# ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΠΛΗ 12: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι**

**3η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ??-01-2003**

*Οι ερωτήσεις αφορούν θέματα από τις 3 πρώτες Ενότητες του 2ου Συγγράμματος του μαθήματος (Λογισμός Μιας Μεταβλητής), μέχρι τη σελ.47.* ***Η ημερομηνία παράδοσης της εργασίας είναι η 10η Φεβρουαρίου 2003.***

**Άσκηση 1. α)** **(5 μονάδες)** Να λύσετε την εξίσωση $27z^6+1=0$ στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

**β)** **(5 μονάδες)** (*ειδική περίπτωση Απολλώνιου*[1] *κύκλου*) Θεωρούμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z$ με την ιδιότητα

$$|z-i|=\sqrt{2}\,|z-1|.$$

Δείξτε ότι η εικόνα του συνόλου αυτού στο μιγαδικό επίπεδο είναι ένας κύκλος. Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

**γ)** **(5 μονάδες)** Υπολογίστε την παράσταση $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{60}}{(4i)^{30}}$. (*Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα de Moivre*[2]).

**Άσκηση 2.** **(12 μονάδες)** Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1; Ποιες είναι επί; Στην περίπτωση που μια συνάρτηση είναι 1-1 και επί προσδιορίστε την αντίστροφή της.

**i)** $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ με $f(x)=\sqrt{x}$.

**ii)** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\,|x|$.

**iii)** $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=x^2-3x+2$.

**iv)** $t:\mathbb{R}\to(-\infty,0]$ με $t(x)=-|x|$.

---

[1] Απολλώνιος από την Πέργη της Παμφυλίας (~262-190 π.Χ.) Έλληνας γεωμέτρης της αρχαιότητας, γνωστός (μεταξύ άλλων) για την μνημειώδη πραγματεία του «*περί κωνικών*» στην οποία εισάγεται για πρώτη φορά ο όρος «*έλλειψη*» για το γνωστό γεωμετρικό σχήμα.

[2] Abraham de Moivre (1667-1754) Γάλλος μαθηματικός, φίλος του Sir Isaac Newton, γνωστός εκτός από τον φερώνυμο τύπο που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς με την τριγωνομετρία, και για τις μελέτες του στην κανονική κατανομή και τη Θεωρία Πιθανοτήτων γενικότερα.

**Άσκηση 3. α)** **(5 μονάδες)** Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \dfrac{n\cdot(200-n)}{200}$, $n=1,2,3,\ldots$

Υπολογίστε με την αριθμομηχανή του υπολογιστή σας τους όρους $a_{50}, a_{60}, a_{70}$, $a_{80}, a_{90}, a_{95}$. Από τους υπολογισμούς που κάνατε φαίνεται ότι η ακολουθία συγκλίνει; Αν ναι, σε ποιον αριθμό;

Υπολογίστε τον $a_{250}$. Η τιμή που βρήκατε είναι σε συμφωνία με τα προηγούμενα συμπεράσματά σας; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**β)** **(5 μονάδες)** Σ' έναν φοιτητή δίνεται η ακόλουθη άσκηση:

«Θεωρούμε την ακολουθία του Fibonacci[1] που ορίζεται ως εξής: $a_1 = a_2 = 1$ και $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Υπολογίστε το όριό της, αν φυσικά αυτό υπάρχει.» Ο φοιτητής δίνει την ακόλουθη λύση: «Έστω $x = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Τότε $x = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+2}$. Άρα $x = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} + \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x + x = 2x$. Συνεπώς $x = 0$». Βρείτε τα τυχόν λάθη στον παραπάνω συλλογισμό του φοιτητή.

**Άσκηση 4. α)** **(8 μονάδες)** Θεωρούμε γνωστό ότι αν $|x|<1$ τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$. Δείξτε ότι αν $a_n \neq 0$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$ και $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \theta < 1$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

**β)** **(5 μονάδες)** Υπολογίστε το $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n}{n!} + \dfrac{3n^2+n+1}{4n^2-1}\right)$.

**γ)** **(10 μονάδες)** Εδώ χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Bernoulli[2]:

Αν ε > -1 τότε $(1+\varepsilon)^n \geq 1+n\varepsilon$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

**i)** Έστω $\sqrt[3n]{n^2+n+1} = 1+\delta_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli δείξτε ότι: $n\delta_n < \sqrt[3]{n^2+n+1}$ για κάθε $n$.

**ii)** Βρείτε το $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2+n+1}$, αφού πρώτα βρείτε το $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3n]{n^2+n+1}$.

---

[1] Leonardo της Πίζας (Pisano) ή Fibonacci (1170-1240), γιος του Guilielmo Bonacci (εξ ου και το ψευδώνυμο "Fibonacci" (=γιος του Bonacci).

[2] Johann Bernoulli (1667-1748) Ίσως ο σημαντικότερος εκπρόσωπος της διάσημης ελβετικής οικογένειας μαθηματικών, των Bernoulli, με ιδιαίτερη συμβολή στην ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού. Σ' αυτόν οφείλονται και οι γνωστοί κανόνες υπολογισμού απροσδιόριστων μορφών που δημοσίευσε το 1696 ο μαθητής του μαρκήσιος Guillaume François Antoine de L'Hôpital.

**Άσκηση 5.**

*Η άσκηση αυτή συνδέει τις γνώσεις σας από τη Γραμμική Άλγεβρα, τους μιγαδικούς αριθμούς και το όριο ακολουθίας.*

Δίνεται η ακολουθία $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, με

$$2a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \text{ και } a_1 = a_2 = 1.$$

**α) (5 μονάδες)**

Γράψτε τις σχέσεις $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \\ a_{n+1} = a_{n+1} \end{cases}$ στη μορφή $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, όπου $A$ ένας τετραγωνικός 2×2 πίνακας.

**β) (8 μονάδες)** Διαγωνιοποιώντας τον $A$, βρείτε τις δυνάμεις $A^n$ του πίνακα $A$.

**γ) (5 μονάδες)** Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική μορφή των ιδιοτιμών του $A$ βρείτε τον γενικό τύπο της $a_n$. Υπολογίστε στη συνέχεια το όριό της.

**Άσκηση 6. α) (12 μονάδες)** Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

**i)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n!}$, **ii)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{3}{5}\right)^{n^2}$, **iii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$, **iv)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$.

**β) (10 μονάδες)** Υπολογίστε τα αθροίσματα:

**i)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n}$ και **ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

## ΛΥΣΕΙΣ 3$^{ης}$ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

**Άσκηση 1.**

**Λύση: α)** $27z^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -\frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^3}(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Κατά συνέπεια $z = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6})$, $k = 0,1,2,\ldots 5$. Παίρνουμε τις ρίζες

$$z_0 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{6},$$
$$z_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{3\pi}{6} + i\sin\tfrac{3\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}) = i\,\tfrac{\sqrt{3}}{3},$$
$$z_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{6},$$
$$z_3 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{7\pi}{6} + i\sin\tfrac{7\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\,\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2} - i\,\tfrac{\sqrt{3}}{6},$$
$$z_4 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{9\pi}{6} + i\sin\tfrac{9\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}) = -i\,\tfrac{\sqrt{3}}{3},$$
$$z_5 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\tfrac{11\pi}{6} + i\sin\tfrac{11\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\,\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} - i\,\tfrac{\sqrt{3}}{6}.$$

Παρατηρούμε ότι: $z_0=\overline{z_5}$, $z_1=\overline{z_4}$ και $z_2=\overline{z_3}$.

**β) 1ος τρόπος:** Έστω $z=x+iy,\quad x,y\in\mathbb{R}$. Έχουμε: $|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ και $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

Άρα $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2(x-1)^2+2y^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+1-2y=2x^2+2-4x+2y^2\Leftrightarrow x^2+1-4x+y^2+2y=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=2^2$ που είναι η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $(2,-1)\equiv 2-i$ και ακτίνα 2.

**2ος τρόπος:** Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $|z-w|^2=|z|^2+|w|^2-\bar{z}w-z\bar{w}$.

($|z-w|^2=(z-w)\overline{(z-w)}=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})=z\bar{z}+w\bar{w}-\bar{z}w-z\bar{w}=|z|^2+|w|^2-\bar{z}w-z\bar{w}$).

Επομένως,

$|z-i|=\sqrt{2}\,|z-1|\Leftrightarrow|z-i|^2=2|z-1|^2\Leftrightarrow|z|^2+1-\bar{z}i+iz=2|z|^2+2-2\bar{z}-2z\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z|^2-\bar{z}(2-i)-z(2+i)+1=0\Leftrightarrow|z|^2-\bar{z}(2-i)-z\overline{(2-i)}+|2-i|^2=-1+|2-i|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|z-(2-i)|^2=-1+4+1\Leftrightarrow|z-(2-i)|=2.$

γ) $A=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{60}}{(4i)^{30}}=\dfrac{2^{60}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{60}}{4^{30}i^{30}}=\dfrac{2^{60}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^{60}}{(2^2)^{30}(i^2)^{15}}=\dfrac{2^{60}(\cos\frac{60\pi}{3}+i\sin\frac{60\pi}{3})}{2^{60}(-1)^{15}}=$

$=\dfrac{\cos(10(2\pi))+i\sin(10(2\pi))}{-1}=\dfrac{1}{-1}=-1.$

**Άσκηση 2.**

**Λύση:** i) Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε $\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow\left(\sqrt{x_1}\right)^2=$ $=\left(\sqrt{x_2}\right)^2\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα η $f$ είναι 1-1.

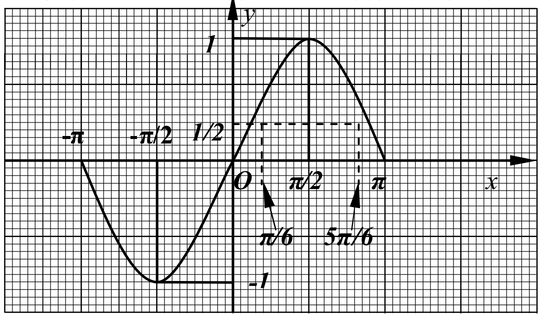
Έστω $y\in[0,+\infty)$. Θέτουμε $x=y^2\in[0,+\infty)$. Προφανώς $f(x)=\sqrt{x}=\sqrt{y^2}\underset{y\geq 0}{=}y$. Άρα η $f$ είναι και επί. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $f^{-1}(x)=x^2$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

ii) Αν $x\in(-2,2)$ τότε $|x|<2\Leftrightarrow x^2=|x|^2=|g(x)|<4\Leftrightarrow g(x)\in(-4,4)\subseteq[-4,4]$. Επίσης, επειδή το $(-4,4)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $[-4,4]$, η συνάρτηση δεν είναι επί.

Έστω $x_1,x_2\in(-2,2)$ με $g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow x_1|x_1|=x_2|x_2|$. Τότε $|g(x_1)|=|g(x_2)|\Leftrightarrow x_1^2=$ $=x_2^2\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Leftrightarrow|x_1|=|x_2|$. Αν $|x_1|=|x_2|=0$ τότε προφανώς $x_1=x_2=0$. Έστω $|x_1|=|x_2|>0$. Τότε $g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow x_1|x_1|=x_2|x_2|\underset{|x_1|=|x_2|>0}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$. Άρα η $g$ είναι 1-1.

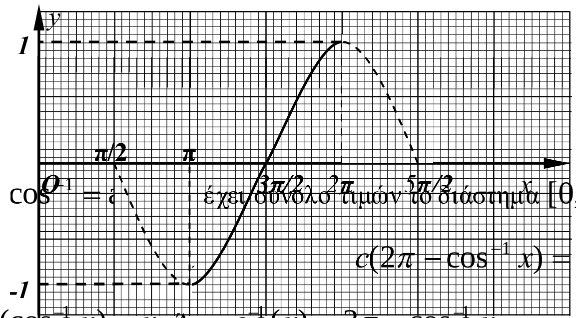
iii) Η $h$ δεν είναι 1-1 γιατί $h(1)=h(2)=0$. Αν ήταν επί τότε θα υπήρχε $x\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $h(x)=-1$. Αλλά η εξίσωση $h(x)=x^2-3x+2=-1\Leftrightarrow x^2-3x+3=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-3<0$ και συνεπώς δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα η $h$ δεν είναι επί.

iv) Η συνάρτηση $s$ είναι επί, όπως προκύπτει από τη ακόλουθη γραφική παράσταση:




Παρατηρούμε ότι $s(-\pi)=s(0)=s(\pi)=0$ και επομένως η $s$ δεν είναι 1-1. (Η $h(\pi/6)=h(5\pi/6)=\frac{1}{2}$).

v) Η συνάρτηση $c$ είναι γνησίως αύξουσα (άρα 1-1) και επί, όπως προκύπτει από την ακόλουθη γραφική παράσταση:




Εξ ορισμού, η συνάρτηση $\cos^{-1} =$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0,\pi]$. Παρατηρούμε ότι $2\pi-\cos^{-1}x\in[\pi,2\pi]$ $c(2\pi-\cos^{-1}x)=\cos(2\pi-\cos^{-1}x)=$
$=\cos(-\cos^{-1}x)=\cos(\cos^{-1}x)=x$. Άρα $c^{-1}(x)=2\pi-\cos^{-1}x$.

**Άσκηση 3.**

**α)** $a_{50}=37,5,\ a_{60}=42,\ a_{70}=45,5,\ a_{80}=48,\ a_{90}=49,5,\ a_{95}=49,875,\ a_{99}=49,995$.

Από τους υπολογισμούς αυτούς φαίνεται ότι η ακολουθία συγκλίνει στο 50. Παρατηρούμε όμως ότι $a_{150}=37,5,\ a_{160}=32,\ a_{170}=25,5,\ a_{180}=18$, δηλαδή οι όροι της ακολουθίας απομακρύνονται από το υποτιθέμενο όριο 50. Επομένως δεν αρκεί να βρούμε όρους της ακολουθίας $(a_n)$ (για μεγάλα $n$) που να απέχουν από έναν αριθμό μικρή απόσταση (αυθαίρετα εκλεγμένη, άρα οσοδήποτε μικρή), αλλά θα πρέπει και **οι επόμενοι απ' αυτούς όροι** να απέχουν από τον ίδιο αριθμό την ίδια ή μικρότερη απόσταση.

**β)** $b_{150}=0,027,\ b_{170}=0,039,\ b_{190}=0,105,\ b_{195}=0,205$. Δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλές συμπέρασμα για το αν η ακολουθία συγκλίνει ή όχι.

Παρατηρούμε ότι για $n>200$ έχουμε

$$|b_n| = \left|\frac{200}{(n+1)(199-n)}\right| = 200\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n-199} \underset{n-199\geq 2}{\leq} 200\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{100}{n+1} < \frac{100}{n}.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αν $n_1 = \left[\frac{100}{\varepsilon}\right] + 1$, τότε $n_1 > \frac{100}{\varepsilon}$. Θέτουμε $n_0 = \max\{201, n_1\}$. Για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε: $n \geq n_0 \geq n_1 > \frac{100}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{100}{n} < \varepsilon$.

Επειδή $n > 200$ θα έχουμε $|b_n| = \left|\frac{200}{(n+1)(199-n)}\right| < \frac{100}{n} < \varepsilon$ και επομένως η $(b_n)$ είναι μηδενική.

**Άσκηση 4.**

**α)** Προφανώς $n^2 + n + 1 > 1$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

Άρα $\sqrt[3n]{n^2+n+1} > 1 \Rightarrow \delta_n = \sqrt[3n]{n^2+n+1} - 1 > 0$.

Από την ανισότητα του Bernoulli παίρνουμε: $\sqrt[3]{n^2+n+1} = \left(\sqrt[3n]{n^2+n+1}\right)^n = (1+\delta_n)^n \geq$ $\geq 1 + n\delta_n > n\delta_n$.

**β)** Από το α) παίρνουμε $n\delta_n < \sqrt[3]{n^2+n+1} \Rightarrow \delta_n < \sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt[3]{0+0+0} = 0$

και επειδή $\delta_n > 0$, έπεται ότι $\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3n]{n^2+n+1} = 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 1$. Κατά συνέπεια $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3n]{n^2+n+1}\right)^3 = 1^3 = 1$.

**γ)** $$n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = n\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{(3n^2+4n+1)\sqrt{4n+3}}{(4n^2-1)\sqrt{n+1}}\right\} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+4n+1}{4n^2-1}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4n+3}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{3+4\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4+(3/n)}{1+(1/n)}} = \frac{3}{4}\sqrt{4} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n+1} = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^2 \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right) =$$

$$= e^2\cdot 1 = e^2$$

**Άσκηση 5.**

**α)** Προφανώς $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, δηλαδή $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Άρα $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A$ είναι $\begin{vmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda - 1 = (\lambda + 2)(\lambda - \frac{1}{2})$.

Ιδιοτιμές είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Ιδιοδιανύσματα: Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$.

$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$. Άρα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, όπου $y \neq 0$. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να δείξει κανείς ότι το διάνυσμα $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Ο πίνακας $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος (εφόσον η ορίζουσά του είναι ίση με $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$) με αντίστροφο $P^{-1} = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Άρα

$$A^n = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\left(\tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & \lambda_1\lambda_2^{n+1} - \lambda_2\lambda_1^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1\lambda_2^n - \lambda_2\lambda_1^n \end{pmatrix}.$$

Επομένως

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & \lambda_1\lambda_2^{n+1} - \lambda_2\lambda_1^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1\lambda_2^n - \lambda_2\lambda_1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} a_2(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) + a_1(\lambda_1\lambda_2^{n+1} - \lambda_2\lambda_1^{n+1}) \\ a_2(\lambda_1^n - \lambda_2^n) + a_1(\lambda_1\lambda_2^n - \lambda_2\lambda_1^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_2 - a_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^{n+1} + \frac{a_1\lambda_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^{n+1} \\ \frac{a_2 - a_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^n + \frac{a_1\lambda_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

.

Άρα $a_{n+1} = \dfrac{a_2 - a_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^n + \dfrac{a_1\lambda_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^n$ και, αντικαθιστώντας το $n$ με το $n$-1 παίρνουμε

$$a_n = \frac{a_2 - a_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^{n-1} + \frac{a_1\lambda_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^{n-1}.$$

Έστω $a_1 = 2,\ a_2 = 1$.

Τότε $a_n = \dfrac{1-2\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^{n-1} + \dfrac{2\lambda_1-1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^{n-1} = \dfrac{1-2\cdot\frac{1}{2}}{-2-\frac{1}{2}}(-2)^{n-1} + \dfrac{-4-1}{-2-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 4\cdot\dfrac{1}{2^n}$.

Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 4\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

Έστω $a_1 = 1,\ a_2 = 3$.

Τότε

$$a_n = \frac{3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^{n-1} + \frac{\lambda_1-3}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^{n-1} = \frac{3-\frac{1}{2}}{-2-\frac{1}{2}}(-2)^{n-1} + \frac{-2-3}{-2-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -(-2)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Προφανώς η ακολουθία $-(-2)^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$ δεν συγκλίνει, ενώ η ακολουθία $2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$ είναι μηδενική. Άρα η ακολουθία $(a_n)$ δεν συγκλίνει.

**β)** Θα πρέπει να έχουμε: $2\lambda^{n+2} = 2\lambda^n - 3\lambda^{n+1}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Επειδή $a_1 a_2 \neq 0$ έπεται ότι $\lambda \neq 0$. Άρα $2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 = -2$ ή $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Άρα $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1(-2)^n + c_2\dfrac{1}{2^n}$.

Έστω $a_1 = 2,\ a_2 = 1$.

Τότε παίρνουμε $\begin{cases} -2c_1 + \dfrac{c_2}{2} = 2 \\ 4c_1 + \dfrac{c_2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 + \dfrac{c_2}{4} = 5 \\ c_1 = \dfrac{4-c_2}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 4 \\ c_1 = 0 \end{cases}$. Άρα $a_n = \dfrac{4}{2^n}$.

Έστω $a_1 = 1,\ a_2 = 3$.

$\begin{cases} -2c_1 + \dfrac{c_2}{2} = 1 \\ 4c_1 + \dfrac{c_2}{4} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 + \dfrac{c_2}{4} = 5 \\ c_1 = \dfrac{12-c_2}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 4 \\ c_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Άρα $a_n = \dfrac{1}{2}(-2)^n + 4\cdot\dfrac{1}{2^n}$.

**Άσκηση 6.**

**α)**

**i)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου στις σειρές $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ και $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n+1}=0<1$ και επομένως η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ συγκλίνει.

Ο έλεγχος της σύγκλισης της σειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$ είναι πανομοιότυπος (και προκύπτει ότι και η σειρά αυτή συγκλίνει). Άρα η αρχική σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{n!}$ συγκλίνει.

**ii)** Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right]=0<1$. Άρα η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n^2}$ συγκλίνει.

**iii)** Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n+1}/(n+1)^2}{2^n/n^2}=2\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2=2>1$ και επομένως η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}$ αποκλίνει.

**iv)** Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}>\dfrac{n^{2/3}}{n+1}\geq\dfrac{n^{2/3}}{2n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^{1/3}}$ για κάθε $n>0$. Εφόσον η σειρά $\zeta(1/3)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/3}}$ αποκλίνει, έπεται ότι και η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$ αποκλίνει.

**β)** Υπολογίστε τα αθροίσματα:

**i)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{1}{5/9}=\dfrac{9}{5}$.

**ii)** Θέτουμε

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{a}{3n-2}+\frac{b}{3n+1}\Rightarrow 1=a(3n+1)+b(3n-2)=(3a+3b)n+a-2b$$

.

Άρα $\begin{cases}3a+3b=0\\ a-2b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b\\ -3b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

Επομένως $\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3m+1}\right)$.

Κατά συνέπεια $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{1}{3m+1}\right)=\dfrac{1}{3}$.