ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ Α΄

Τα κάτωθι προβλήματα προέρχονται από τα κεφάλαια 1, 2 και 3 του συγγράμματος «Γραμμική Άλγεβρα». Η ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας είναι η 18 Νοεμβρίου 2002.

1. α) (Μον. 5) Δίνονται οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ -1\end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω εκφράσεις όταν αυτό είναι δυνατό :

$$\alpha)\ 3A-2B \quad \beta)\ AE \quad \gamma)\ CA \quad \delta)\ EA \quad \varepsilon)\ AB^T+D \quad \sigma\tau)\ D^2$$

όπου B^T δηλώνει τον ανάστροφο πίνακα του B.

β) (Μον. 5) Δίνονται οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-4 & -1 & 2\\ -5 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Εξηγήστε γιατί ο $A=B^{-1}$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον τύπο που δίνει τον αντίστροφο ενός πίνακα. Ισχύει ότι και $B=A^{-1}$;

2. Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

α) (Μον. 5) Να υπολογιστεί ο πίνακας $A^n, n\in N$,

β) (Μον. 5) Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

όπου $a \in \Re$, πραγματικός αριθμός. Να υπολογιστεί ο πίνακας A^{-1} με δύο διαφορετικούς τρόπους : (i) με την χρήση του προσαρτημένου πίνακα και (ii) με την μέθοδο που περιγράφεται στη σελ. 37 για τον υπολογισμό αντίστροφου σύνθετου πινάκα. Ποιος τρόπος είναι ο πιο γρήγορος;

Υπόδειξη. Δες ενότητα 2.3.

3. α) (Μον. 5) Έστω 2 διανύσματα OA, OB τέτοια ώστε $|OA| = |OB| = 1$ και η γωνία θ που σχηματίζουν μεταξύ τους είναι $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $OC = OA + 2OB, OD = OA - OB$.

β) (Μον. 10) Δίνονται τα διανύσματα

$$OA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \;;\; OB = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \;;\; OC = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

Για ποιες τιμές των $a, b, c \in \Re$ τα παραπάνω διανύσματα είναι :

ι) κάθετα, ιι) συγγραμικά, ιιι) συνεπίπεδα.

Υπόδειξη. Οι παραπάνω έννοιες αναφέρονται στην ενότητα 1.3, ενώ χρήσιμο στην άσκηση μπορεί να θεωρηθεί και το παράδειγμα 2.4.

4. (Μον. 15) Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

α) Να υπολογιστεί ο πίνακας $C = AA^T$.

β) Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $sI_3 - C$ και να γραφεί στη μορφή

$$a(s) = \det\left[sI_3 - C\right] = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

όπου I_3 είναι ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας.

γ) Να βρεθούν οι αριθμοί $\{a_3, a_2, a_1\}$ και να δειχθεί ότι ο πρώτος από αυτούς που είναι διάφορος του μηδενός είναι ο a_2.

δ) Να υπολογιστεί ο πίνακας

$$A^{+} = -\frac{1}{a_2} A^T \left[C + a_1 I_3 \right]$$

ε) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A^{+} ικανοποιεί τις 4 παρακάτω ιδιότητες :

$$AA^{+}A = A \ \ ; \ \ A^{+}AA^{+} = A^{+} \ \ ; \ \ \left(AA^{+}\right)^T = AA^{+} \ \ ; \ \ \left(A^{+}A\right)^T = A^{+}A$$

Σημείωση. Για κάθε πίνακα Α, με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, υπάρχει μοναδικός πίνακας A^{+} που ικανοποιεί τις 4 παραπάνω ιδιότητες και ο οποίος ονομάζεται *γενικευμένος αντίστροφος* του A. Στην περίπτωση που ο A είναι αντιστρέψιμος ($\det\left[A\right] \neq 0$), τότε ο γενικευμένος αντίστροφος του *A*, A^{+},ταυτίζεται με τον αντίστροφο του *A*. Τα βήματα (α-δ) προτείνουν μια μέθοδο υπολογισμού του γενικευμένου αντίστροφου του πίνακα *A*.

5. α) (Μον. 5) Δείξτε ότι η τιμή της παρακάτω ορίζουσας είναι μηδέν:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2001 \\ 3 & 5 & 7 & \cdots & 2003 \\ 5 & 7 & 9 & \cdots & 2005 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2001 & 2003 & 2005 & \cdots & 4001 \end{vmatrix}$$

Υπόδειξη. Να χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες των οριζουσών που αναφέρονται στα θεωρήματα 2.1 και 2.2.

β) (Μον. 5) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $D = Q^2 - RP$ όπου

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix} \ \ ; \ \ P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \ \ ; \ \ Q = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \ \ ; \ \ R = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

Σημείωση. Η ορίζουσα D ονομάζεται *απαλείφουσα του Sylvester*.

6. (Μον. 10) Για τις επόμενες προτάσεις (1)-(3) αποφασίστε αν είναι αληθείς (δικαιολογώντας γιατί) ή ψευδείς (με κάποιο παράδειγμα)

(1) Αν $L_1U_1 = L_2U_2$ (όπου $U_i, i = 1,2$ άνω τριγωνικοί χωρίς μηδενικά στη διαγώνιο και $L_i, i = 1,2$ κάτω τριγωνικοί με μονάδες στη διαγώνιο) τότε $L_1 = L_2$ και $U_1 = U_2$. Η παραγοντοποίηση LU είναι μοναδική.

(2) Αν $A^2 + A = I_n$ τότε $A^{-1} = A + I_n$ όπου A είναι $n \times n$ πίνακας και I_n είναι ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας.

(3) Αν $B = SAS^{-1}$ όπου A, B, S είναι $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες τότε

α) $\det[B] = \det[A]$ και β) $\det[A^{-1}B] = 1$.

Υπόδειξη. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των οριζουσών που αναφέρονται στην ενότητα 2.2.

7. (Μον. 15) Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το σύστημα :

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

α) έχει μια λύση, και να βρεθεί η λύση αυτή,

β) καμία λύση,

γ) άπειρες λύσεις, και να βρεθεί η παραμετρική οικογένεια των λύσεων αυτών.

8. α) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ι) (Μον. 5) με την παραγοντοποίηση LU,

ιι) (Μον. 5) με την χρήση οριζουσών.

Σημείωση. Εφόσον υπολογίσετε την λύση του παραπάνω συστήματος επαληθεύσατε ότι η λύση που βρήκατε ικανοποιεί όλες τις παραπάνω εξισώσεις.

β) (Μον. 5) Να λυθεί το παρακάτω σύστημα εφόσον το γράψετε πρώτα στη μορφή $AX = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = 6X$$

όπου X είναι 3×1 πίνακας.

Υπόδειξη. Για την επίλυση του θέματος (9i) θα πρέπει να συμβουλευτείς την ενότητα 3.2 και 3.3.1, ενώ για την επίλυση της άσκησης (9ii) την ενότητα 3.3.2.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΡΓΑΣΙΑ Α΄

ΑΣΚΗΣΗ 1.α.

1.α.α

$$3\cdot A-2\cdot B=3\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot1&3\cdot1&3\cdot0\\3\cdot0&3\cdot1&3\cdot(-1)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\cdot2&1\cdot2&1\cdot2\\-1\cdot2&0\cdot2&3\cdot2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3&3&0\\0&3&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&2&2\\-2&0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-(-2)&3-2&0-2\\0+2&3-0&-3-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1&-2\\2&3&-9\end{bmatrix}$$

1.α.β $A\cdot E=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot(-2)+1\cdot3+0\cdot(-1)\\0\cdot(-2)+1\cdot3+(-1)\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$

$2\times3 \cdot 3\times1$

θα προκύψει πίνακας 2×1

Ο αριθμός των στηλών του Α ισούται με τον αριθμό των γραμμών του Ε

1.α.γ

$$C\cdot A=\begin{bmatrix}1&-3\\-1&3\\-1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+(-3)\cdot0&1\cdot1+(-3)\cdot1&1\cdot0+(-3)\cdot(-1)\\-1\cdot1+3\cdot0&-1\cdot1+3\cdot1&-1\cdot0+3\cdot(-1)\\-1\cdot1+3\cdot0&-1\cdot1+3\cdot1&-1\cdot0+3\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\-1&2&-3\\-1&2&-3\end{bmatrix}$$

$3\times2 \cdot 2\times3$

3×3

1.α.δ $E\cdot A=\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$ Επειδή το πλήθος των στηλών του Ε(1) δεν είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του Α, ο πολ/σμός των πινάκων Ε,Α δεν είναι δυνατός

$3\times1 \cdot 2\times3$

1.α.ε **A.B^T+D**

$$B^T=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&0&3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\\1&3\end{bmatrix}$$

$$AB^T+D=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\\1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+1+0&-1+0+0\\0+1-1&0+0-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=$$

$$\underbrace{2\times 3 \quad \cdot \quad 3\times 2}_{2\times 2}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{2\times 2 \quad \oplus \quad 2\times 2}_{2\times 2}$$

1.α.στ $\quad D^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, ο D είναι τετραγωνικός

$$D^2 = D\cdot D \Rightarrow D^2=\begin{bmatrix}1-1 & -1-1\\ 1+1 & -1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.β.

Σύμφωνα με τον ορισμό της σελίδας 36 αν για τον πίνακα A υπάρχει πίνακας B με την ιδιότητα $A\cdot B = B\cdot A = I$, τότε ο B είναι αντίστροφος του A και συμβολίζεται με A^{-1}. Επίσης επειδή $A\cdot B = I \Rightarrow B\cdot A = I$ για να δείξουμε ότι $A = B^{-1}$ αρκεί να δείξουμε $A\cdot B = I$ ή $B\cdot A = I$.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4 & -1 & 2\\ -5 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+5 & -1+1 & 2-2\\ 4-10+6 & 1-2+2 & -2+4-2\\ -8+5+3 & -2+1+1 & 4-2-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

Παρόμοια για να δείξουμε ότι $B = A^{-1}$ αρκεί να ικανοποιείται ***μια από τις ιδιότητες*** $B\cdot A = I$ ή $A\cdot B = I$ που ήδη έχουμε δείξει.

ΑΣΚΗΣΗ 2.α.

Παρατηρούμε για τον πίνακα A ότι γράφεται:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\text{, δηλαδή}$$

$$\mathrm{A}=\mathrm{I}+\mathrm{M}\quad\text{όπου}\quad \mathrm{M}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\ \textit{(βλέπε σελ. 9)}$$

Επίσης I, M είναι αντιμεταθετικοί, οπότε:

$$A^n=(I+M)^n=I+\binom{n}{1}M+\binom{n}{2}M^2+\ldots+\binom{n}{n}M^n \qquad \text{όπου: } \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Αλλά για τον πίνακα M είναι :

$$M^2=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\neq 0,\ M^3=M^4=\ldots=M^n=0$$

Οπότε:

$$A^n=I+\binom{n}{1}\cdot M+\binom{n}{2}\cdot M^2=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2\cdot\binom{n}{1}&0\\0&0&2\cdot\binom{n}{1}\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&4\cdot\binom{n}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\cdot\binom{n}{1}&4\cdot\binom{n}{2}\\0&1&2\cdot\binom{n}{1}\\0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&2n&2\cdot n\cdot(n-1)\\0&1&2\cdot n\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.β

Υπολογισμός αντίστροφου με τη χρήση του προσαρτημένου πίνακα *(βλ. σελ. 36).*

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\det \mathrm{A}}(\mathrm{adj A})\qquad \textit{(τύπος 2.7 / σελ. 36)}$$

$$M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\0&3\end{vmatrix}=9\qquad M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}=1\qquad M_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&3\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a&a\\0&3\end{vmatrix}=-3\cdot a\qquad M_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&a\\0&3\end{vmatrix}=6\qquad M_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&a\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a & a\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2\cdot a \qquad M_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & a\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2 \qquad M_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & a\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6$$

$$adjA=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{21} & M_{31}\\ M_{12} & M_{22} & M_{32}\\ M_{13} & M_{23} & M_{33}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}9 & -3\cdot a & -2\cdot a\\ 1 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$\det A=\det\begin{bmatrix}2 & a & a\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\text{αναπτύσουμε κατά μήκος της 1ης στήλης}: \det A = 2.\det\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=18$$

Άρα: $$A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}9 & -3\cdot a & -2\cdot a\\ 1 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{a}{6} & -\frac{a}{9}\\ \frac{1}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Υπολογισμός αντίστροφου με τη χρήση σύνθετων πινάκων *(βλ. σελ. 37).*

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2 & a & a\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ μπορεί να διαμεριστεί $A=\left[\begin{array}{cc|c}2 & a & a\\ 0 & 3 & 1\\ \hline 0 & 0 & 3\end{array}\right]$

και έτσι έχουμε το σύνθετο πίνακα $A=\begin{bmatrix}B & M\\ 0 & N\end{bmatrix}$ όπου $B=\begin{bmatrix}2 & a\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $M=\begin{bmatrix}a\\ 1\end{bmatrix}$, $N=[3]$.

Οι πίνακες Β και Ν είναι αντιστρέψιμοι αφού $\det B = 6 \neq 0$ και $\det N = 3 \neq 0$

Έχουμε λοιπόν (από τη σελίδα 37): $A^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & -B^{-1}\cdot M.N^{-1}\\ 0 & N^{-1}\end{bmatrix}$ **με**

$B^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3 & -a\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ (σελ.37, άσκηση αυτοαξιολόγησης 2.2.3.).

$$-B^{-1}\cdot M.N^{-1}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}3 & -a\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ 1\end{bmatrix}.\frac{1}{3}=-\frac{1}{18}\cdot\begin{bmatrix}2a\\ 2\end{bmatrix}=-\frac{1}{18}\cdot 2\cdot\begin{bmatrix}a\\ 1\end{bmatrix}=-\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix}a\\ 1\end{bmatrix}$$

επομένως ο A^{-1} είναι: $$A^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & -B^{-1}\cdot M.N^{-1}\\ 0 & N^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{a}{6} & -\frac{a}{9}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.α.

Έστω φ είναι η γωνία των OC, OD: Ισχύει (από σελ. 11, Γραμμική Άλγεβρα) :

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{OC \cdot OD}{\|OC\| \cdot \|OD\|} \qquad (1)$$

Αφού θ είναι η γωνία των OA, OB και $\|OA\| = \|OB\| = 1$ έχουμε:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$OA \cdot OB = \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \|\mathrm{OA}\| \cdot \|\mathrm{OB}\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OA \cdot OB = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

Θα βρούμε το γινόμενο *OC.OD* *(σελ.11)*

$$OC \cdot OD = (OA + 2OB) \cdot (OA - OB) \overset{\text{ιδιότητες εσωτ. γινομένου}}{=}$$
$$= \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OA} - \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} + 2 \cdot \mathrm{OB} \cdot \mathrm{OA} - 2 \cdot \mathrm{OB} \cdot \mathrm{OB} =$$
$$= \mathrm{OA}^2 - \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} + 2 \cdot \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} - 2 \cdot \mathrm{OB}^2 = \|\mathrm{OA}\|^2 + \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} - 2 \cdot \|\mathrm{OB}\|^2 =$$
$$= 1 + \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} - 2 = \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} - 1 \overset{(2)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} \qquad (3)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι: α. $\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OA} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \|\mathrm{OA}\|^2$ έχουμε:
β. $\mathrm{OB} \cdot \mathrm{OA} = \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}$

$$\|OC\|^2 = (OA + 2 \cdot OB)^2 = (OA)^2 + 4 \cdot (OB)^2 + 4 \cdot OA \cdot OB = 1 + 4 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 + 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \|OC\| = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} \qquad (4)$$

$$\|OD\|^2 = (OA - OB)^2 = (OA)^2 - 2OA \cdot OB + (OB)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\|OD\| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (1) –(5) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\phi \overset{(1)}{=} \frac{OC \cdot OD}{\|OC\| \cdot \|OD\|} \underset{(4,5)}{\overset{(2)}{=}} = \frac{\frac{\sqrt{2} - 2}{2}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}} =$$

$$\frac{\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{10 - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}^2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{10 - \sqrt{2} - 4}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{6 - \sqrt{2}}} = -0{,}1367736 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu 97{,}86119 \Rightarrow \phi = 97{,}86119^0$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.β.

i. κάθετα

Τα <u>OA,OB, OC είναι κάθετα</u> αν ανά δύο είναι κάθετα. Γιαυτό θα πρέπει ταυτόχρονα να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες (σελ.12) :

α) $OA \cdot OB = 0$,

β) $OA \cdot OC = 0$ και

γ) $OB \cdot OC = 0$

Οι παραπάνω ισχύουν όταν (σελ. 11) :

$\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB} = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3 \cdot \beta_3 = 1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + 1 \cdot c = 0 \Rightarrow$ Πρέπει $\alpha + \beta + c = 0$

<u>OA, OC κάθετα</u> θα πρέπει $OA \cdot OC = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + c^2 = 0 \Rightarrow a = \beta = c = 0$

<u>OB, OC κάθετα</u> θα πρέπει $\mathrm{OB} \cdot \mathrm{OC} = 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + c^3 = 0$

<u>Συμπέρασμα :</u> Από τις δύο πρώτες συνθήκες είναι εύκολο να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι $\alpha = \beta = c = 0$ που ικανοποιεί και την τρίτη συνθήκη.

ii. συγγραμμικά *(σελ. 13) (παρόμοια και εδώ)*

<u>Για να είναι τα OA,OB, OC </u>συγγραμμικά **θα πρέπει ανά δύο** να είναι συγγραμμικά.. Γιαυτό θα πρέπει να ικανοποιούνται **ταυτόχρονα** οι παρακάτω συνθήκες (δες σελ.13):

α) OA, OB συγγραμικά αν και μόνο αν $\left[OA, OB\right] = 0$

β) OA, OC συγγραμικά αν και μόνο αν $\left[OA, OC\right] = 0$ και

γ) OB, OC συγγραμικά αν και μόνο αν $\left[OB, OC\right] = 0$.

α) Η σχέση (α) δίνει

$$\left(\alpha_2 \cdot \beta_3 - \alpha_3 \cdot \beta_2\right) \cdot i + \left(\alpha_3 \cdot \beta_1 - \alpha_1 \cdot \beta_3\right) \cdot j + \left(\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1\right) \cdot k = 0$$

$$\left(c - \beta\right) \cdot i + \left(\alpha - c\right) \cdot j + \left(\beta - \alpha\right) \cdot k = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = c \\ \beta = c \\ \beta = \alpha \end{array}\right\} \text{θα πρέπει} \quad \alpha = \beta = c$$

β) Η σχέση (β) δίνει $\left[OA, OC\right] = \left(c^2 - \beta^2\right) \cdot i + \left(\alpha^2 - c^2\right) \cdot j + \left(\beta^2 - \alpha^2\right) \cdot k = 0$

Παρατηρούμε ότι όταν η συνθήκη (α) ικανοποιείται τότε $a = b = c$ και συνεπώς $\left[OA, OC\right] = 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k = 0$.

γ) Η σχέση (γ) δίνει

$$\left[OB, OC\right] = \left(\beta \cdot c^2 - c \cdot \beta^2\right) \cdot i + \left(c \cdot \alpha^2 - c^2 \cdot \alpha\right) \cdot j + \left(\alpha \cdot \beta^2 - \alpha^2 \cdot \beta\right) \cdot k = 0$$

Παρόμοια με την (β) παρατηρούμε ότι όταν η συνθήκη (α) ικανοποιείται τότε $\left[OB, OC\right] = 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k = 0$.

<u>Συμπέρασμα.</u> α=β=c

iii. συνεπίπεδα

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τρία διανύσματα συνεπίπεδα είναι το μικτό γινόμενό τους να είναι 0.

$$(\mathrm{OA},\mathrm{OB},\mathrm{OC})=0$$

$$(OA,OB,OC)=[OA,OB]\cdot OC=\begin{bmatrix}c-\beta & \alpha-c & \beta-\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha^2 & \beta^2 & c^2\end{bmatrix}=$$

$$=(c-\beta)\cdot\alpha^2+(\alpha-c)\cdot\beta^2+(\beta-\alpha)\cdot c^2=0$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(OA,OB,OC)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & \beta & c\\ a^2 & \beta^2 & c^2\end{vmatrix}=(c-a)\cdot(c-b)\cdot(b-a)\Rightarrow a=\beta\vee a=c\vee\beta=c$$

<u>Συμπέρασμα</u>. $a=\beta\vee a=c\vee\beta=c$

ΑΣΚΗΣΗ 4.α.

Βρίσκουμε τον ανάστροφο του πίνακα A *(σύμφωνα με τη σελ. 12)* που συμβολίζεται με A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι A= A^T. Άρα C=A. A^T=A^2.

$$C = A \cdot A^T = A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.β.

$$\det[sI_3 - C] = \det\left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s-3 & -4 & -3 \\ -4 & s-6 & -4 \\ -3 & -4 & s-3 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} s-3 & -4 & -3 \\ -4 & s-6 & -4 \\ -3 & -4 & s-3 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη στήλη επί –1 και προσθέτουμε στην $1^η$ στήλη

$$\det A = \begin{vmatrix} s & -4 & -3 \\ 0 & s-6 & -4 \\ -s & -4 & s-3 \end{vmatrix}$$

και στη συνέχεια προσθέτουμε την $1^η$ γραμμή στην τρίτη και έχουμε:

$$\det A = \begin{vmatrix} s & -4 & -3 \\ 0 & s-6 & -4 \\ 0 & -8 & s-6 \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} s-6 & -4 \\ -8 & s-6 \end{vmatrix} =$$

$$= s \cdot \left[(s-6)^2 - 32 \right] = s \cdot \left(s^2 - 12 \cdot s + 36 - 32 \right) = s^3 - 12 \cdot s^2 + 4 \cdot s = s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3$$

με $α_1$=-12, $α_2$=4, $α_3$=0

ΑΣΚΗΣΗ 4.γ.

Από το 4β, έχουμε ότι $\det[sI_3 - C] = s^3 - 12 \cdot s^2 + 4 \cdot s$ » που είναι της μορφής $s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3$, όπου $a_1 = -12, a_2 = 4,\ a_3 = 0$.

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος από τους $\{a_3, a_2, a_1\}$ που είναι διάφορος του 0 είναι ο $a_2 = 4$

ΑΣΚΗΣΗ 4.δ.

$$A^{+} = -\frac{1}{4}\cdot A^{T}\cdot\left[C-12\cdot I_{3}\right] = -\frac{1}{4}\cdot A^{T}\cdot C+3\cdot A^{T}\cdot I_{3} = -\frac{1}{4}\cdot A^{T}\cdot C+3\cdot A^{T} =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&4&3\\4&6&4\\3&4&3\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}10&14&10\\14&20&14\\10&14&10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&3&3\\3&6&3\\3&3&3\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}-\frac{5}{2}&-\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\\-\frac{7}{2}&-5&-\frac{7}{2}\\-\frac{5}{2}&-\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&3&3\\3&6&3\\3&3&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.ε.

- $A\cdot A^{+}A = A$ Αντικαθιστούμε τους πίνακες Α, A^{+} και κάνουμε τις πράξεις:

$$A\cdot A^{+}\cdot A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\1&2&1\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix} = A$$

- $A^{+}A\cdot A^{+} = A^{+}$

$$A^{+}\cdot A\cdot A^{+} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A^{+}$$

- $\left(A \cdot A^{+}\right)^{T} = A \cdot A^{+}$

$$(A \cdot A^{+})^{T} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{T} = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{T} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A \cdot A^{+}$$

- $\left(A^{+} \cdot A\right)^{T} = A^{+} \cdot A$

$$(A^{+} \cdot A)^{T} = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{T} = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{T} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A^{+} \cdot A$$

- $\left(A^{+} \cdot A\right)^{T} = A^{+} \cdot A$ **(άλλος τρόπος)**

$$A^{+} = -\frac{1}{4} \cdot A^{T} \cdot C + 3 \cdot A^{T} \Rightarrow$$

$$A^{+} \cdot A = -\frac{1}{4} \cdot A^{T} \cdot C \cdot A + 3 \cdot A^{T} \cdot A =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot A^{T} \cdot A \cdot A^{T} \cdot A + 3 \cdot A^{T} \cdot A \Rightarrow$$

$$\left(A^{+} \cdot A\right)^{T} = \left(-\frac{1}{4} \cdot A^{T} \cdot A \cdot A^{T} \cdot A + 3 \cdot A^{T} \cdot A\right)^{T}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot A^{T} \cdot \left(A^{T}\right)^{T} \cdot A^{T} \cdot \left(A^{T}\right)^{T} + 3 \cdot A^{T} \cdot \left(A^{T}\right)^{T} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot A^{T} \cdot A \cdot A^{T} \cdot A + 3 \cdot A^{T} \cdot A = -\frac{1}{4} \cdot A^{T} \cdot C \cdot A + 3 \cdot A^{T} \cdot A =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot A^{T} \cdot C \cdot A + 3 \cdot A^{T} \cdot A = A^{+} \cdot A$$

(άλλος τρόπος)

Επειδή ο A είναι συμμετρικός τότε και ο C είναι επίσης συμμετρικός. Ισχύει

$$(A^{+})^{T} = \left(-\frac{1}{a_2} A^{T}[C + a_1 I_3]\right)^{T} = -\frac{1}{a_2}[C + a_1 I_3]^{T} A = -\frac{1}{a_2}(C^{T} + a_1 I_3{}^{T}) A =$$

$$= -\frac{1}{a_2}(C + a_1 I_3) A$$

και

$$\left(A^{+} A\right)^{T} = A^{T} A^{+^{T}} = A\, [-\frac{1}{a_2}(C + a_1 I_3) A] = -\frac{1}{a_2} A (C + a_1 I_3)\, A = A^{+} A$$

.

ΑΣΚΗΣΗ 5α

D=0

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα 3 (σελίδα 30) του θεωρήματος 2.2.

Αφαιρούμε την $1^η$ στήλη από τη $2^η$ και την $3^η$ στήλη από την $4^η$ και παρατηρούμε ότι οι $2^η$ και $4^η$ στήλη έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα με 2.

Συνεπώς η ορίζουσα ισούται με 0 (εφόσον έχει δύο στήλες ίσες/ συμπέρασμα θεωρήματος 2.1, σελίδα 28)

ΑΣΚΗΣΗ 5β

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα D κατά μήκος της $1^{ης}$ γραμμής:

$$D=a_0\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix}-0+b_0\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}+0$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix}$ κατά μήκος της $2^{ης}$ στήλης και την ορίζουσα $\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ κατά μήκος της $1^{ης}$ στήλης και έχουμε:

$$D=a_0\left\{(-1)^{1+2}\cdot b_1\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot b_2\cdot\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}-0\right\}+b_0\cdot\left\{a_1\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}-a_2\cdot\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+0\right\}=$$
$$=-a_0\cdot b_1\cdot P+a_0\cdot b_2\cdot Q+b_0\cdot a_1\cdot P-a_2\cdot b_0\cdot Q=(a_0\cdot b_2-a_2\cdot b_0)\cdot Q+P\cdot(b_0\cdot a_1-a_0\cdot b_1)=$$
$$=Q^2+P\cdot(-R)=Q^2-R\cdot P$$

ΑΣΚΗΣΗ 6α

(1) Αληθής

Αφού οι πίνακες L_i, είναι κάτω τριγωνικοί με μονάδες στη διαγώνιο έπεται ότι η ορίζουσα ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων (σελ.29) και επομένως $\det L_i = 1 \neq 0 \Rightarrow$ υπάρχει ο αντίστροφος του L_i.

$$L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2 \Leftrightarrow L_2^{-1} L_1 \cdot U_1 = L_2^{-1} \cdot L_2 \cdot U_2 \Leftrightarrow L_2^{-1} L_1 \cdot U_1 = I \cdot U_2 \Leftrightarrow L_2^{-1} L_1 \cdot U_1 = U_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L_2^{-1} L_1 \cdot U_1 \cdot U_1^{-1} = U_2 \cdot U_1^{-1} \Leftrightarrow L_2^{-1} L_1 \cdot I = U_2 \cdot U_1^{-1} \Leftrightarrow \Leftrightarrow L_2^{-1} L_1 = U_2 \cdot U_1^{-1}$$

Έστω ότι $L_1 \neq L_2$ *ή* $U_1 \neq U_2$ τότε από τη σχέση

$L_2^{-1} L_1 = U_2 \cdot U_1^{-1}$ συμπεραίνουμε ότι ο τριγωνικός κάτω πίνακας $L_2^{-1} L_1$ (ως γινόμενο κάτω τριγωνικών πινάκων) είναι ίσος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα $U_2 \cdot U_1^{-1}$ (ως γινόμενο άνω τριγωνικών πινάκων). Αυτό είναι εφικτό μόνο όταν και οι δύο πίνακες είναι διαγώνιοι. Επειδή όμως η κύρια διαγώνιος του L_i αποτελείται από μονάδες συνεπώς θα πρέπει $L_2^{-1} L_1 = U_2 \cdot U_1^{-1} = I$. Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι $L_2 = L_1 \wedge U_2 = U_1$

(2) Αληθής

Έχοντας υπόψη τον ορισμό του αντιστρόφου σελ.36, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A^2 + A = I_n \Rightarrow A \cdot (A + I_n) = I_n \\ \kappa\alpha\iota \\ A^2 + A = I_n \Rightarrow (A + I_n) \cdot A = I_n \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A} + \mathrm{I}_n$$

(3) Αληθής

α) $\det[B] = \det[S \cdot A \cdot S^{-1}]$.

- Από το θεώρημα 2.3, σελίδα 33
- Την ιδιότητα 4, της πρότασης 2.4, στη σελίδα 37
- Την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού των πραγματικών (και μιγαδικών) αριθμών έχουμε:

$$\det[B] = \det[S \cdot A \cdot S^{-1}] = \det[S] \cdot \det[A] \cdot \det[S^{-1}] = \det[S] \cdot \det[A] \cdot \det[S]^{-1} =$$
$$= \det[S] \cdot \det[S]^{-1} \cdot \det[A] = 1. \cdot \det[A] = \det[A]$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.β

Χρησιμοποιώντας το α) και det[I]=1 (και τη σελίδα 36) έχουμε:

$$\det[A^{-1} \cdot B] = \det[A^{-1}] \cdot \det[B] = \det[A^{-1}] \cdot \det[A] = \det[A^{-1} \cdot A] = \det[I] = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Θα λύσουμε το σύστημα με τη χρήση του επαυξημένου πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right] \text{ εναλλάσσουμε την } 1^{\eta} \text{ με την } 3^{\eta} \text{ γραμμή και έχουμε } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά την 1η γραμμή με –1 και –α και προσθέτουμε στη 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{array}\right] \qquad (1)$$

Αν α≠1 διαιρούμε τη 2η γραμμή και την 3η γραμμή δια 1-α και έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a & a^2+a+1 \end{array}\right] \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τη 2η γραμμή στην 3η και έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2+a & a^2+2\cdot a+1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2+a & (a+1)^2 \end{array}\right] \qquad (3)$$

Αν α≠-2 διαιρούμε την 3^{η} γραμμή διά α+2 και έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{(a+1)^2}{a+2} \end{array}\right] \text{ και έχουμε το σύστημα:}$$

$$\begin{cases} x+y+a\cdot z = a^2 \\ -y+z = a \\ z = \dfrac{(a+1)^2}{a+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{a+1}{a+2} \\ y = \dfrac{1}{a+2} \\ z = \dfrac{(a+1)^2}{a+2} \end{cases}$$

Αν $a=1$ τότε: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 1-a^2 \\ & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y\in R \\ z\in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z+1 \\ y\in R \\ z\in R \end{cases}$$

Αν $a=-2$ **τότε από την (3) έχουμε:**

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ και επειδή από την τελευταία γραμμή έχουμε ότι

$$0.x+0.y+0.z=2$$

έπεται ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

7.α.

Για να έχει το σύστημα μοναδική λύση θα πρέπει α≠1 και α≠-2.

Η μοναδική λύση είναι: $(x,y,z)=\left(-\dfrac{a+1}{a+2},\dfrac{1}{a+2},\dfrac{(a+1)^2}{a+2}\right)$

7.β.

Το σύστημα δεν έχει λύση όταν $a=-2$

7.γ.

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν $a=1$

Η παραμετρική οικογένεια των λύσεων αυτών είναι:

$$(x,y,z)=(1-y-z,y,z) \qquad \text{με } y\in R,\ z\in R$$

2ος τρόπος

Το σύστημα γράφεται ως εξής :

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του Α

$$\det A=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)$$

Για τις τιμές του a για τις οποίες η ορίζουσα του Α είναι διάφορη του μηδενός, υπάρχει μοναδική λύση που δίνεται από τον τύπο :

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a&1\\a^2&1&a\end{vmatrix}}{\det[A]}=\frac{-\left(a-1\right)^2(a+1)}{\left(a-1\right)^2\left(a+2\right)}=-\frac{a+1}{a+2}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&a^2&a\end{vmatrix}}{\det\left[A\right]}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}a&1\\a^2&a\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\a^2&a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\a&1\end{vmatrix}}{(a-1)^2\cdot(a+2)}=\frac{a\cdot(a^2-a^2)-(a-a^2)+1-a}{(a-1)^2\cdot(a+2)}=$$
$$=\frac{a^2-2\cdot a+1}{(a-1)^2\cdot(a+2)}=\frac{(a-1)^2}{(a-1)^2\cdot(a+2)}=\frac{1}{(a+2)}$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a^2\end{vmatrix}}{\det\left[A\right]}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}a&a\\1&a^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\1&a^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\a&a\end{vmatrix}}{(a-1)^2\cdot(a+2)}=\frac{a\cdot(a^3-a)-(a^2-1)}{(a-1)^2\cdot(a+2)}=$$
$$=\frac{(a^2-1)^2}{(a-1)^2\cdot(a+2)}=\frac{(a+1)^2}{(a+2)}$$

Εξετάζουμε ξεχωριστά την περίπτωση που $\det[A]=0$ δηλαδή όταν a=1 ή a=-2.

Για α=1 το σύστημα μου διαμορφώνεται ως εξής :

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

το οποίο έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$\left(x,y,1-x-y\right)\quad x,y\in\mathbb{R}$$

Για α=-2 το σύστημα μου διαμορφώνεται ως εξής :

$$\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$rank_R\left[A\quad B\right]=3\neq 2=rank_{\mathbb{R}}A$$

και συνεπώς το σύστημα μου είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΗ 8.α

ι)Για να λύσουμε το σύστημα με τη μέθοδο LU:

- **Βήμα 1:** Ξεκινάμε από το σύνθετο πίνακα *[I A]* και με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών καταλήγουμε στο σύνθετο πίνακα *[P U]* όπου ο P είναι κάτω τριγωνικός, αντιστρέψιμος και τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι μονάδες ενώ ο U είναι κλιμακωτής μορφής.
- **Βήμα 2**: Βρίσκουμε τον αντίστροφο του P, τον P^{-1}
- **Βήμα 3:** Η παραγοντοποίηση LU του A είναι $\boldsymbol{A=L.U}$ όπου $L= P^{-1}$
- **Βήμα 4**: Το σύστημα $\boldsymbol{Ax=\beta}$ γίνεται $\boldsymbol{L.U.x=\beta}$ και λύνω διαδοχικά τα: $\boldsymbol{L.y=\beta}$ και $\boldsymbol{U.x=y}$

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω βήματα:

- $$[I \quad A]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή επί –1/3 και επί –2/3 και προσθέτουμε αντίστοιχα στη 2η γραμμή και 3η γραμμή: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή επί 2/5 και προσθέτουμε στην 3η γραμμή:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{array}\right]=[P \quad U]$$

Έτσι λοιπόν: $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad U=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Εύρεση αντίστροφου του P: $[I \quad P]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right]$

Πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ γραμμή επί 1/3 και επί 4/5 και προσθέτουμε στη $2^η$ και 3

γραμμή αντίστοιχα:. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right]$

Πολλαπλασιάζουμε τη $2^η$ γραμμή επί –2/5 και προσθέτουμε στην $3^η$ γραμμή:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Συνεπώς: $L = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$

- $L \cdot y = \beta \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ \frac{1}{3} \cdot y_1 + y_2 = 4 \\ \frac{2}{3} \cdot y_1 - \frac{2}{5} \cdot y_2 + y_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 5 \\ y_2 = \frac{7}{3} \\ y_3 = -\frac{2}{5} \end{array}$$

$$U \cdot x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 5 \\ -\frac{5}{3} x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_3 = 4 \\ -\frac{1}{5} \cdot x_3 = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

ii) Στο γραμμικό σύστημα $A \cdot x = \beta$ ο πίνακας x είναι πίνακας στήλη $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{δηλαδή} \begin{cases} 3 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 5 \\ x - y + z = 4 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y + z = 2 \end{cases} \qquad \textbf{(Σ)}$$

Βρίσκουμε τις ορίζουσες D, Dx, Dy, D_z του συστήματος (Σ)

- Βρίσκουμε την ορίζουσα ***D***: $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Εναλλάσσουμε την $1^η$ γραμμή με την $2^η$ και στη συνέχεια τη $2^η$ με την $3^η$ (με 2 εναλλαγές γραμμών δεν έχουμε αλλαγή πρόσημου της ορίζουσας: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Πολλαπλασιάζουμε τη $1^η$ γραμμή επί -2 και επί –3 και προσθέτουμε στην $2^η$ και την $3^η$ γραμμή αντίστοιχα: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1) = -4 + 5 = 1 \Rightarrow D = 1$

- Βρίσκουμε την ορίζουσα ***D***

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Εναλλάσσουμε την $1^η$ στήλη με την $3^η$ και στη συνέχεια τη $3^η$ με την $2^η$ (με 2 εναλλαγές στηλών δεν έχουμε αλλαγή πρόσημου της ορίζουσας: $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Εναλλάσσουμε την $1^η$ γραμμή με την $3^η$ και στη συνέχεια τη $3^η$ με την $2^η$ (με 2 εναλλαγές γραμμών δεν έχουμε αλλαγή πρόσημου της ορίζουσας: $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

Πολλαπλασιάζουμε τη $1^η$ γραμμή επί -2 και επί –1 και προσθέτουμε στην $2^η$ και την $3^η$ γραμμή αντίστοιχα.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) = -3 + 4 = 1 \Rightarrow D_x = 1$$

- Βρίσκουμε τη ***D*** $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Εναλλάσσουμε την $1^η$ γραμμή με την $2^η$ και στη συνέχεια τη $2^η$ με την $3^η$:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 1^{η} γραμμή επί -2 και επί –3 και προσθέτουμε στην 2^{η} και την 3^{η} γραμμή αντίστοιχα. $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -6\cdot(-1) - 7 = -1 \Rightarrow D_y = -1$

Βρίσκουμε τη $\boldsymbol{D_z}$ $\quad D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Εναλλάσσουμε την 1^{η} γραμμή με την 2^{η} και στη συνέχεια τη 2^{η} με την 3^{η} :

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 1^{η} γραμμή επί -2 και επί –3 και προσθέτουμε στην 2^{η} και την 3^{η} γραμμή αντίστοιχα. $D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 4\cdot(-7) + 6\cdot 5 = -28 + 30 = 2 \Rightarrow D_z = 2$

Επομένως,

εφόσον $D \neq 0$ το Σ έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{Dx}{D} = 1 \qquad y = \frac{Dy}{D} = -1 \qquad z = \frac{Dz}{D} = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 8.β

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X - 6 \cdot X = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 6 \cdot \mathrm{I} \right) \cdot X = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-6 & 2 & 3 \\ 2 & 3-6 & 1 \\ 3 & 1 & 2-6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 0 \\ 2 \cdot x - 3 \cdot y + z = 0 \\ 3 \cdot x + y - 4 \cdot z = 0 \end{cases}$$

Επειδή το σύστημα είναι ομογενές, έχει πάντα λύση.
Αν D≠0 τότε έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Αν D=0 τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

$$D = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2^{η} γραμμή επί –1 και προσθέτουμε στην 3^{η} :

$$D = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Εναλλάσσουμε την 1^{η} γραμμή με την 3^{η} και στη συνέχεια τη 2^{η} με την

$$3^{\eta} D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά την 1^{η} γραμμή επί 5 και επί –2 και προσθέτουμε στην 2^{η} και την 3^{η} γραμμή αντίστοιχα. $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 22 & -22 \\ 0 & -11 & 11 \end{vmatrix} = 22.11 - 22.11 = 0 \Rightarrow D = 0$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Θα βρούμε τις λύσεις αυτές με τη χρήση του επαυξημένου πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right]$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή διαδοχικά επί 2/5 και επί 3/5 και προσθέτουμε αντίστοιχα στη 2η και 3η γραμμή: $\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{5} & \frac{11}{5} & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{11}{5} & 0 \end{array}\right]$

Προσθέτουμε τη 2η γραμμή στην 3η και έχουμε: $\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{5} & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή επί 5/11 και έχουμε: $\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Έτσι έχουμε το σύστημα: $\begin{cases} -5\cdot x + 2\cdot y + 3\cdot z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5\cdot x = -2\cdot z - 3\cdot z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι: **(x,x,x), x∈ℜ**