ΛΥΣΕΙΣ 5^{ΗΣ} ΕΡΓΑΣΙΑΣ, 2001- 02

Ενότητες: 8,9,10,11,12, από το βιβλίο « ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ » Γ.Δάσιου.

Παράδοση της εργασίας μεχρι τις 29 /4/2002 - Βαθμολογία 100 μ.

ΑΝΑΦΕΡΟΥΜΕ ΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΘΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΟΥΝ ΣΤΗΝ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 (κριτήριο σύγκλισης εναλλασσουσών σειρών).

Υποθέτουμε ότι για την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ ισχύουν: $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ για κάθε δεικτη n=0,1,…

. Τότε η σειρά συγκλίνει και για το άθροισμά της S ισχύει $\left| S - \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n \right| \leq a_{k+1}$.

(Δηλαδή, όταν προσεγγίσουμε το άθροισμα της σειράς με το μερικό άθροισμα των όρων μέχρι και τάξης k, το σφάλμα που προκύπτει δεν υπερβαίνει τον όρο της επόμενης τάξης κατ΄απόλυτη τιμή).

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ συγκλίνει και όταν προσεγγίσουμε το άθροισμά της με το μερικό άθροισμα $\sum_{n=0}^{8}(-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9}$ το σφάλμα είναι ≤ 0.1 (όχι και τόσο καλή εκτίμηση, πρέπει να φτάσουμε μεχρι τον όρο με n=98 για να είμαστε βέβαιοι,σύμφωνα με την εκτίμηση της προτασης, ότι το σφάλμα είναι ≤ 0.01)

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 (παραγώγιση και ολοκλήρωση δυναμοσειρών).

Υποθέτουμε ότι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, για $|x| < R$. Τότε $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_{a}^{\beta} x^n dx \right)$ όπου α, β ανήκουν στο ανοικτό διάστημα σύγκλισης (-R, R).

(Δηλαδή είναι δυνατόν να παραγωγίσουμε και να ολοκληρώσουμε μία δυναμοσειρά “όρο προς όρο”).

Η παραπάνω πρόταση μας επιτρέπει να βρίσκουμε τις παραγώγους και ολοκληρώματα συναρτήσεων που παρουσιάζονται σε μορφή δυναμοσειρών.

<u>Παραδειγματα εφαρμογής</u>: Αρχίζουμε με την γνωστή δυναμοσειρά (άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου)

(1) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, για $|x| < 1$,

από την οποία με αντικατάσταση του x από το –x προκύπτει

(2) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, για $|x| < 1$.

Προσέξτε όμως ότι από την (1) με παραγώγιση ως προς x έχουμε το ανάπτυγμα μίας άλλης συνάρτησης, δηλ. $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ και στην συνέχεια παραγωγίζοντας ακόμα μια φορά έχουμε το ανάπτυγμα της $\frac{1}{(1-x)^3}$. Τέλος, συνδυάζοντας το ανάπτυγμα της $\frac{1}{(1-x)^3}$ με το ίδιο πολλαπλασιασμένο με x προκύπτει το ανάπτυγμα της συνάρτησης $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ (ένας τρόπος για την αρχή της ασκησης 6 σελ. 133. Παρατηρείστε ότι το ανάπτυγμα της $\frac{1}{(1-x)^3}$ προκύπτει και από τον γενικό τύπο για το διωνυμικό ανάπτυγμα, σελ. 129-130).

Από την (2) με ολοκλήρωση στο διάστημα από 0 μέχρι x προκύπτει το ανάπτυγμα για την λογαριθμική συνάρτηση $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (ένας τρόπος για την άσκηση 2 σελ.132)

ΘΕΜΑ 1

1_α) [10 μονάδες]) Δώστε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor για την συνάρτηση $\frac{1}{1+x^2}$ γύρω από το 0 και στην συνέχεια έχοντας υπ΄όψιν τον τύπο (9.31) σελ. 149 και την ΠΡΟΤΑΣΗ 2, βρείτε το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της συνάρτησης $f(x) = \tan^{-1} x$ γύρω από το 0.

ΛΥΣΗ

Από την σειρά $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$ με αντικατάσταση του x με το -x^2 έχουμε $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $|x| < 1$.

Στην συνέχεια, έχοντας υπ΄όψιν τον τυπο $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} x$ (ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ), ολοκληρώνουμε την σειρά όρο προς όρο σύμφωνα με την ΠΡΟΤΑΣΗ 2, οπότε προκύπτει

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\int_0^x t^{2n} dt) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Στα επόμενα ερωτήματα να χρησιμοποιηθούν τα αναπτύγματα σε δυναμοσειρές των συναρτησεων $e^x, \sin x, \cos x$ (σελ. 127, 128) **1_β**) [5 μονάδες]) Δειξτε ότι $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ και στην συνέχεια ότι $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ και $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

ΛΥΣΗ

Εχοντας υπ΄όψιν ότι $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

έχουμε:

$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ =(διάσπαση σε άθροισμα αρτίων και περιττών τάξεων)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k (x)^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k (x)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i \sin x$$

Οι υπόλοιπες ισότητες προκύπτουν από το ότι

$e^{-ix} = \cos x + i \cdot \sin(-x) = \cos x - i \cdot \sin x$, οπότε :

$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ άρα $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ και $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \cdot \sin x$ άρα $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

1_γ) [15 μονάδες]) Να υπολογισθούν σε **μορφή σειράς** (προπαντός μην επιχειρήσετε να βρείτε τα αντίστοιχα αόριστα ολοκληρώματα με γνωστές μεθόδους) τα παρακάτω ολοκληρώματα και να γίνει εκτίμηση του σφάλματος όταν προσεγγισθούν με μερικά αθροίσματα μέχρι όρο τάξης k (σύμφωνα με την ΠΡΟΤΑΣΗ 1): $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

ΛΥΣΗ

Από την σειρά $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ που συγκλίνει για κάθε πραγματική τιμή του x με προφανή αντικατάσταση έχουμε :

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}.$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη στο διάστημα από 0 μεχρι 1 έχουμε λόγω της πρότασης 2:

$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left.\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right|_0^1$ και συνεπώς το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίδεται υπό μορφή σειράς ως εξής:

$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$. Τέλος για το σφάλμα της προσέγγισης με το μερικό άθροισμα ισχύει η ανισότητα:

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}dx - \sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\right| \le \frac{1}{(k+1)!(2(k+1)+1)}$$

Παρόμοια για το δεύτερο ολοκλήρωμα, ξεκινάμε από την δυναμοσειρά

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}x\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

άρα το ανάπτυγμα της συνάρτησης *sinx/x* δίνεται από την δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$

όπου για x=0 η συνάρτηση ορίζεται με την τιμή του ορίου όταν το $x \to 0$ (ίση προς 1).

Ολοκληρώνοντας στο διάστημα από 0 μέχρι 1 έχουμε λόγω της πρότασης 2:

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\left.\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}\right|_0^1 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}$$

με ανάλογη προσέγγιση του μερικού αθροίσματος όπως προηγουμένως.

ΘΕΜΑ 2

2_α) [10μονάδες] Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^p}, b > 2$ (με κατάλληλη αντικατάσταση).

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα $I(p,b) = \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

Με την αντικατάσταση u=lnx , du=dx/x, το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $\int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{du}{(u)^p}$,

Το οποίο για τιμές του p διάφορες του 1 ισούται προς

$\left.\frac{u^{1-p}}{1-p}\right|_{u=\ln 2}^{u=\ln b} = ((\ln b)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p})/(1-p)$ και για p=1 προς $\ln u\Big|_{u=\ln 2}^{u=\ln b} = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2)$.

2_β) [10 μονάδες] Να βρεθούν όλες οι τιμές του p για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ συγκλίνει (να ακολουθηθεί η διαδικασία όπως στην αρχή του παραδείγματος τής σελ.162).

ΛΥΣΗ

Στην περίπτωση όπου p είναι διάφορο του 1, το όριο όταν to b τείνει στο συν άπειρο ισούται προς

$\lim_{b\to+\infty}[((\ln b)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p})/(1-p)] = (\ln 2)^{1-p}/(p-1) + \lim_{b\to+\infty}(\ln b)^{1-p}/(1-p)$,

και επειδή $\lim_{b\to+\infty}(\ln b) = +\infty$, συνάγουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν p>1 στην τιμή $(\ln 2)^{1-p}/(p-1)$ και αποκλίνει για p<1.

Για p=1, $\lim_{b\to+\infty}[\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = +\infty$.

Αρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει για όλες τις τιμές p>1 και μόνο για αυτές.

2γ) [10 μονάδες] Με χρήση του κριτηρίου του ολοκληρώματος για την σύγκλιση σειρών (Θεώρημα σελ. 162) να εξετασθεί για ποιές τιμές του p η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ συγκλίνει .

ΛΥΣΗ

Για την σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$,παρατηρούμε ότι:

i) αν p είναι αρνητικός, τότε η σειρά αποκλίνει καθώς ο γενικός όρος δεν τείνει στο μηδέν.
ii)αν p είναι μηδέν, τότε η σειρά αποκλίνει (αρμονική σειρά).
Οπότε θεωρούμε τις περιπτώσεις για p>0.

Για αυτές τις περιπτώσεις θεωρούμε την συνάρτηση $\frac{1}{x(\ln x)^p}, x \geq 2$.

Η συνάρτηση αυτή είναι θετική και φθίνουσα (αφού η πρώτη παράγωγος είναι αρνητική) οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα (σελ 162) που συνδέει την σύγκλιση της δοσμένης σειράς με αυτή του ολοκληρώματος της 2β).

<u>Το συμπέρασμα είναι ότι η σειρά συγκλίνει μόνο για τις τιμές του p μεγαλύτερες του 1.</u>

ΘΕΜΑ 3

3_α) [5 μονάδες] Να υπολογισθεί (κάνοντας χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης) το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int e^{-ax}\sin(bx)dx$, όπου a, b σταθερές.

ΛΥΣΗ

$$I = \int e^{-ax}\sin(bx)dx = -\frac{1}{b}\int e^{-ax}\left(\cos(bx)\right)'dx = -\frac{e^{-ax}}{b}\cos(bx) - \frac{a}{b}\int e^{-ax}\cos(bx)dx =$$

$$-\frac{e^{-ax}}{b}\cos(bx) - \frac{a}{b^2}\int e^{-ax}(\sin(bx))'dx = -\frac{e^{-ax}}{b}\cos(bx) - \frac{a}{b^2}\left(e^{-ax}\sin(bx) + a\int e^{-ax}\sin(bx)dx\right)$$

$$I = -\frac{e^{-ax}}{b}\cos(bx) - \frac{a}{b^2}e^{-ax}\sin(bx) - \frac{a^2}{b^2}I$$

Λύνοντας ως προς Ι έχουμε:

$$I = \frac{-e^{-ax}}{a^2+b^2}\left(b\cos(bx) + a\sin(bx)\right) + C$$

3_β) [10 μονάδες] Να υπολογισθούν (κάνοντας επανειλημμένα χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης) τα ολοκληρώματα $\int x^2\cos(bx)dx$, $\int x^2\sin(bx)dx$, όπου b σταθερά.

ΛΥΣΗ

Αν b=0 τότε το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται προς $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$ και το δευτερο προς μία σταθερά. **Αν b είναι διάφορο του μηδενός** τότε εργαζόμαστε με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int x^2\cdot\cos(bx)\,dx=\int x^2\left(\frac{\sin(bx)}{b}\right)'dx=x^2\frac{\sin(bx)}{b}-\int 2x\frac{\sin(bx)}{b}dx=$$

$$\frac{x^2\sin(bx)}{b}-\frac{2}{b}\int x\sin(bx)\,dx=\frac{x^2\sin(bx)}{b}-\frac{2}{b}\int x\left(\frac{-\cos(bx)}{b}\right)'dx=$$

$$\frac{x^2\sin(bx)}{b}-\frac{2}{b}\left[x\frac{(-\cos(bx))}{b}-\int\left(\frac{-\cos(bx)}{b}\right)dx\right]=\frac{x^2\sin(bx)}{b}+\frac{2x\cos(bx)}{b^2}+\frac{2}{b}\int\frac{-\cos(bx)}{b}dx=$$

$$\frac{x^2\sin(bx)}{b}+\frac{2x\cos bx}{b^2}-\frac{2}{b^2}\int\cos(bx)\,dx=\frac{x^2\sin(bx)}{b}+\frac{2x\cos(bx)}{b^2}-\frac{2}{b^2}\frac{\sin(bx)}{b}+c$$

$$\int x^2\sin(bx)dx=\int x^2\left(\frac{-\cos(bx)}{b}\right)'dx=\frac{-x^2\cdot\cos(bx)}{b}-\int 2x\left(\frac{-\cos(bx)}{b}\right)dx=$$

$$\frac{-x^2\cdot\cos(bx)}{b}+\frac{2}{b}\int x\cos(bx)\,dx=\frac{-x^2\cdot\cos(bx)}{b}+\frac{2}{b}\int x\left(\frac{\sin(bx)}{b}\right)'dx=$$

$$\frac{-x^2\cos(bx)}{b}+\frac{2}{b}\left[\frac{x\sin(bx)}{b}-\int\frac{\sin(bx)}{b}dx\right]=\frac{-x^2\cos(bx)}{b}+\frac{2x\sin(bx)}{b^2}-\frac{2}{b^2}\int\sin(bx)\,dx=$$

$$\frac{-x^2\cos(bx)}{b}+\frac{2x\sin(bx)}{b^2}-\frac{2}{b^2}\left(\frac{-\cos(bx)}{b}\right)+c=\frac{-x^2\cos(bx)}{b}+\frac{2x\sin(bx)}{b^2}+\frac{2\cos(bx)}{b^3}+c$$

3_γ) [10 μονάδες] Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x)=x^2$**,** $0\le x<2\pi$**.** (Χρησιμοποιείστε τους τύπους 12.18-12.20 σελ. 190, για τους συντελεστές Fourier).
Ποιές είναι οι τιμές για $x=0$ και για $x=2\pi$ της σειράς Fourier;

ΛΥΣΗ

Η σειρα Fourier δίνεται από την παράσταση $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$

όπου οι συντελεστές υπολογίζονται με την βοήθεια και της 2β) ως εξής:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin\left(nx\right)}{n} + \frac{2x\cos\left(nx\right)}{n^2} - \frac{2}{n^2}\frac{\sin\left(nx\right)}{n}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4\pi\ \sin\left(2\pi n\right)}{n} + \frac{4\cos\left(2\pi n\right)}{n^2} - \frac{2}{n^2}\frac{\sin\left(2\pi n\right)}{\pi n} = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x\right)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nxdx =$$

$$= \left[\frac{-x^2\cos\left(nx\right)}{n} + \frac{2x\sin\left(nx\right)}{n^2} + \frac{2\cos\left(nx\right)}{n^3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{-(2\pi)^2\cos\left(2\pi n\right)}{n} + \frac{4\pi\sin\left(2\pi n\right)}{n^2} + \frac{2\cos\left(2\pi n\right)}{n^3} - \frac{2\cos\left(0\right)}{n^3} = \frac{-4\pi}{n}$$

Αρα η σειρά Fourier της f έχει ως εξής:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)$$

Σύμφωνα με την παράγραφο 12.4 του βιβλίου η σειρά Fourier της f για $x = 0$ και $x = 2\pi$

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(0) - \frac{4\pi}{n}\sin(0)\right) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

συγκλίνει στην τιμή $\left(f(0+) + f(0-)\right)/2 = \left(f(2\pi+) + f(2\pi-)\right)/2 = 2\pi^2$

Αρα $\dfrac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2} = 2\pi^2$ δηλαδη $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

ΘΕΜΑ 4

4_α) [5 μονάδες] Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$. Δείξτε ότι με απευθείας χρήση των κανόνων ολοκλήρωσης προκύπτει I = - 2. Αυτό όμως είναι λάθος (γιατί;). Χρησιμοποιώντας τη θεωρία της παρ. 10.1 του βιβλίου βρείτε το σωστό αποτέλεσμα.

ΛΥΣΗ

Προχωρώντας αφελώς στην αντικατάσταση $x - 1 = u$, $dx = du$ και την αντίστοιχη αλλαγή στα όρια ολοκλήρωσης για $x = 0, u = -1$ και για $x = 2, u = 1$, έχουμε

$$\int_0^2 \frac{1}{\left(x-1\right)^2}dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{u^2}du = \int_{-1}^{1}u^{-2}\cdot du = \left[\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right]_{-1}^{1} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \left(\frac{-1}{-1}\right) = -1 - 1 = -2,$$

πράγμα εντελώς παραδοξο για το ολοκλήρωμα μιάς θετικής συνάρτησης στο διάστημα από 0 μεχρι 2(!)

Όμως το $1 \in (0,2)$ είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης $\frac{1}{(x-1)^2}$ επειδή $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Οπότε ακολουθούμε τον ορισμό γενικευμένου ολοκληρώματος:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^{1-} \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int_{1+}^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{E_1\to 0+}\int_0^{1-E_1} \frac{1}{(x-1)^2}dx + \lim_{E_2\to 0+}\int_{1+E_2}^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$\lim_{E_1\to 0+}\left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_0^{1-E_1} + \lim_{E_2\to 0+}\left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_{1+E_2}^2 = \lim_{E_1\to 0+}\left(\frac{-1}{1-E_1-1} - \frac{-1}{-1}\right) + \lim_{E_2\to 0+}\left(\frac{-1}{1} + \frac{1}{1+E_2-1}\right) =$$

$$\lim_{E_1\to 0+}\frac{1}{E_1} - 1 - 1 + \lim_{E_2\to 0+}\frac{1}{E_2} = +\infty - 2 + \infty = +\infty$$

4_β) [10 μονάδες] Να υπολογισθεί ο όγκος του σχήματος που προκύπτει αν περιστρέψουμε τη συνάρτηση $y = xe^{-x}$ γύρω από τον άξονα των x από x= 0 ως $x = \infty$ (βλ. παρ. 11.2 του βιβλίου).

ΛΥΣΗ Σύμφωνα με τον τύπο (11.3) σελ. 176 ο ζητούμενος όγκος υπολογίζεται ως εξής: $V = \int_0^{+\infty} \pi(xe^{-x})^2 dx = \pi\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx$.Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x^2e^{-2x}dx$ υπολογίζεται εύκολα με διαδοχικές παραγοντικές ολοκληρώσεις $\int x^2e^{-2x}dx = -e^{-2x}(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2})$ + C

Οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx = -e^{-2x}(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2})\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-2x}(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}))$-(-$\frac{1}{4}$) $= \frac{1}{4}$ και ο ζητούμενος όγκος ισούται προς $\frac{\pi}{4}$.

ΤΕΛΟΣ