ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ : ΠΛΗ12 «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι»

Επαναληπτική Τελική Εξέταση 16 Ιουλίου 2003

Απαντήστε όλα τα κάτωθι ερωτήματα, παρέχοντας επεξηγηματικά σχόλια όπου χρειάζεται.

1. (16 μον.) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}$.

(α) (10 μον.) Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
(β) (3 μον.) Είναι δυνατή η διαγωνοποίηση του πίνακα A; Γιατί;
Εάν ο πίνακας διαγωνοποιείται, να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
(γ) (3 μον.) Να υπολογιστει ο A^n όπου n φυσικός αριθμός.

Λύση. (α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Α είναι:

$$\delta_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-4&-2\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&-\lambda\\0&\lambda&-2\lambda\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-6).$$

Επομένως, ιδιοτιμές του Α είναι οι: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=6$. Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

Για την διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1=0$ το σύστημα είναι:

$$(0\cdot I-A)\cdot\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}x_1=-2x_2-x_3\\x_2\in\mathbb{R}\\x_3\in\mathbb{R}\end{matrix}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$. Αρα μια βαση ιδιοδιανυσματων του ιδιοχωρου για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0$ είναι :

$\vec{u_1}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\vec{u_2}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.Παρόμοια για την ιδιοτιμή $\lambda_3=6$: $\vec{u_3}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$.

(β) Ο πίνακας Α διαγωνοποιείται αφού είναι συμμετρικός (η΄αφου εχει μια βαση από ιδιοδιανυσματα). Η διαγωνοποίηση αυτή πραγματοποιείται αν κανείς χρησιμοποιήσει τον πίνακα που έχει ως στήλες τα τρία (γραμμικώς ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του Α που υπολογίσαμε στο υποερώτημα (α): $P=\begin{bmatrix}-2&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{bmatrix}$.

Βρίσκουμε ότι $P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-2 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, οπότε $P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{bmatrix}=D$.

(γ) $A^n=P^{-1}D^nP=$ ….

2. **(12 μον.) Δίνεται το σύστημα** $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1\\ x_1 & + & 2x_2 & + & \mu x_3 & = & 2\\ 2x_1 & + & \mu x_2 & + & 2x_3 & = & 3\end{array}$

Να βρεθούν οι τιμές του *μ* για τις οποίες το παραπάνω σύστημα έχει: (i) μοναδική λύση, (ii) άπειρες λύσεις, (iii) καμία λύση και να βρεθούν οι λύσεις όποτε υπάρχουν.

Λύση. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος στον οποίο εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\1&2&\mu&2\\2&\mu&2&3\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&\mu+1&1\\0&\mu-2&4&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-(\mu-2)\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&\mu+1&1\\0&0&-\mu^2+\mu+6&3-\mu\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&\mu+1&1\\0&0&(2+\mu)(3-\mu)&3-\mu\end{array}\right]$$

Επομένως, το σύστημα έχει :

- Μοναδική λύση όταν $\mu\neq-2$ *και* $\mu\neq3$ την $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1/(2+\mu)\\1/(2+\mu)\end{bmatrix}$
- Άπειρες λύσεις όταν $\mu=3$ τις $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $x_3\in\mathbb{R}$
- Καμία λύση όταν $\mu=-2$.

3. **(12 μον.) Δίνεται η παρακάτω απεικόνιση :**

f: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$, $\quad f\left([x_1\ x_2]^T\right)=[x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_1+x_2]^T$

α) Να δείξετε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι γραμμική και να βρεθεί ο πίνακάς της ως προς τις συνήθεις βάσεις των χώρων $\mathbf{R}^2$,$\mathbf{R}^3$.
β) Να βρεθεί ο πυρήνας της παραπάνω απεικόνισης και η διάσταση του. Είναι η συνάρτηση *f* ένα προς ένα ;
γ) Να βρεθεί η διάσταση και μία βάση της εικόνας $f(\mathbf{R}^2)$.

Λύση.

(α) Είναι f(X)=AX όπου A=$\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\2&1\end{bmatrix}$ και εύκολα αποδεικνύεται η γραμμικότητα.

O A είναι και ο ζητούμενος πίνακας ως προς τις συνήθεις βασεις.

(β) Ο πυρήνας είναι ο τετριμμενος υπόχωρος $\{[0,0]^T\}$ διάστασης 0, καθώς η μοναδική λυση του ομογενους συστηματος AX=0 είναι η $[0,0]^T$. Αρα η f είναι ένα προς ένα.

(γ) Είναι γνωστό οτι: $\dim R^2 = \dim(f(R^2)) + \dim(Ker f)$. Επομένως $2 = \dim(f(R^2)) + 0$.

Δηλαδή $\dim(f(R^2)) = 2$.

Μια βαση της εικόνας είναι το συνολο $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ των δυο στηλών του A.

4. (12 μον.)

(α) (6 μον.)Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις κάτωθι σειρές αιτιολογώντας την απάντησή σας:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ **(δηλαδη να βρεθει το διαστημα συγκλισης για το x)**

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n^2+1}$ **iii)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n}{7^n}$

(β) (6 μον.) Να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ **ii)** $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$ **iii)** $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+2} - 2x)$

Λύση.

(α) Είναι γεωμετρική σειρά με λόγο x/2. Συγκλίνει μόνο εφ'οσον -1<x/2<1, δηλαδη -2<x<2.

ii) Επειτα από συγκριση με την p-σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ που συγκλινει, η σειρά συγκλίνει.

iii) Εφαρμοζοντας κριτηριο λόγου (ή το κριτήριο ρίζας) προκύπτει η σύγκλιση της σειράς.

(β)

i) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x \underset{\substack{\text{σε μορφη} \\ \infty/\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \underset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \underset{\text{απλοποιηση}}{=} \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$.

παρόμοια,

ii) $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$

iii) πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+2} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+2} - 2x)\cdot(\sqrt{4x^2+2} + 2x)}{(\sqrt{4x^2+2} + 2x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(4x^2+2-4x^2)}{(\sqrt{4x^2+2} + 2x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x(\sqrt{2+\frac{2}{x^2}} + 2)} = 0.$$

5. **(4 μον.) Δίνεται η συνάρτηση** $f\left(x\right)=\begin{cases} e^{x} & x\le 0 \\ x^{2}+x+a & x>0 \end{cases}$

Για ποιά τιμή του ***a*****,είναι η** ***f*** **συνεχής στο x =0; Είναι για αυτή την τιμή του α και παραγωγίσιμη στο x =0; Εξηγείστε την απάντησή σας.**

Λύση. Θα πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}(e^x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+x+a)=1\Leftrightarrow 1=0+0+a\Leftrightarrow a=1.$$

Εξετάζουμε την ισότητα των πλευρικών παραγώγων της *f* στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2+x+1)-1}{x}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x}\Leftrightarrow 1=\lim_{x\to 0^+}(x+1)$, που ισχύει. Αρα η *f* είναι και παραγωγίσιμη στο 0.

6. (12 μον.) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$**,** **ii)** $\int_3^{b}\frac{dx}{(2-x)^3}, b>3$**,** **iii)** $\int_0^{1}\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

Λύση.

(i) $\int_0^{\pi} x\cos xdx=\int_0^{\pi} x(\sin x)'dx=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=0+\cos x\Big|_0^{\pi}=-2$

(ii) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $y=2-x\Rightarrow dy=-dx$, έχουμε:

$$\int\frac{dx}{(2-x)^3}=-\int\frac{1}{y^3}dy=-\int y^{-3}dy=-\frac{y^{-3+1}}{-3+1}=\frac{1}{2y^2}+c=\frac{1}{2(2-x)^2}+c$$

οποτε το ορισμενο ολοκληρωμα ισουται προς $\frac{1}{2(2-x)^2}\Big|_3^b=\frac{1}{2(2-b)^2}-\frac{1}{2}$

(iii) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $y=\sqrt{x+1}\Rightarrow y^2=x+1\Rightarrow 2ydy=dx$, έχουμε:

$$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{(y^2-1)2ydy}{y}=2\int_1^{\sqrt{2}}(y^2-1)dy=2[\frac{y^3}{3}-y]\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=$$

7. (16 μον.) Γράψετε αν οι κάτωθι προτάσεις είναι σωστές ή λάθος.

A) Για κάθε λ πραγματικό και κάθε A τετραγωνο πίνακα $n\times n$**,** $\det(\lambda A)=\lambda\det(A)$

α) Σωστό β) Λάθος

B) Το σύνολο $E=\{(x_1,x_2,x_3): x_1+x_2-1=0 \text{ και } x_1+x_3=0\}$ **είναι διανυσματικός υπόχωρος του** R^3**.**

α) Σωστό β) Λάθος

Γ) Υπάρχει ϕ γραμμικη απεικόνιση $\phi: R^3 \to R^4$ με $\mathrm{Im}(\phi) = R^4$

α) Σωστό β) Λάθος

Δ) Υπάρχει τετραγωνικός πίνακας Α μη μηδενικός με $A^2 = 0$.

α) Σωστό β) Λάθος

Λύση. (Α) Λάθος: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. **(Β)** Λάθος αφού το σύνολο Ε δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο του $\mathbf{R}^3$: $0+0-1=-1\neq 0$. **(Γ)** Λάθος:ισχύει ότι $\dim\left(R^3\right) = \dim(Ker\phi) + \dim(\phi(R^3))$

άρα $\dim(\phi\left(R^3\right)) = \dim\left(R^3\right) - \dim(Ker\phi) \le \dim\left(R^3\right) = 3 < 4$

(Δ) Σωστό: Για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, τότε $A \neq 0$ και $A^2 = 0$.

8. (16 μον.) Για τις κάτωθι προτάσεις πολλαπλής επιλογής, γράψετε ποια απάντηση είναι σωστή:

1. Αν $f(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x}$ τότε το $\lim_{x\to 0} f(x)$ είναι ίσο με

Α. 1 Β. $\frac{\pi}{2}$ Γ. 4 Δ. ∞

2. Αν $\lambda = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$, τότε

Α. $\lambda = 0$ Β. $\lambda = e^2$ Γ. $\lambda = 2$ Δ. το λ δεν ορίζεται

3. Αν $f(x) = \ln(x^2+1)$, τότε οι ρίζες της $f'(x)$ είναι :

Α. x = 1 Β. x=0 Γ. x=-1 Δ. δεν υπαρχει ρίζα

4. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - x^2$, έχει:

Α. Τοπικό ελάχιστο στο x = - 1 και τοπικό μέγιστο στο x = 1.
Β. Τοπικό ελάχιστο στο x = 0 και τοπικό μέγιστο στο x = 1.
Γ. Τοπικό ελάχιστο στο x = 1 και τοπικό μέγιστο στο x = - 1.
Δ. Τοπικό ελάχιστο στο x = -1 και τοπικό μέγιστο στο x = 0.

Λύση.

(1) Σωστή απάντηση είναι η **Α**: **(2)** Σωστή απάντηση είναι η **Β**:

(3) Σωστή απάντηση είναι η **Β**: Πράγματι, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, η οποία έχει μοναδική ρίζα το x=0.

(4) Σωστή απάντηση είναι η **Δ** γιατί : $f'(x) = (\dfrac{x^4}{2} - x^2)' = 2x(x^2-1) = 2x(x+1)(x-1)$. Επομένως, η πρώτη παράγωγος έχει ρίζες στα σημεία x=1, x=-1 και x=0 για τα οποία παρατηρούμε ότι: $f''(1) = 4 > 0, f''(-1) = 4 < 0, f''(0) = -2$. Συνεπώς, μόνο η Δ αληθεύει.