ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

Δ΄ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ύλη της εργασίας είναι οι ενότητες 5, 6 και 7 από τον Λογισμό μιας Μεταβλητής.

Η άσκηση 1 αφορά στην έννοια της παραγώγου και τη γεωμετρική ερμηνεία της (παράγραφοι 5.1 και 5.2)

1. **Ι)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \sin(2x), & x < 0 \\ \sqrt{x+1} - \dfrac{x}{2} - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Εξετάστε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$. ***(10 βαθμοί)***

ΙΙ) Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = x^2 - 3x + 4$ και $h(x) = 3x - x^2$. Βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεων. Δείξτε ότι σε οποιοδήποτε σημείο τομής οι εφαπτόμενες ευθείες των δύο γραφικών παραστάσεων είναι μεταξύ τους κάθετες. ***(8 βαθμοί)***

Η άσκηση 2 αναφέρεται στις βασικές ιδιότητες της παραγώγου και τους κανόνες παραγώγισης (παράγραφος 5.3)

2. **Ι)** Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α) $y = x^3 + 7x - 8$ β) $y = \sin\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)$

γ) $y = (2 - x - 3x^3)(7 + x^5)$ δ) $y = \dfrac{4x^2+1}{x^3-2}$. ***(8 βαθμοί)***

(Υπόδειξη: *Για την Ι β) χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας*)

ΙΙ) Εάν $x \neq 0$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = \dfrac{1}{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^3 y'' + x^2 y' - xy = 0.$$ ***(8 βαθμοί)***

III) Δίνεται η συνάρτηση $y(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-2$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(1,\ -\frac{1}{6})$. Χωρίς να λύσετε τη σχέση αυτή ως προς *x* βρείτε την παράγωγο $\frac{dx}{dy}$ της αντίστροφης συνάρτησης στο σημείο $y=-\frac{1}{6}$.
(8 βαθμοί)
(Υπόδειξη: *Δείτε το παράδειγμα της σελίδας 79 του βιβλίου* ***Λογισμός μιας Μεταβλητής***)

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής και τα επακόλουθά του (παράγραφοι 6.1 και 6.2) είναι τα σημεία-κλειδιά της επόμενης άσκησης

3. **I)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+1$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής (ΘΜΤ) (σελ. 88, Λογισμός μιας Μεταβλητής) σε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ με $a<b$. Να βρεθούν οι τιμές του ξ για τις οποίες το ΘΜΤ ικανοποιείται στο διάστημα $[1,\ 2]$.
(8 βαθμοί)

II) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση αυτή έχει μια ρίζα στο διάστημα [0, 1]. Προσεγγίστε τη ρίζα αυτή με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.
(8 βαθμοί)
(Υπόδειξη: *Δείτε το παράδειγμα της σελίδας 94 του βιβλίου* ***Λογισμός μιας Μεταβλητής****. Χρησιμοποιήστε λογαριθμικούς πίνακες ή υπολογιστή τσέπης που υπολογίζει φυσικούς λογαρίθμους*)

Στην άσκηση 4 εφαρμόζεται ο κανόνας L'Hospital για τον υπολογισμό απροσδιόριστων μορφών

4. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

β) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)}[(\frac{\pi}{2}-x)\ \tan x]$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\ (\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$ ***(8 βαθμοί)***

Η Ενότητα 7 καλύπτει την ύλη στην οποία αναφέρονται οι επόμενες δύο ασκήσεις

5. **I)** Να βρεθούν τα διαστήματα των τιμών του *x* για τις οποίες η καμπύλη

$$y=x^3-6x^2+9x+1$$

α) ανέρχεται, **β)** κατέρχεται, **γ)** είναι κοίλη προς τα κάτω, **δ)** είναι κοίλη προς τα πάνω. Σχεδιάστε την καμπύλη και δείξτε τα σημεία καμπής και τα σημεία όπου η συνάρτηση έχει τοπικά μέγιστα και ελάχιστα. ***(8 βαθμοί)***

ΙΙ) Δείξτε ότι $\pi^e < e^\pi$, όπου $e = 2{,}71828...$ η βάση των φυσικών λογαρίθμων και $\pi = 3{,}14159....$ ο λόγος της περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρό του.

(Υπόδειξη για το ΙΙ: *Θεωρήστε τη συνάρτηση* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ *και ελέγξτε τη μονοτονία της στο διάστημα* $[e, +\infty)$) ***(8 βαθμοί)***

6. **Ι)** Βρείτε τα σημεία της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x > 0$, που είναι πιο κοντά στο σημείο $(c, 0)$, όπου $c > \frac{1}{2}$. ***(8 βαθμοί)***

ΙΙ) Για να κατασκευαστεί ένα ανοικτό κουτί (δηλ. χωρίς καπάκι) από ένα χαρτόνι διαστάσεων 16 cm με 30 cm κόβουμε ένα μικρό τετράγωνο κομμάτι από κάθε γωνία του. Ποιο θα πρέπει να είναι το μέγεθος του τετραγώνου που θα κόψουμε από κάθε γωνία έτσι ώστε το κουτί που θα φτιάξουμε να έχει όσο το δυνατό μεγαλύτερο όγκο; ***(10 βαθμοί)***

***Εκτός από τις ασκήσεις αυτοαξιολόγησης σας προτείνουμε να ασχοληθείτε και με τις επόμενες ασκήσεις*:**

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Ασκήσεις 1, 2, 4, 5, 6, 8 και 9 (σελ. 82-83)

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: Ασκήσεις 1 έως 8 (σελ. 102-103)

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 8 (σελ. 113-114)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ Δ΄ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. **Ι)** $f(0) = \sqrt{0+1} - \dfrac{0}{2} - 1 = 0$.

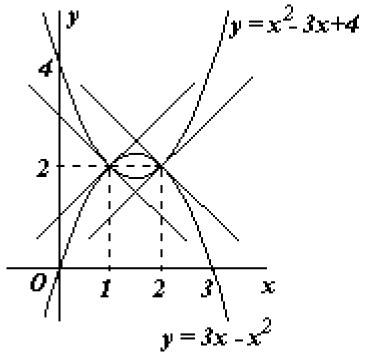
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-\sin(2x)}{x} = 2 - 2\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(2x)}{2x} = 2-2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-\frac{x}{2}-1}{x} = -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0^+}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = 0$$

Άρα υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$ και $f'(0)=0$.

II) Λύνουμε την εξίσωση $x^2-3x+4=3x-x^2$ και βρίσκουμε $x=1$ ή $x=2$. $g(1)=h(1)=g(2)=h(2)=2$. Άρα τα σημεία τομής είναι τα $(1,\,2)$ και $(2,\,2)$. Επίσης $g'(x)=2x-3$ και $h'(x)=3-2x$. Επομένως $g'(1)=-1$, $h'(1)=1$, $g'(2)=1$ και $h'(2)=-1$. Συνεπώς $g'(1)h'(1)=-1$ και $g'(2)h'(2)=-1$.



2. I) α) $y'=3x^2+7$, β) $y'=\cos\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)'=$

$$=\cos\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)\frac{(1+\cos(x))'}{2\sqrt{1+\cos(x)}}=-\frac{\sin(x)\cos\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)}{2\sqrt{1+\cos(x)}}\ ,$$

γ) $y'=(2-x-3x^3)'(7+x^5)+(2-x-3x^3)(7+x^5)'=$

$=(-1-9x^2)(7+x^5)+5(2-x-3x^3)x^4=$

$=-7-63x^2-x^5-9x^7+10x^4-5x^5-15x^7=-24x^7-6x^5+10x^4-$

$-63x^2-7$

δ) $y'=\dfrac{(4x^2+1)'(x^3-2)-(4x^2+1)(x^3-2)'}{(x^3-2)^2}=\dfrac{8x(x^3-2)-3(4x^2+1)x^2}{(x^3-2)^2}=$

$$=-\frac{4x^4+3x^2+16x}{(x^3-2)^2}.$$

II) Έχουμε $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ και $y''=\dfrac{2}{x^3}$. Άρα $x^3y''+x^2y'-xy=x^3\dfrac{2}{x^3}-x^2\dfrac{1}{x^2}-$

$-x\dfrac{1}{x}=2-1-1=0$.

III) $\dfrac{dy}{dx}=x^2+x+1$. Επομένως $y'(1)=3\neq 0$. Επειδή $y(1)=-\frac{1}{6}$ έπεται ότι

$x'(-\frac{1}{6})=\dfrac{1}{y'(1)}=\dfrac{1}{3}$.

3. **I)** Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ για κάθε $a < b$ ως πολυωνυμική. Επίσης παραγωγίζεται στο ανοικτό (a,b) με παράγωγο $f'(x) = 3x^2$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Στο διάστημα [1, 2] έχουμε $f'(\xi) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} \Leftrightarrow 3\xi^2 = 9 - 2 \Leftrightarrow \xi = \pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$. Αλλά ξ>0, οπότε $\xi = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

II) $f(0) = 0 - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$ και $f(1) = 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) > 0$ γιατί $\ln 2 < 1 \Leftrightarrow 2 < e$. Με βάση το θεώρημα Bolzanno (ή με βάση το θεώρημα της σελ. 58 και τα σχόλια που ακολουθούν) η συνάρτηση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [0, 1]. Ακόμη, $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2+1} > 0$, γιατί το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει διακρίνουσα –3<0. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα [0, 1].

Η εξίσωση $f(x) = x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2} = 0$ γράφεται ισοδύναμα $x = g(x)$, όπου $g(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι $g'(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \le \dfrac{1}{2} < 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, γιατί
$2x \le x^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$.

Θέτουμε $x_0 = 0$, $x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2}\ln(1) + \frac{1}{2} = 0{,}5$, $x_2 = g(x_1) = \frac{1}{2}\ln((0{,}5)^2 + 1) +$
$+\frac{1}{2} \approx 0{,}612$, $x_3 = g(x_2) = \frac{1}{2}\ln((0{,}612)^2 + 1) + \frac{1}{2} \approx 0{,}659$,
$x_4 = g(x_3) = \frac{1}{2}\ln((0{,}659)^2 + 1) + \frac{1}{2} \approx 0{,}680$,
$x_5 = g(x_4) = \frac{1}{2}\ln((0{,}680)^2 + 1) + \frac{1}{2} \approx 0{,}690$,

$x_6 = g(x_5) = \frac{1}{2}\ln((0{,}690)^2 + 1) + \frac{1}{2} \approx 0{,}695$. Οι τιμές λοιπόν συγκεντρώνονται γύρω από το 0,69. Την ίδια προσέγγιση μπορούμε να επιτύχουμε αν ξεκινήσουμε από το $y_0 = 1$. Έχουμε $y_1 = g(y_0) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2} = 0{,}847$,

$y_2 = g(y_1) = \frac{1}{2}\ln((0{,}847)^2 + 1) + \frac{1}{2} = 0{,}770$,

$y_3 = g(y_2) = \frac{1}{2}\ln((0{,}770)^2 + 1) + \frac{1}{2} = 0{,}733$,

$y_4 = g(y_3) = \frac{1}{2}\ln((0{,}733)^2 + 1) + \frac{1}{2} = 0{,}715$,

$y_5 = g(y_4) = \frac{1}{2}\ln((0{,}715)^2 + 1) + \frac{1}{2} = 0{,}706$,

$y_6 = g(y_5) = \frac{1}{2}\ln((0{,}706)^2 + 1) + \frac{1}{2} = 0{,}702$,

$y_7 = g(y_6) = \frac{1}{2}\ln((0{,}702)^2 + 1) + \frac{1}{2} = 0{,}700$,

$y_8 = g(y_7) = \frac{1}{2}\ln((0{,}700)^2 + 1) + \frac{1}{2} = 0{,}699$ κλπ.

4. (α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} =$

$= -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = -\frac{1}{2}$.

(β) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)}[(\frac{\pi}{2} - x)\tan x] = \lim\limits_{x\to(\pi/2)}\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim\limits_{x\to(\pi/2)}\frac{(\frac{\pi}{2} - x)'}{(\frac{1}{\tan x})'} =$

$= \lim\limits_{x\to(\pi/2)}\frac{-1}{-\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}} = \lim\limits_{x\to(\pi/2)}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x\tan^2 x}} = \lim\limits_{x\to(\pi/2)}(\cos^2 x\tan^2 x) =$

$= \lim\limits_{x\to(\pi/2)}\sin^2 x = 1$.

(γ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2 - (3x+1)\sqrt{x} + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^2 - (3x+1)\sqrt{x} + 2)'}{(x-1)'} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4x - 3\sqrt{x} - \dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}}{1} = 4 - 3\sqrt{1} - \frac{3+1}{\sqrt{1}} = -3 .$$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x + x\cos x} =$

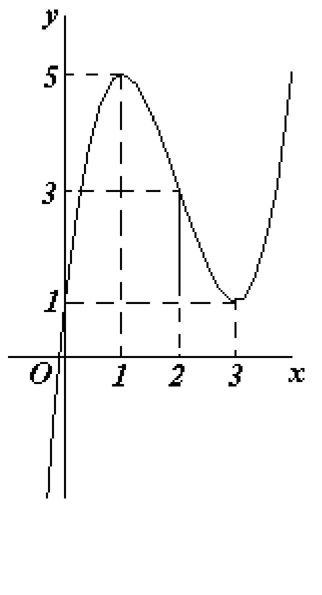
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2-0} = 0 .$$

5. **I)** Έχουμε $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Άρα $y' > 0$ αν $x < 1$ ή $x > 3$ και $y' < 0$ για $1 < x < 3$. Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο [1, 3]. Στο 1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $y(1) = 5$ και στο 3 τοπικό ελάχιστο $y(3) = 1$.

Επίσης $y' = 6x - 12 = 6(x-2)$. Άρα η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και προς τα άνω στο διάστημα $[2, +\infty)$. Το σημείο (2, 3) είναι σημείο καμπής. Τα παραπάνω περιγράφονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.μ.		σ.κ.		τ.ε.		

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι η ακόλουθη:



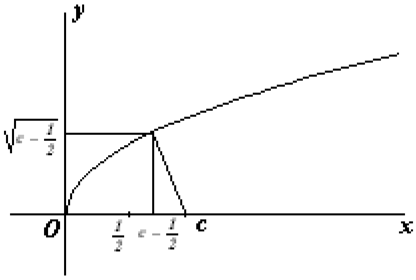
II) Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ στο διάστημα $[e,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$ για κάθε $x\in[e,+\infty)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα.

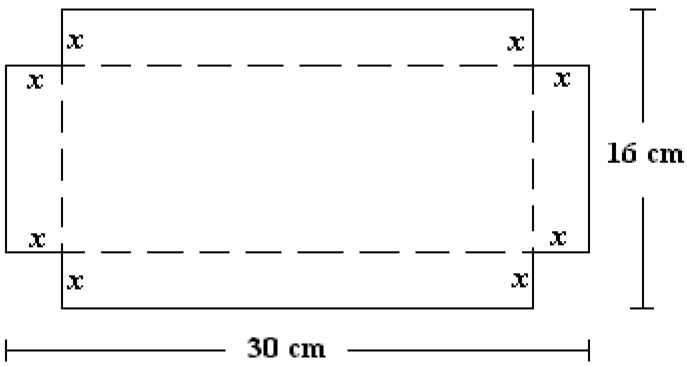
Άρα $f(e)>f(\pi)\Leftrightarrow \dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}\Leftrightarrow \pi>e\ln\pi\Leftrightarrow e^{\pi}<e^{e\ln\pi}=\pi^{e}$.

6. **I)** Το τετράγωνο της απόστασης του σημείου $(c,\,0)$ από το σημείο $(x,\sqrt{x})$ είναι $f(x)=(c-x)^2+(\sqrt{x})^2=x^2+(1-2c)x+c^2$. Έχουμε $f'(x)=2x-2c+1$ και $f''(x)=2>0$.

$f'(x)=2x-2c+1=0\Leftrightarrow x=c-\frac{1}{2}$. Επειδή $f''(x)=2>0$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=c-\frac{1}{2}$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $(c-\frac{1}{2},\sqrt{c-\frac{1}{2}})$ και η ελάχιστη απόσταση είναι $\sqrt{c-\frac{1}{4}}$.



II)



Αφού κόβουμε ένα μικρό τετράγωνο κομμάτι πλευράς x από κάθε γωνία του παραλληλογράμμου η κάθε πλευρά του θα είναι 30 – 2x και 16 – 2x αντίστοιχα. Ο όγκος του κουτιού λοιπόν θα είναι

$$V = (16-2x)(30-2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3.$$

Η μεταβλητή x όμως έχει κάποιους περιορισμούς. Δηλαδή:

1. Δεν μπορεί να είναι αρνητική
2. Επειδή το πλάτος του χαρτονιού είναι 16cm δεν μπορεί να ξεπερνά τα 8cm.

Έτσι, $0 \le x \le 8$.

$\frac{dV}{dx} = 480 - 184x + 12x^2 = 4(x-12)(3x-10) = 0$ Άρα $x = 12$ ή $x = \frac{10}{3}$.

Η σωστή τιμή του x είναι η $x = \frac{10}{3}$ αφού βρίσκεται στο διάστημα [0,8].

Άρα ο όγκος του κουτιού είναι $V = \frac{19600}{27} cm^3 \approx 726 cm^3$.