ΠΛΗ 12: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι

$2^η$ ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Απαντήσεις

1. (15 μονάδες)

i. Εξηγείστε γιατί κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ *δεν* είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

- $\left\{[x,y,z]^T \middle| z \geq 0\right\}$
- $\left\{[x,y,z]^T \middle| y-z=1\right\}$.

ii. Αφού αποδείξτε ότι τα στοιχεία $[1,-1,1]^T$, $[2,1,2]^T$, $[3,1,0]^T$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$, εκφράστε το $[17,5,5]^T$ ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.

iii. Για ποιους πραγματικούς αριθμούς a ισχύει ότι

$$[1,-1,a]^T \in span\left\{[2,1,1]^T,[-1,1,1]^T,[3,3,3]^T\right\};$$

Υπόδειξη: Παράδειγμα 4.3 σελίδα 67.

Λύση

i) Το σύνολο W= { $[x,y,z]^T$ | $z \geq 0$ } δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του R^3, γιατί αν θεωρήσουμε το $[2,0,1]^T \in W$, τότε $-[2,0,1]^T = [-2,0,-1]^T \notin W$.

Το σύνολο U= { $[x,y,z]^T$ | $y-z=1$ } δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, γιατί

το μηδενικό διάνυσμα δεν ανήκει στο U.

ii) Τρία στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου διάστασης 3 είναι βάση αν και μόνο αν αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επειδή

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -9 \neq 0,$$

τα δεδομένα διανύσματα αποτελούν μια βάση.

Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από $\lambda_1[1,-1,1]^T + \lambda_2[2,1,2]^T + \lambda_3[3,1,0]^T = [17,5,5]^T$ βρίσκουμε $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 4$.

iii) Σύμφωνα με την υπόδειξη πρέπει το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

να είναι συμβιβαστό, οπότε στον επαυξημένο πίνακα $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & \alpha \end{array}\right]$ κάνοντας αφαίρεση στις δύο τελευταίες γραμμές βρίσκουμε τον $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{array}\right]$, από όπου συμπεραίνουμε ότι $\alpha = -1$.

2. (15 μονάδες) Έστω E_1 και E_2 οι παρακάτω διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$,

$$E_1 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4]^T \,|\, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$$

$$E_2 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4]^T \,|\, x_1 = x_4, x_2 = 2x_3\}.$$

Βρείτε τη διάσταση καθενός από τους υποχώρους

$$E_1,\ E_2,\ E_1 + E_2,\ E_1 \cap E_2.$$

Υπόδειξη: Παράδειγμα 4.13 σελίδα 75

Λύση

Έστω $[x_1,x_2,x_3,x_4]^T$ ένα τυχαίο διάνυσμα του E_1. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 n_1 + x_3 n_2 + x_4 n_3 .$$

Δηλαδή τα διανύσματα n_1, n_2, n_3 είναι γεννήτορες του E_1. Αυτά είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, (σύμφωνα με τα σχόλια Β, σελ. 71) υπολογίζουμε τον βαθμό του πίνακα με στήλες τα διανύσματα n_1, n_2, n_3. Έτσι,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο βαθμός του τελευταίου πίνακα είναι 3, άρα τα n_1, n_2, n_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς αποτελούν μια βάση του E_1, οπότε $\dim E_1 = 3$.

Όμοια διαπιστώνουμε ότι για το $[x_1,x_2,x_3,x_4]^T \in E_2$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 u_1 + x_3 n_2 ,$$

άρα $E_2 = \text{span}\{u_1, n_2\}$. Επίσης τα u_1, n_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε αποτελούν βάση του E_2. Άρα $\dim E_2 = 2$.

Έχουμε $E_1 + E_2 = \text{span}\{ n_1, n_2, n_3, u_1 \}$. Επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, τα n_1, n_2, n_3, u_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα $\dim(E_1 + E_2) = 4$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.3 σελ. 73, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διάσταση του $E_1 \cap E_2$

$$\dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 + E_2) = 1.$$

3. i. (10 μονάδες) Με $M_2(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο των 2×2 πινάκων που έχουν στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του υποχώρου

$$\{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}X\}.$$

Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τη γενική μορφή των πινάκων *X*.

ii. (10 μονάδες) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού a τέτοιες ώστε η διάσταση του διανυσματικού χώρου των λύσεων του συστήματος

$$x + 2ay + z = 0$$

$$x + 2ay + az = 0$$

$$ax + 2ay + z = 0$$

να είναι τουλάχιστον ίση με 1.

Λύση

i) Αν $X = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$, τότε

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha - \gamma = \alpha + 2\beta \\ 2\alpha + \gamma = \gamma + 2\delta \\ \beta - \delta = -\alpha + \beta \\ 2\beta + \delta = -\gamma + \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \gamma = -2\beta \\ \\ \alpha = \delta \end{array}\right\}$$

Άρα

$$X = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -2\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{A},$$

όπου $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, οπότε $X = \text{span}\{\mathbf{I}, \mathbf{A}\}$. Οι πίνακες **I**, **A** είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Συνεπώς η διάσταση του υποχώρου είναι 2.

ii) Ένα τετραγωνικό ομογενές σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι ίση με μηδέν. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha & \alpha \\ 2\alpha & 4\alpha & 2 \end{vmatrix} = -4\alpha(\alpha-1) - 1(4\alpha - 4\alpha) + 4\alpha^2(\alpha-1) = 4\alpha(\alpha-1)^2.$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι $\alpha = 0,1$.

4. (20 μονάδες) Έστω φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας που αντιστοιχεί στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Βρείτε την εικόνα $\varphi([2,3,3]^T)$.
ii. Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του χώρου Kerφ. Υπόδειξη: Παράδειγμα 5.3 σελίδα 92.
iii. Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του χώρου $\varphi(\mathbb{R}^3)$.
iv. Αληθεύει ότι υπάρχει $[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3$ με $\varphi([x,y,z]^T) = [1,2,3]^T$;

Λύση

i. Επειδή ο δεδομένος πίνακας αντιστοιχεί στην κανονική βάση, η ζητούμενη εικόνα είναι το γινόμενο $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$

ii. Λύνοντας το σύστημα $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ βρίσκουμε $(x, y, z) = (-z, 0, z)$, όπου $z \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η διάσταση του Kerφ είναι 1 και μια βάση του Kerφ είναι το σύνολο $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

iii. Η διάσταση του $\varphi(\mathbb{R}^3)$ είναι 3 – dimkerφ = 2. Τα στοιχεία $\varphi([1,0,0]^T)$, $\varphi([0,1,0]^T)$, $\varphi([0,0,1]^T)$ παράγουν τον χώρο $\varphi(\mathbb{R}^3)$. Άρα για να βρούμε μια βάση του $\varphi(\mathbb{R}^3)$, αρκεί να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία από τα $\varphi([1,0,0]^T)$, $\varphi([0,1,0]^T)$, $\varphi([0,0,1]^T)$. Έχουμε $\varphi([1,0,0]^T) = [-1,3,0]^T$, $\varphi([0,1,0]^T) = [0,0,5]^T$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

iv. Το σύστημα $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ δεν έχει λύση. Πράγματι, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος μετά από μια γραμμοπράξη παίρνει τη μορφή $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Από τη δεύτερη γραμμή συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

5. (20 μονάδες) Έστω ο πραγματικός πίνακας $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

i. Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του A.
ii. Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος; Αν ναι,να βρεθεί ένας πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος. Υπόδειξη: Παράδειγμα 6.10 σελίδα 115.
iii. Χρησιμοποιώντας το ii (ή διαφορετικά) υπολογίστε τον A^{2004}.

Λύση

i. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι x^2-3x+2 και άρα οι ιδιοτιμές είναι 1,2. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\{[-a,a]^T \mid a\in\mathbb{R}-\{0\}\}$, $\{[a,-2a]^T \mid a\in\mathbb{R}-\{0\}\}$.
ii. Επειδή ο Α είναι ένας 2×2 πίνακας που έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, ο Α διαγωνοποιείται. Έστω $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (οι στήλες του Ρ είναι ιδιοδιανύσματα του Α). Τότε $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
iii. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}A^{2004}P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2004} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A^{2004}=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2004} \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} 2-2^{2004} & 1-2^{2004} \\ -2+2^{2005} & -1+2^{2005} \end{pmatrix}.$$

6. (10 μονάδες) Έστω ο πραγματικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Τα παρακάτω ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν με τη βοήθεια του Θεωρήματος Cayley – Hamilton.

i. Εκφράστε τον πίνακα A^{-2} ως πολυώνυμο του A. Υπόδειξη: Παράδειγμα 6.16 σελίδα 123.

ii. Αποδείξτε ότι $A^{2002} - 2A^{2001} = A^2 - 2A$.

Λύση

i. Τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $x^3 - 2x^2 - x + 2$. Αφού ο σταθερός όρος δεν είναι μηδέν, ο A είναι αντιστρέψιμος. Από το Θεώρημα Cayley – Hamilton έχουμε $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$ και πολλαπλασιάζοντας με τον A^{-1} παίρνουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I\right).$$

Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε

$$A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I + A^{-1}\right).$$

Άρα $A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I + \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I\right)\right) = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{5}{4}I.$

ii. Η σχέση $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$ γράφεται $A^3 - 2A^2 = A - 2I$, οπότε

$$A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A$$

$$A^5 - 2A^4 = A^3 - 2A^2 = A - 2I$$

$$A^6 - 2A^5 = A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A$$

κλπ

Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο n ότι

$$A^{2n} - 2A^{2n-1} = A^2 - 2A,\ n \geq 2.$$

Επομένως $A^{2002} - 2A^{2001} = A^2 - 2A$.