ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12), 2001 -02

ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤ΄

Τα κάτωθι προβλήματα προέρχονται από την ύλη και των 2 συγγραμμάτων της ΠΛΗ12 και είναι ενδεικτικά αυτών που πρέπει να γνωρίζετε για να αντιμετωπίσετε τα θέματα της Τελικής Εξέτασης. Η ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας είναι η 24η Ιουνίου 2002 (ΑΥΣΤΗΡΑ)

Η συνολική βαθμολογία της Εργασίας είναι 130 μονάδες, ενώ θα βαθμολογηθείτε με άριστα το 100. Επομένως, δεν είναι τόσο σημαντικό να παραδώσετε ΟΛΕΣ τις παρακάτω ασκήσεις λυμένες πλήρως, όσο είναι να μπορείτε να λύνετε παρόμοιες ασκήσεις στην Τελική Εξέταση.

1. (5 μον.) Έστω A ένας πραγματικός πίνακας 3×3 που ικανοποιεί την εξίσωση $A + A^T = I$, όπου I ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας και A^T ο ανάστροφος του A. Δείξτε ότι ο A είναι της μορφής A= 0.5 I +B, όπου B αντισυμμετρικός, και ότι στη γενική περίπτωση ο A έχει μια πραγματική και 2 μιγαδικές ιδιοτιμές.

ΛΥΣΗ 1

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

$$A + A^T = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} \\ a_{21}+a_{12} & 2a_{22} & a_{23}+a_{32} \\ a_{31}+a_{13} & a_{32}+a_{23} & 2a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Από την παραπάνω ισότητα απλές πράξεις δίνουν

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{2}$$
$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{για όλα τα } i \neq j.$$

Άρα $A = \frac{1}{2} I + B$ όπου $B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$.

Για να βρεθούν οι ιδιτιμές λύνουμε $\det(A - \lambda I) = 0$. Απλές πράξεις θα μας δώσουν $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ και $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{32}^2}$. Δηλαδή μία πραγματική και δύο μιγαδικές ιδιτιμές.

2. Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2 με πραγματικους συντελεστες που παράγεται από τα μονώνυμα 1, x και x^2.

(α) (10 μον.) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $<,>: V \times V \to R$ με

$$< f(x), g(x) >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον V.

(β) (5 μον.) Δείξτε επίσης ότι τα 1, x και x^2 δεν αποτελούν ορθογώνια βάση για τον V και χρησιμοποιείστε τα μαζί με το Θεώρημα 4.4, σελ. 78 του 1ου συγγράμματος για να βρείτε μια ορθοκανονική βάση για τον διανυσματικό χώρο V.

ΛΥΣΗ 2 α) Θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Δηλαδή:

I) $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \langle g(x), f(x) \rangle$

II) $\langle \kappa f(x) + \lambda g(x), h(x) \rangle = \int_0^1 (\kappa f(x) + \lambda g(x))h(x)dx = \kappa \int_0^1 f(x)h(x)dx + \lambda \int_0^1 g(x)h(x)dx =$
$\kappa \langle f(x), h(x) \rangle + \lambda \langle g(x), h(x) \rangle$

III) $\langle f(x), f(x) \rangle = \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0$

IV) $\langle f(x), f(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

2β) Είναι προφανές ότι τα $1, x, x^2$ δεν αποτελούν ορθοκανονική βάση για τον V αφού $\langle f(x), g(x) \rangle \neq 0$.

Χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα 4.4 του βιβλίου και κάνοντας απλές πράξεις βρίσκουμε την ορθογώνια βάση $\{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$ και στην συνεχεια κανονικοποιούμε.

3. (5 μον.) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

ΛΥΣΗ 3 **.** Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ λύνουμε

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Απλές πράξεις θα μας δώσουν το πολυώνυμο $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54 = 0$.
Λύνοντας το παραπάνω πολυώνυμο θα βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A.
Αυτές είναι : $\lambda_1 = 6$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Λύνοντας τώρα το $(A - \lambda I)\underline{x} = 0$ μπορούμε να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα για κάθε λ αντίστοιχα. Απλές γραμμοπράξεις θα μα δώσούν :

i) Για $\lambda_1 = 6$, $x_1 = x_2 + 2x_3$ και $x_2 = -x_3$. Άρα $v_1 = [1 \quad -1 \quad 1]^T$
ii) Για $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Άρα $v_2 = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ και $v_3 = [1 \quad 0 \quad -1]^T$ αντίστοιχα.

4. (10 μον.) Να αποδείξετε ότι τα σύνολα

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$$
$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_1 = x_4, x_2 = x_3\}$$

είναι διανυσματικοί υπόχωροι του R^4 και να βρεθεί η διάσταση και μια βάση για κάθε ένα από τους υπόχωρους $V, W, V \cap W$, και $V + W$.

ΛΥΣΗ 4 Για τον V γνωρίζουμε ότι $x_1 = x_2 - x_4$. Άρα

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_4, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_2, 0, 0) + (0, 0, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4)$$

Επομένως $V = span\{V_1, V_2, V_3\}$. Όπου $V_1 = (1,1,0,0)$, $V_2 = (0,0,1,0)$, και $V_3(-1,0,0,1)$.
V_1, V_2, V_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση για τον V. $\dim V = 3$.

Για τον W γνωρίζουμε ότι $x_1 = x_4$ και $x_2 = x_3$. Άρα
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_2, x_4) = (x_1, 0, 0, x_1) + (0, x_2, x_2, 0)$

Επομένως $W = span\{W_1, W_2\}$. Όπου $W_1 = (1,0,0,1)$ και $W_2(0,1,1,0)$. Τα W_1, W_2 αποτελούν βάση του W. $\dim W = 2$.

$V \cap W = \{(x\ ,2x,2x,x), x \in R\}$, Αφού $x_1 - x_2 + x_4 = 0$, $x_1 = x_4$ και $x_2 = x_3$. Άρα το $(1,2,2,1)$ είναι βάση του W. $\dim(V \cap W) = 1$

$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4$

5. Θεωρείστε το παρακάτω σύστημα:.

$$\begin{array}{ccccccc} 6x & - & 12y & + & 6z & = & 6 \\ 3x & - & 5y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & - & 6y & + & \alpha z & = & \beta \end{array}.$$

(α) (10 μον.) Θέσατε α = 0 και β = - 10 και λύστε το σύστημα αυτό **με 2 διαφορετικούς τρόπους.**
(β) (5 μον.) Βρείτε τιμές των α και β ώστε το σύστημα αυτό: (ι) Να μην έχει καμία λύση και (ιι) να έχει άπειρες λύσεις.

ΛΥΣΗ 5 **α)** Το σύστημα έχει την μορφή $A.\underline{x} = \underline{b}$

Τρόπος i) : <u>Απαλοιφή Gauss</u>

$$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & | & 6 \\ 3 & -5 & 5 & | & 13 \\ 2 & -6 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{array}{r} \\ \Gamma_2' = \Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_1 \\ \Gamma_3' = \Gamma_3 - \frac{1}{3}\Gamma_1 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & -2 & \alpha - 2 & | & \beta - 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \Gamma_3' = \Gamma_3 + 2\Gamma_2 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & 0 & \alpha + 2 & | & \beta + 18 \end{bmatrix}.$$

Εάν αντικαταστήσουμε για α = 0 και για β = -10 τότε $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 4$.

Τρόπος ii) : <u>Διάσπαση *L-U*</u>

Ο πίνακας $U = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ και ο πίνακας $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Λύνοντας το $L.\underline{z} = \underline{b}$ θα πάρουμε $z_1 = 6$, $z_2 = 10$ και $z_3 = 8$.Στην συνέχεια λύνοντας το $U.\underline{x} = \underline{z}$ θα πάρουνε τις τιμές του $\underline{x}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 4$.

5β) i) Για α = -2 και $\beta \neq -18$ το σύστημα δεν θα έχει καμία λύση.
ii) Για α = -2 **και** για β = -18 το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις.

6. (6 μον.) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ β) $y = e^{\sin(x^3)}$ γ) $y = \tan(\log(1 + x^2))$

ΛΥΣΗ 6 α) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

β) $y = e^{\sin(x^3)}$

$y' = 3x^2 \cos(x^3) e^{\sin(x^3)}$

γ) $y = \tan(\log(1 + x^2))$

Πρώτα θα πρέπει να αλλάξουμε την βάση. Δηλαδή: $\log(1 + x^2) = \dfrac{\ln(1 + x^2)}{\ln 10}$

$$y' = \frac{2x \sec^2(\log(1 + x^2))}{(1 + x^2)\ln 10}$$

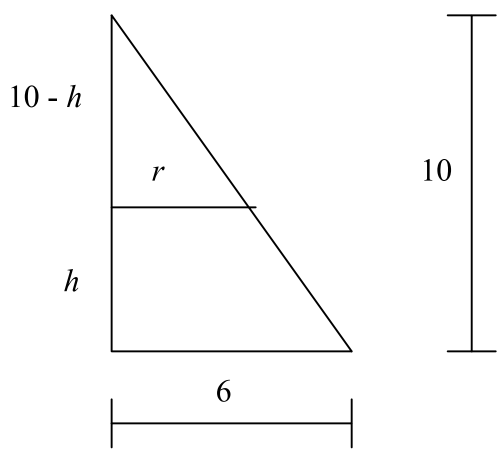
7. (α) (6 μον.) Έστω ένας ορθός κυκλικός κώνος ύψους 10 μέτρων και ακτίνας 6 μέτρων. Να βρεθεί η ακτίνα και το ύψος ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου εγγεγραμμένου στο εσωτερικό του κώνου, έτσι ώστε ο κύλινδρος αυτός να έχει μέγιστο όγκο.

(β) (6 μον.) Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης $y = 1 - x^2$, που βρίσκονται σε ελάχιστη απόσταση από το σημείο (0,0) του επιπέδου x,y. Ποιά είναι η σχετική ιδιότητα του σημείου (0,1);

ΛΥΣΗ 7 α) Έστω ***r*** η ακτίνα του κυλίνδρου, ***h*** το ύψος του κυλίνδρου και ***V*** ο όγκος του. Ο όγκος ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο :

$$V = \pi r^2 h . \qquad (1)$$

Τώρα



Από τα παραπάνω όμοια τρίγωνα έχουμε

$g'(x)$	-	+	-	+

$$\frac{10-h}{r}=\frac{10}{6} \quad \text{ή}$$

$$h=10-\frac{5}{3}r$$

Αντικαθιστώντας για h στην (1) έχουμε

$$V=\pi r^2\left(10-\tfrac{5}{3}r\right)=10\pi r^2-\frac{5}{3}\pi r^3 .$$

Η ακτίνα του κυλίνδρου δεν μπορεί να είναι αρνητική και θα πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα $0 \le r \le 6$. Άρα έχουμε μία συνεχή συνάρτηση ως προς r στο [0 , 6] την οποία μπορούμε να παραγωγίσουμε.

$$\frac{dV}{dr}=20\pi r-5\pi r^2=5\pi r(4-r)=0 . \ \mathrm{r}=0 ,\ \ \mathrm{r}=4.$$

Ο μέγιστος όγκος δίνεται στο παρακάτω πίνακα

r	0	4	6
V	0	$\frac{160}{3}\pi$	0

Άρα $\mathrm{r}=4\mathrm{m}$ και $h=\frac{10}{3}\mathrm{m}$.

7**β)** Έστω $M(x, f(x))$ σημείο της καμπύλης $y=1-x^2$. Η απόσταση MO είναι

$$\sqrt{x^2+(1-x)^2}=\sqrt{x^4-x^2+1}=g(x)$$

$$g'(x)=\frac{4x^3-2x}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=0 . \text{ Άρα } 2x(2x^2-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ και } x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

$$-1/\sqrt{2} \qquad 0 \qquad 1/\sqrt{2}$$

Τα ζητούμενα σημεία είναι $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$

Το σημείο (0,1) είναι η κορυφή της παραβολής όπου η απόσταση εχει τοπικό μεγιστο.

8. (12 μον.) Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

(α) $\int x^n \ln x dx$, $\int \cos^n x \ \sin x \ dx$, για n θετικό ακέραιο

(β) $\int \cos^3 x \ dx$, $\int \cos^2 x \ \tan x \ dx$

(γ) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (με κατάλληλη αλλαγή από x σε νέα μεταβλητή u)

ΛΥΣΗ8 α) i) $\int x^n \ln x dx =$ Έστω $u = \ln x$ $\frac{dv}{dx} = x^n$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + K$$

ii) $\int \cos^n x \sin x dx =$ Έστω $u = \cos x$ $\frac{du}{dx} = -\sin x$

$$= \int -u^n \sin x \frac{du}{\sin x} = -\frac{u^{n+1}}{n+1} + K = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + K$$

β) i) $\int \cos^3 x dx = \int \cos x \cos^2 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx =$

$$= \int \cos x dx - \int \cos x \sin^2 x dx =$$

$= \sin x - \int \cos x \sin^2 x dx$ Έστω $u = \sin x$ $\frac{du}{dx} = \cos x$

$$= \sin x - \int u^2 du = \sin x - \frac{u^3}{3} + K = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + K$$

ii) $\int \cos^2 x \tan x dx = \int \cos^2 x \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \cos x \sin x dx$

Έστω $u = \sin x$ $\frac{du}{dx} = \cos x$

$$\int u du = \frac{u^2}{2} + K = \frac{\sin^2 x}{2} + K$$

γ) i) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} =$ Έστω $u = x + 1$ $x = u - 1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$$= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int u^{1/2} - u^{-1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} - 2u^{1/2} + K =$$

$$\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + K$$

ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}du$ Έστω $x = \sin u$ $\frac{dx}{du} = \cos u$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u du = \int du = u + K = \sin^{-1} u + K$$

9. (8 μον.) Να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in R$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2b\sqrt{x+3} + 6 & x < 1 \\ x^2 + (a+b)x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο x = 1.

ΛΥΣΗ 9 Η συνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής. Δηλαδή:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) + \lim_{x\leftarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax^2 + 2b\sqrt{x+3} + 6) = a + 4b + 6$$

$$\lim_{x\leftarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\leftarrow 1^+}(x^2 + (a+b)\_\, x - 1) = a + b$$

Από τις δύο αυτές ισότητες προκύπτει ότι $b = -2$.

Για να είναι παραγωγίσιμη

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{ax^2 + 2b\sqrt{x+3} + 6 - a - b}{x-1} = 2a + \frac{b}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + ax + bx - 1 - a - b}{x-1} = 2 + a + b$$

Από τις δύο αυτές ισότητες προκύπτει ότι $a = 1$

10. (12 μον.) Να υπολογισθούν τα όρια

α) $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\mu\varepsilon$ $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ και να αναπτυχθεί η f(x) σε σειρά Taylor γύρω απο το x = 0.

β) $\lim_{x\to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x-1}$ γ) $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2})$

ΛΥΣΗ 10) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

Τώρα για την ανάπτυξη κατά Taylor χρησιμοποιούμε την σειρά Taylor της εκθετικής

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, οπότε $e^x-1-x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$ και διαιρώντας έχουμε

$$\frac{e^x-1-x}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$$

β) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

γ) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x}=\frac{1}{6}$$

11. (15 μον.) Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$y=2x-x^3,\qquad y=x^2$$

οι οποίες προφανώς τέμνονται στο σημείο (0,0) του επιπέδου (x,y). Να βρεθούν και τα άλλα σημεία στα οποία τέμνονται και να υπολογιστούν τα εμβαδά των περιοχών που περικλείονται από τις συναρτήσεις, και τα σημεία τομής τους. Σε ποιό από τα σημεία αυτά είναι οι εφαπτόμενες ευθείες των συναρτήσεων κάθετες μεταξύ τους;

ΛΥΣΗ11

$x^2=2x-x^3\Rightarrow x^3+x^2-2x=0\Rightarrow x(x+2)(x+1)=0$.

Άρα $x=0$, $x=-2$ και $x=1$. Τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων είναι $A(0,0)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(1,1)$.

Το ένα εμβαδόν είναι :

$$\int_{-2}^{0}(x^2-(2x-x^3))dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0}=\frac{8}{3}$$

και το δεύτερο εμβαδόν είναι

$$\int_{0}^{1}(2x-x^3-x^2)dx=\left[x^2-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{5}{12}$$

Σε κανένα σημείο τομής οι εφαπτόμενες ευθείες των συναρτήσεων δεν είναι κάθετες μεταξύ τους αφού $f'(x).g'(x) \neq -1$ για $x = 0$, 1 , -2.

12. (α) (10 μον.) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

με f(0) = 0, σε σειρά Fourier στο διάστημα [-π , π] .

(β) (5 μον.) Να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Πόσους όρους πρέπει να κρατήσετε στο άθροισμα αυτό για να επιτύχετε ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων; (βλ. σχετικό θέμα στην Εργασία 5).

ΛΥΣΗ 12 Η συνάρτηση είναι περιττή άρα θέλουμε μόνο το b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^{n+1}\right) = \frac{4}{(n+1)\pi}$$

Άρα $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}.\sin(2n+1)x$. Για π/2 $f(x)$=1. Άρα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}.\frac{\sin(2n+1)\pi}{2} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Τώρα $a_n = \frac{1}{2n+1}$. Για να πετύχουμε ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει

$a_{n+1} < 10^{-2}$. Άρα

$$a_{n+1} = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 49 .$$