ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

1. (10 μον.) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου κ έτσι ώστε το σύστημα

$$x + y + \kappa z = \kappa^2$$
$$x + \kappa y + z = \kappa$$
$$\kappa x + y + z = 1$$

(α) Να έχει άπειρες λύσεις οι οποίες και να βρεθούν

(β) Να μην έχει καμία λύση

ΛΥΣΗ

Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \kappa & \kappa^2 \\ 1 & \kappa & 1 & \kappa \\ \kappa & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \kappa\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \kappa & \kappa^2 \\ 0 & \kappa-1 & 1-\kappa & \kappa-\kappa^2 \\ 0 & 1-\kappa & 1-\kappa^2 & 1-\kappa^3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \kappa & \kappa^2 \\ 0 & \kappa-1 & 1-\kappa & \kappa-\kappa^2 \\ 0 & 0 & 2-\kappa-\kappa^2 & 1+\kappa-\kappa^2-\kappa^3 \end{bmatrix}$$

Από την τελευταία γραμμή παίρνουμε $(2-\kappa-\kappa^2)z = 1+\kappa-\kappa^2-\kappa^3$. *Ο συντελεστής* $2-\kappa-\kappa^2$ *του z γίνεται* $2-\kappa-\kappa^2 = (1-\kappa)(\kappa+2)$ *με ρίζες 1 και –2.*

Αν κ=1 τότε το σύστημα γίνεται ισοδύναμο με την εξίσωση $x+y+z=1 \Leftrightarrow x = 1-y-z$. *Οι τριάδες* (x,y,z) *που το επαληθεύουν είναι της μορφής* $(1-y-z, y, z) = (1,0,0) + y(-1,1,0) + z(-1,0,1), \quad y,z \in \boldsymbol{R}$.

Αν κ=–2 τότε η τελευταία εξίσωση δίνει $0 = 3$ *και το σύστημα είναι αδύνατο.*

2. Χωρίς να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, εξηγείστε γιατί ο κάτωθι πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) (7 μον.) έχει ιδιοτιμή $\lambda = 0$ και βρείτε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

(β) (1 μον.) διαγωνοποιείται.

ΛΥΣΗ

(α) Έχει ιδιοτιμή το μηδέν ***γιατί η ορίζουσά του είναι μηδέν*** *(αυτό το βρίσκουμε απλά προσθέτοντας την πρώτη γραμμή στη δεύτερη, οπότε η δεύτερη γραμμή γίνεται μηδενική).*

Τα ιδιοδιανύσματα τα βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y-z$.

Άρα $(x,y,z)=(y-z,y,z)=y(1,1,0)+z(-1,0,1)$ *με y, z όχι και τα δύο μηδέν.*

(β) Διαγωνοποιείται ***γιατί είναι συμμετρικός***.

3. (10 μον.) Θεωρείστε τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Βρείτε τον πίνακα P που διαγωνιοποιεί τον A μέσω της σχέσης $P^{-1}AP=\Delta$ (Δ είναι διαγώνιος πίνακας).

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\phi_{\mathrm{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -5 & \lambda+3 \end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda-3-5=$

$=\lambda^2+2\lambda-8=\lambda^2-2\lambda+4\lambda-8=\lambda(\lambda-2)+4(\lambda-2)=(\lambda-2)(\lambda+4)$ *με ιδιοτιμές 2 και –4.*

Προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

Για την ιδιοτιμή 2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2x \\ 5x-3y=2y \end{cases} \Leftrightarrow x=y$. *Άρα* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad x\neq 0$.

Για την ιδιοτιμή –4: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4x \\ -4y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-4x \\ 5x-3y=-4y \end{cases} \Leftrightarrow y=-5x$. *Άρα* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix},\quad x\neq 0$.

Επομένως $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ *και συνεπώς* $P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

Επαλήθευση: $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

4. (12 μον.) Θεωρούμε τους υπόχωρους

$U = \{(x_1,...,x_4) \in R^4 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$, $V = \{(x_1,...,x_4) \in R^4 \,|\, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$

i. Να βρεθούν οι διαστάσεις των υποχώρων U και V.

ii. Να βρεθούν οι διαστάσεις των υποχώρων $U \cap V$ και $U + V$.

iii. Εξετάστε αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : R^4 \to R^4$ με $\ker f = U$ και $f(R^4) = V$. (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το i.)

ΛΥΣΗ

(i) Για τον U: $x_1 = x_2 + x_3$. *Άρα* $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_2, x_3, x_4) = x_2(1,1,0,0) +$ $+ x_3(1,0,1,0) + x_4(0,0,0,1), \quad x_2, x_3, x_4 \in \boldsymbol{R}$. *Παίρνουμε τον πίνακα* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *με* *γραμμές τα* $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ *και* $(0,0,0,1)$. *Ο* 3×3 *υποπίνακας* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *έχει* *ορίζουσα* $1 \neq 0$, *άρα τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συνεπώς αποτελούν βάση του U. Επομένως dimU=3.*

Για τον V: $x_1 = x_3 + x_4$. *Άρα* $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(0,1,0,0) +$ $+ x_3(1,0,1,0) + x_4(1,0,0,1), \quad x_2, x_3, x_4 \in \boldsymbol{R}$. *Παίρνουμε τον πίνακα* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *με* *γραμμές τα* $(0,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ *και* $(1,0,0,1)$. *Ο* 3×3 *υποπίνακας* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *έχει* *ορίζουσα* $1 \neq 0$, *άρα τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συνεπώς αποτελούν βάση του U. Επομένως dimV=3.*

(ii) Για τον $U \cap V$ *:* $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_1 = x_3 + x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$.

Άρα $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4, x_4, x_3, x_4) = x_3(1,0,1,0) + x_4(1,0,0,1)$ *με* $x_3, x_4 \in \boldsymbol{R}$.

Παίρνουμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *με γραμμές τα* $(1,0,1,0)$ *και* $(1,0,0,1)$. *Ο* 2×2 *υποπίνακας* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *έχει ορίζουσα* $1 \neq 0$, *άρα τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συνεπώς αποτελούν βάση του* $U \cap V$. *Επομένως* *dim*$U \cap V$ *=2.*

dim$(U + V)$ *= dimU+ dimV- dim*$(U \cap V)$ *=3+3-2=4.*

(iii) 4=dim$\boldsymbol{R}^4$*=dimKerf+dimf(*$\boldsymbol{R}^4$*)=dimU+dimV=3+3=6, άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια απεικόνιση.*

5. (α) (4 μον.) Δίνοντας τον ορισμό κατά τον οποίο, για δύο συναρτήσεις f, g με $\lim\limits_{x \to +\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} g = +\infty$, η f «απειρίζεται πολύ ταχύτερα» από την g αν $\lim\limits_{x \to +\infty} (g/f) = 0$, να βρεθεί ποιά συνάρτηση «απειρίζεται ταχύτερα» από την άλλη αν $f(x) = x^{3/2}, \quad g(x) = x \ln x$.

(β) (8 μον.) Να εξετασθούν οι κάτωθι σειρές ως προς τη σύγκλισή τους:

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \qquad (ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

(α) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^{3/2}}{x\ln x} = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$ *και* $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. *Έχουμε* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} =$

$\underset{De\ l'\ Hospital}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ *και* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} =$

$\underset{De\ l'\ Hospital}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$. *Άρα* η f *«απειρίζεται πολύ ταχύτερα» από την* g.

(β) (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} = \zeta(3/2)$ *που συγκλίνει γιατί p=3/2>1. Από το κριτήριο σύγκρισης συμπεραίνουμε ότι η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ *συγκλίνει.*

(ii) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{2^n}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n+2} = 0 < 1$. *Άρα η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ *συγκλίνει.*

6. (α) (7 μον.) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης $y = x^2 - e^{x\ln 2}$ στο σημείο (2,0).

(β) (7 μον.) Έστω ότι για μία συνάρτηση $y = f(x)$ δίνεται ότι:

$$f(1)=1\ ,\quad f'(1)=\frac{1}{2}\ ,\quad f''(1)=\frac{1}{2}\ ,\quad f'''(1)=\frac{3}{4},\ .....,\ f^{(n)}(1)=\frac{n!}{2^n}\ .$$

Να γραφεί η σειρά Taylor της συνάρτησης αυτής γύρω από το x = 1. Για ποιές τιμές του x συγκλίνει αυτή η σειρά; Ποιά είναι η τιμή της $f(0)$;

<u>ΛΥΣΗ</u>

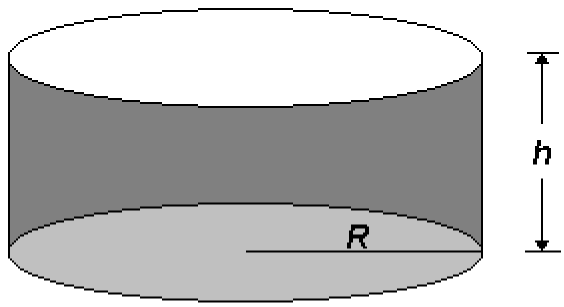
(α) $y' = (x^2 - 2^x)' = 2x - 2^x\ln 2$. *Άρα* $y'(2) = 4 - 4\ln 2 = 4(1-\ln 2)$. *Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι* $y = y'(2)(x-2) + y(2) \Leftrightarrow y = 4(1-\ln 2)(x-2)$.

(β) $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = \dfrac{1}{2^n}$. *Άρα η σειρά Taylor γύρω από το x=1 είναι* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$. *Η ακτίνα σύγκλισης είναι* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2$. *Η σειρά συγκλίνει για* $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Εφόσον $0 \in (-1, 3)$*, η σειρά συγκλίνει για x=0 στο* $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$*, που είναι μια γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο ίσο με το μηδέν και λόγο* $-\frac{1}{2}$*. Άρα* $f(0) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

7. (8 μον.) Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα (ανοικτό επάνω) ορθό κυλινδρικό δοχείο που να χωράει *π* λίτρα (1000*π* κυβ. εκ.) υγρού, όπου *π=3,14159…*. Ποιά πρέπει να είναι η ακτίνα R και το ύψος h του δοχείου ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το εμβαδόν του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του; *(Όγκος κυλίνδρου* $\pi h R^2$*, εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας* $2\pi Rh$*, εμβαδόν βάσης* πR^2 *).*

<u>ΛΥΣΗ</u>



Ο όγκος V του κυλίνδρου είναι $V = \pi h R^2 \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{1000\pi}{\pi R^2} = \frac{1000}{R^2}$.

Το εμβαδόν της επιφάνειας του δοχείου είναι E(R)=Εμβ. Παρ. Επιφ. +Εμβ. Βάσης= $2\pi Rh+\pi R^2 = \frac{2\pi R \cdot 1000}{R^2} + \pi R^2 = \pi(\frac{2000}{R} + R^2)$.

$E'(R) = \pi(-\frac{2000}{R^2} + 2R) = 2\pi \cdot \frac{R^3 - 1000}{R^2}$.

Επομένως: E'(R)<0 για 0<R<10,
E'(R)=0 για R=10 και
E'(R)>0 για R>10.

Η E(R) είναι λοιπόν γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 10]$*, γνησίως αύξουσα στο διάστημα* $[10, +\infty)$ *και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο R=10.*

Άρα R=10cm και $h = \frac{1000}{10^2} cm = 10cm$.

8. (6 μον.) Να βρεθεί η τιμή της σταθερής *a* ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής.

$$f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \cos(x), & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}.$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$a = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} \cos x = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

9. (α) (6 μον.) Να υπολογισθεί **ένα** από τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad dx \quad , \int \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx$$

(μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αντικατάσταση)

(β) (8 μον.) να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \left[\ln(x)\right]^2 dx$

(μπορείτε να χρησιμοποιήσετε παραγοντική ολοκλήρωση)

<u>ΛΥΣΗ</u>

(α) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} \underset{u=\sin x}{=} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\sin x} + c$,

$\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{d(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6} \underset{u=x^2-5x+6}{=} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|x^2-5x+6| + c$.

(β)

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = \int_1^2 (x)'(\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^2 - \int_1^2 x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = [2(\ln 2)^2 - (\underbrace{\ln 1}_{=0})^2] -$$

$$-2\int_1^2 \ln x dx = 2(\ln 2)^2 - 2\int_1^2 (x)' \ln x dx = 2(\ln 2)^2 - 2[[x\ln x]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x} dx] =$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 2\int_1^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 2$$

10. (6 μον.) Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης $y = x(x-1)(x-2)$ και του άξονα των x από x = 0 μέχρι x = 2. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx$ και δικαιολογήστε την ύπαρξη ή μη της διαφοράς.

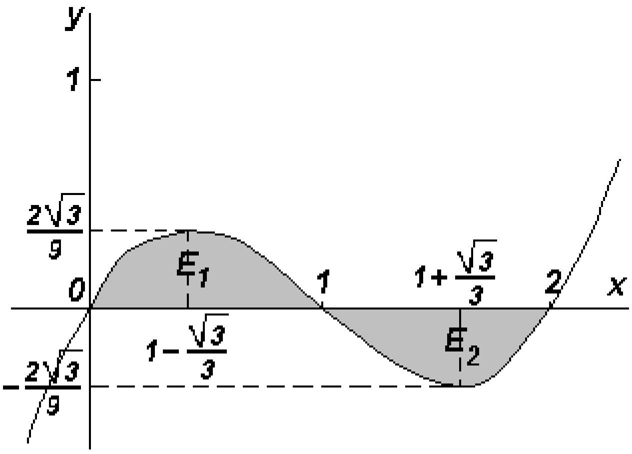
<u>ΛΥΣΗ</u>

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x(x-1)(x-2)$ τέμνει τον άξονα των x στα σημεία (0, 0), (1, 0) και (2, 0).

Από το παρακάτω πινακάκι βρίσκουμε το πρόσημο της f(x) στα διαστήματα (0, 1) και (1, 2).

	0 1	1 2
x	+	+
x-1	–	+
x-2	–	–
f(x)	+ 0	–

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) είναι η ακόλουθη:



Επομένως: $$E_1 = \int_0^1 x(x-1)(x-2)dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \frac{1}{4} - \frac{3}{3} + \frac{2}{2} = \frac{1}{4},$$

$$E_2 = \int_1^2 (-x(x-1)(x-2))dx = \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx = -\frac{8-1}{4} + 3\cdot\frac{4-1}{3} - 2\cdot\frac{2-1}{2} =$$

$$= -\frac{7}{4} + 3 - 1 = \frac{1}{4}$$

Συνεπώς το συνολικό εμβαδόν είναι $E_1 + E_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \frac{8}{4} - 3\cdot\frac{4}{3} + 2\cdot\frac{2}{2} = 0$.

Η διαφορά οφείλεται στο ότι $E_2 = -\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx = \frac{1}{4}$ *(γιατί f(x)<0 στο διάστημα (1, 2)) και επομένως*

$$\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx = \int_0^1 x(x-1)(x-2)dx + \int_1^2 x(x-1)(x-2)dx = E_1 \underset{\text{μείον}}{-} E_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

και όχι $E_1 + E_2$ *(που είναι το συνολικό εμβαδόν).*