η ύλη της εργασίας είναι παράγραφοι 6.4 και 6.5 από τη Γραμμική Άλγεβρα και Ενότητες 1,2,3,4 από τον Λογισμό Μιας Μεταβλητής.

1. *Η άσκηση αυτή αφορά το Θεώρημα Cayley-Hamilton, παράγραφος 6.4 της Γραμμικής Άλγεβρας.*

   I. Έστω $A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Αφού προσδιορίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, παρατηρήστε ότι $A^2 = A^4 = A^6$ και $A = A^3 = A^5$ Υπολογίστε τον πίνακα $A^{2002} + A^{2001}$. (5 βαθμοί)

   II. Έστω $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Εκφράστε το B^{-2} ως πολυώνυμο του B.

   (5 βαθμοί) *(Υπόδειξη: Δέστε το παράδειγμα 6.16)*

2. *Εδώ αναφερόμαστε σε θετικά ορισμένους πίνακες και τετραγωνικές μορφές, παράγραφος 6.5 της Γραμμικής Άλγεβρας.*

   Δίνεται ο πραγματικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   I. Αποδείξτε ότι ο A δεν είναι θετικά ορισμένος. (5 βαθμοί) *(Υπόδειξη: υπολογίστε την ορίζουσα του A και συμπεράνετε ότι μια τουλάχιστον ιδιοτιμή δεν είναι θετική.)*

   II. Στην περίπτωση που ο A είναι θετικά ημιορισμένος, να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές του και χωρίς να κάνετε άλλες πράξεις δώστε τη διαγώνια μορφή της τετραγωνικής μορφής $x^T Ax$. (5 βαθμοί)

3. *Η άσκηση αφορά μιγαδικούς αριθμούς και ιδιαίτερα το Θεώρημα De Moivre, παράγραφος 1.2 του Λογισμού Μιάς Μεταβλητής.*
   I. Προσδιορίστε τις 4 ρίζες της εξίσωσης $z^4 + 3 = 0$. Δώστε τη γεωμετρική παράστασή τους στο πραγματικό επίπεδο. Τι σχήμα προκύπτει αν ενώσουμε τις διαδοχικές κορυφές; (5 βαθμοί) *(Υπόδειξη: Ασκηση 2 σελίδα 10)*
   II. Προσδιορίστε τις 8 ρίζες της εξίσωσης $z^8 + 2z^4 – 3 = 0$. (5 βαθμοί) *(Υπόδειξη: ισχύει $z^8 + 2z^4 – 3 = (z^4 – 1)(z^4 + 3)$).*
4. *Η άσκηση αυτή αναφέρεται στο ενότητα 2 του Λογισμού Μιάς Μεταβλητής*
   I. Ποιές από τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, και $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

      $g(x) = x^2 + 3$ αντιστρέφονται; Να περιγραφεί με τύπο η αντίστροφη συνάρτηση όταν υπάρχει. Υπολογίστε τις δύο συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$. (5 βαθμοί)
   II. Έστω η ακολουθία $α_n$ που δίνετε από $α_0 = 2002$ και $α_{n+1} = \sqrt{α_n}$. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι κάτω φραγμένη και φθίνουσα. Συμπεράνατε ότι είναι συγκλίνουσα και βρείτε το όριό της. Αφού βρείτε τον γενικό τύπο της $α_n$, βρείτε ένα N ώστε $|α_n - α| < 1/10$ για κάθε $n \geq N$, όπου α είναι το όριο, σύμφωνα με τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας. Χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή επαληθεύσατε. (10 βαθμοί)
   III. Για ποιούς θετικούς πραγματικούς λ η ακολουθία $α_n = \sqrt{λn^2 + 1} - 2n$ συγκλίνει; (5 βαθμοί) *(Υπόδειξη: άσκηση 2 σελ 29-30)*
5. *Στην άσκηση αυτή εξετάζονται σειρές, ενότητα 3 του Λογισμού Μιάς Μεταβλητής*
   I. Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+2)!} \quad \text{(4 βαθμοί)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 5^n + 2}{(5^n + 2)n^5} \quad \text{(4 βαθμοί)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 1}{4n^4 - 1} \quad \text{(4 βαθμοί)}$$

(Υπόδειξη: για την πρώτη δέστε το παράδειγμα στη σελίδα 38, για τη δεύτερη γράψτε την ως άθροισμα δύο σειρών και για την τρίτη συγκρίνατέ την με την αρμονική σειρά)

II. Βρείτε τα αθροίσματα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \quad \text{(4 βαθμοί)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n} \quad \text{(4 βαθμοί)}$$

(Υπόδειξη. Για την πρώτη σειρά, μελετήστε το παράδειγμα στη σελίδα 42)

III. Αν α_n είναι ακολουθία μη μηδενικών αριθμών ώστε $\alpha_n^2 + \alpha_{n-1}\alpha_{n+1} = \alpha_n\alpha_{n+1}$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ δεν συγκλίνει. (5 βαθμοί)

6. *Η άσκηση αυτή αφορά όρια και συνέχεια συναρτήσεων, ενότητα 4 του Λογισμού Μιάς Μεταβλητής*

I. Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to o}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \quad \text{(5 βαθμοί)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin(\pi x)-\sin(3\pi x)}{x^3} \quad \text{(5 βαθμοί)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-3x+2} \quad \text{(5 βαθμοί)}$$

(Υπόδειξη: Για το πρώτο όριο δέστε την άσκηση 1 σελίδα 65. Για το δεύτερο όριο, υπενθυμίζουμε από την Τριγωνομετρία ότι $\sin(3\alpha) = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$ και επομένως $3\sin(\pi x)-\sin(3\pi x) = 4\sin^3(\pi x)$. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.)

II. Να βρεθούν οι πραγματικοί α,β ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+4\alpha x+1, & x\le 1\\ 3x^2+\beta, & 1<x\le 4\\ \alpha x+\beta, & 4<x\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. (10 βαθμοί)

Προτεινόμενες Ασκήσεις

Πέρα από τα παραδείγματα του βιβλίου και τις ασκήσεις αυτοαξιολόγησης, θα πρέπει να ασχοληθείτε με τη λύση των παρακάτω ασκήσεων.

<u>**ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ**</u>

<u>Κεφ. 6</u> : 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 18, 21, 26, 30.

<u>**ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ**</u>

<u>Ενότ. 1</u> : 2, 5, 6, 8, 10. <u>Ενότ. 2</u> : 1, 3, 6, 8. <u>Ενότ. 3</u> : 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10.

<u>Ενότ. 4</u> : 3, 4, 5, 8.

ΠΛΗ 12 2001-02

Απαντήσεις στην Εργασία 3

1.I Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι (πράξεις) $x^3 - x$ και από το θεώρημα Caley-Hamilton έχουμε $A^3 = A$. Συνεπώς $A^4 = A^3 A = AA = A^2$, $A^5 = A^4 A = A^3 = A$, $A^6 = A^5 A = A^2$. Με επαγωγή στο n μπορεί να αποδειχθεί ότι $A^{2n} = A^2$ και $A^{2n+1} = A$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$. Άρα

$$A^{2002} + A^{2001} = A^2 + A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

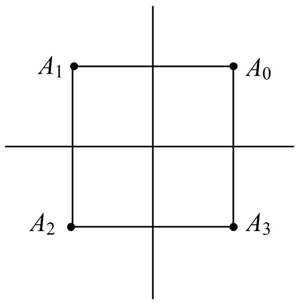
1.II Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι (πράξεις) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ και από το θεώρημα Caley-Hamilton έχουμε $B^3 - 4B^2 + 5B - 2I = 0$. Ο B είναι αντιστρέψιμος γιατί ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μη μηδενικός.

Παίρνουμε $I = \frac{1}{2}(B^3 - 4B^2 + 5B)$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με το B^{-1} έχουμε $B^{-1} = \frac{1}{2}(B^2 - 4B + 5I)$. Όμοια $B^{-2} = \frac{1}{2}(B - 4I + 5B^{-1})$. Αντικαθιστώντας έχουμε $B^{-2} = \frac{1}{2}\left(B - 4I + 5\left(\frac{1}{2}(B^2 - 4B + 5I\right)\right) = \frac{5}{4}B^2 - \frac{9}{2}B + \frac{17}{4}I$.

2.I. Η ορίζουσα είναι $-\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2 \le 0$. Επειδή αυτή είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών, βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατόν οι ιδιοτιμές να είναι όλες θετικές.

2.II. Ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος ακριβώς όταν οι ιδιοτιμές είναι ≥ 0. Από το 2.I. βλέπουμε ότι αν ο A είναι θετικά ημιορισμένος τότε $\lambda = 1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και οι ιδιοτιμές του A είναι (πράξεις) 0,0,3. Σύμφωνα με τη σχέση (6.11) σελίδα 127 του βιβλίου, η διαγώνια μορφή της τετραγωνικής μορφής που ορίζει ο A είναι $3y_1^2$.

3.I. $z^4 = -3 = 3(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi)$. Από De Moivre, υπάρχουν οι εξής λύσεις $z_k = \sqrt[4]{3}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{4}, i\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0,1,2,3$.



Το σημείο A_k αντιστοιχεί στη λύση z_k

$$A_0 = \left(\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}\right) \qquad A_1 = \left(-\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$A_2 = \left(-\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}\right) \quad A_3 = \left(\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}\right)$$

Προκύπτει τετράγωνο στη γραφική παράσταση.

3.II. Σύμφωνα με την υπόδειξη, εδώ έχουμε επιπλέον τις ρίζες του $z^4 = 1$ που είναι οι $1, -1, i, -1$.

4.I. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$) και επί (το τυχαίο $y \in \mathbb{R}$ είναι εικόνα του $\frac{y-1}{2}$). Άρα αυτή αντιστρέφεται. Η g δεν είναι αμφιμονοσήμαντη (π.χ. $g(-1) = g(1)$) και άρα δεν αντιστρέφεται. Η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Για τις συνθέσεις έχουμε $f \circ g(x) = f(x^2+3) = 2(x^2+3) + 1 = 2x^2 + 7$, $g \circ f(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 4$.

4.II. Επαγωγικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι $1 \le a_n < a_{n-1}$, $n = 1,2,...$ (προσοχή στο αρχικό βήμα, είναι $a_0 \ge 1$) και άρα η ακολουθία (a_n) είναι κάτω φραγμένη και (γνήσια) φθίνουσα. Κατά συνέπεια είναι συγκλίνουσα. Ισχύει $a_1 = \sqrt{a_0}$, $a_2 = \sqrt{\sqrt{a_0}} = \sqrt[4]{a_0}$, $a_3 = \sqrt{\sqrt[4]{a_0}} = \sqrt[8]{a_0}$ κ.λπ. Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι $a_n = \sqrt[2^n]{a_0}$. Θα δείξουμε τώρα ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ με τον ορισμό του ορίου. (Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ γνωστές ιδιότητες λογαρίθμων). Με $\log_2$ συμβολίζουμε τον λογάριθμο με βάση το 2. Έστω $\varepsilon > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 \ge \log_2\left(\frac{\log_2 a_0}{\log_2(1+\varepsilon)}\right)$.

Τότε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει $\left|\sqrt[2^n]{a_0} - 1\right| \le \varepsilon$. Πράγματι,

$$\left|\sqrt[2^n]{a_0}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[2^n]{a_0}-1<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[2^n]{a_0}<1+\varepsilon \Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt[2^n]{a_0}\right)<\log_2(1+\varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2^n}\log_2 a_0<\log_2(1+\varepsilon) \Leftrightarrow 2^n>\frac{\log_2 a_0}{\log_2(1+\varepsilon)} \Leftrightarrow n>\log_2\left(\frac{\log_2 a_0}{\log_2(1+\varepsilon)}\right).$$ Συνεπώς η ακολουθία συγκλίνει.

Θέτοντας $\varepsilon=1/10$ βρίσκουμε με τη βοήθεια αριθμομηχανής από την τελευταία ανισότητα ότι $n>6{,}31$, ήτοι $n\geq 7$. Για $n=7$ έχουμε $a_n=1{,}06......$ (με τη βοήθεια αριθμομηχανής). Παρατηρούμε ότι πράγματι, │1,06... - 1│<1/10

4.III. Έχουμε

$$a_n=\sqrt{\lambda n^2+1}-2n=\frac{(\sqrt{\lambda n^2+1}-2n)(\sqrt{\lambda n^2+1}+2n)}{\sqrt{\lambda n^2+1}+2n}=\frac{(\lambda-4)n^2+1}{\sqrt{\lambda n^2+1}+2n}=$$

$$=\frac{(\lambda-4)n+\frac{1}{n}}{\sqrt{\lambda+\frac{1}{n^2}}+2}.$$

Υπολογίζοντας το όριο της τελευταίας παράστασης, βλέπουμε ότι η ακολουθία a_n συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda-4=0$, ήτοι $\lambda=4$.

5.I. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}(n+2)!}{2^n(n+3)!}=\frac{2}{n+3}$ και αυτό τείνει στο $0<1$ όταν $n\to\infty$. Άρα η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου.

Για τη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι $\frac{n^5+5^n+2}{(5^n+2)n^5}=\frac{1}{5^n+2}+\frac{1}{n^5}$ (*). Επειδή $\frac{1}{5^n+2}<\frac{1}{5^n}$ και η γεωμετρική σειρά $\sum\frac{1}{5^n}$ συγκλίνει συμπεραίνουμε ότι η $\sum\frac{1}{5^n+2}$ συγκλίνει. Είναι γνωστό ότι και η $\sum\frac{1}{n^5}$ συγκλίνει. Από τη (*) προκύπτει ότι η αρχική σειρά συγκλίνει.

(*) Χρειάζεται προσοχή εδώ: Αν $\sum a_n$ και $\sum b_n$ **συγκλίνουν**, τότε η $\sum(a_n+b_n)$ συγκλίνει και $\sum(a_n+b_n)=\sum a_n+\sum b_n$. (Αυτό εννοεί, χωρίς να το αναφέρει ρητά η άσκηση 1γ σελίδα 45).

Η τρίτη σειρά δεν συγκλίνει γιατί $\dfrac{3n^3+1}{4n^4-1} > \dfrac{3n^3}{4n^4} = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{n}$ και η σειρά $\sum\left(\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{n}\right)$ δεν συγκλίνει αφού η $\sum\dfrac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

5.II. Επειδή $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1/2}{2n-1} - \dfrac{1/2}{2n+1}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n^2-1} = \left(\frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5} + \ldots - \frac{1/2}{2N+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right).$$

Άρα $\sum\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

Στη δεύτερη σειρά έχουμε άθροισμα δύο συγκλινουσών σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{2\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2}.$$

Άρα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$.

5.III. $a_n^2 + a_{n-1}a_{n+1} = a_n a_{n+1} \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n+1}}a_n + a_{n-1} = a_n \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n+1}} + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} = 1$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι: αν η ακολουθία $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ συγκλίνει τότε $\lim\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$. Άρα δεν είναι δυνατόν να συγκλίνει η $\sum\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

6.I. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+2}-2)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})x} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ακολουθώντας την υπόδειξη έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin(\pi x)-\sin(3\pi x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3(\pi x)}{x^3} = 4\pi^3\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^3 = 4\pi^3.$$

Το 1 μηδενίζει τον αριθμητή και παρονομαστή του τρίτου ορίου. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2}{x-2} = 1$$

6.II. Είναι σαφές ότι η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ εκτός ενδεχομένως από τα σημεία 1 και 4. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 1

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \; 2 + 4a + 1 = 3 + \beta \,.$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο 4

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^2 + \beta = 4a + \beta \,.$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $a = 12$ και $\beta = 48$.