ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΛΗ 12: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι

ΛΥΣΕΙΣ 4ης ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. (20 μον.) Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)-\sin^2 x}{x^4}$ (β) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{e^{3/x}-1}$ (γ) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ (δ) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε όπου χρειάζεται τον κανόνα του L'Hospital. Στα (γ) και (δ) βρείτε πρώτα το όριο του λογάριθμου του ζητούμενου ορίου.

ΛΥΣΗ 1α)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)-\sin^2 x}{x^4}$$

$$=^{L.H.}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2(2x)-2\sin x\cos x}{4x^3}=^{L.H.}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x^2-2x\sin x^2 2x-2\cos^2 x+2\sin^2 x}{12x^2}=^{L.H.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x^2-4x^2\sin x^2-2\cos^2 x+2\sin^2 x}{12x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x^2 2x-8x\sin x^2-4x^2\cos x^2 2x+4\cos x\sin x+4\sin x\cos x}{24x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-4x\sin x^2-8x\sin x^2-8x^3\cos x^2+8\cos x\sin x}{24x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x^2-4x\cos x^2(2x)-24x^2\cos x^2+8x^3\sin x^2(2x)-8\sin^2 x+8\cos^2 x}{24}=$$

$$=\frac{0-0-0+0-0+8}{24}=\frac{1}{3}$$

Λύση 1β)

Ο κανόνας πηλίκων οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή 0/0 οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{e^{3/x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{e^{\frac{3}{x}}\left(-\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^3 3}=\frac{1}{3} \text{ επειδή } \lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

Λύση 1γ)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\ln\frac{1}{x}}\right)^{\tan x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\tan x\ln\frac{1}{x}}$$

Αρκεί να βρω το $\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln\frac{1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\tan x}} =_{L.H.} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}x = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0^+} x = 1^2 0 = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\tan x \ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

Λύση 1δ)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(e^{\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}$$

Υπολογίζω το $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)}{\frac{1}{x}} =_{L.H.} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{2x+1}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{2x+1}\left(\frac{4x-2(2x+1)}{4x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{2x+1}\frac{-2}{4x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{4x^2(2x+1)}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4xx^2}{4x^2(2x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)} = e^0 = 1$

2. (20 μον.)

(α) Αν $x^2 - y^2 = 1$ δείξτε ότι $y'' = -1/y^3$ όπου $y' = dy/dx$ δηλώνει την παράγωγο της συνάρτησης *y(x)* ως προς *x* .

Λύση 2α

Παραγωγίζοντας ως προς x τη σχέση

$x^2 - y^2 = 1$ (*)

έχουμε

$2x - 2yy' = 0 \quad\to\quad y' = x/y$ (**)

οπότε παραγωγίζοντας και πάλι ως προς x παίρνουμε

$y'' = 1/y - xy'/y^2 \quad\to\quad y'' = (y^2 - x^2)/y^3$

όπου κάναμε χρήση της σχέσης (**) . Τελικά, λόγω της αρχικής σχέσης (*) βρίσκουμε

$y'' = -1/y^3$

(β) Να υπολογισθεί η παράγωγος $y' = dy/dx$ της συνάρτησης $y = x^{1/x}$

(Χρησιμοποιείστε αν θέλετε λογαρίθμους).

ΛΥΣΗ 2β

$$y = x^{\frac{1}{x}}, x^{\frac{1}{x}} = \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$y' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$

(γ) Αν $x = \rho(\theta)\cos\theta$, $y = \rho(\theta)\sin\theta$, δείξτε ότι $\dfrac{xx' + yy'}{xy' - yx'} = \dfrac{\rho'}{\rho}$, όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς θ.

ΛΥΣΗ 2γ

$x = p(\theta)\cos\theta$, $y = p(\theta)\sin\theta$

$$\frac{xx' + yy'}{xy' - yx'} = \frac{p\cos\theta\left(p'\cos\theta - p\sin\theta\right) + p\sin\theta\left(p'\sin\theta + p\cos\theta\right)}{p\cos\theta\left(p'\sin\theta + p\cos\theta\right) - p\sin\theta\left(p'\cos u - p\sin\theta\right)} =$$

$$\frac{pp'\cos^2\theta - p'\cos\theta\sin\theta + pp'\sin^2\theta + p^2\cos\theta\sin\theta}{pp'\cos\theta + p^2\cos^2\theta - pp'\cos\theta\sin\theta + p^2\sin^2\theta} =$$

$$\frac{pp'\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}{p^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = \frac{p'}{p}$$

(δ) Αν $x = x(y)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $y = y(x)$, τότε η εξίσωση $y'' - xy'^3 + e^y y'^3 = 0$ μετασχηματίζεται στην $x'' + x = e^y$.

ΛΥΣΗ 2δ

Επειδή $x' \cdot y' = 1 \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{x'}$

Παραγωγίζοντας την $x' \cdot y' = 1$ ως προς x έχω:

$$x'' \cdot (y')^2 + x' \cdot y'' = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{x'' \cdot (y')^2}{x'}$$

Έτσι η

$y'' - x \cdot (y')^3 + e^y \cdot (y')^3 = 0$ γίνεται:

$$-\frac{x'' \cdot (y')^2}{x'} - x \cdot \frac{1}{(x')^3} + e^y \cdot \frac{1}{(x')^3} = 0 \Leftrightarrow -\frac{x''}{(x')^3} - x \cdot \frac{1}{(x')^3} + e^y \cdot \frac{1}{(x')^3} = 0 \Leftrightarrow x'' + x = e^y$$

3. (α) (5 μον.) Εξετάστε αν η ακόλουθη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο x = 0.

ΛΥΣΗ 3α

Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{\dfrac{x}{1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

ξεχωρίζοντας τις περιπτώσεις:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{1+e^{u}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{1+e^{u}}=1$$

Αφού τα δύο αυτά όρια δεν ισούνται, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

(β) (10 μον.) Βρείτε τις τιμές των α, β και γ ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3} & , x<0\\ \gamma & , x=0\\ \dfrac{\sin x}{x^3}+\dfrac{\alpha}{x^2}+\beta & , x>0\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο x = 0.

ΛΥΣΗ 3β

Πρέπει $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=\gamma$.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\overset{L.H.}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-(\cos x-x\sin x)}{3x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$$

επομένως πρέπει $\gamma=\frac{1}{3}$.

Πρέπει

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^3}+\frac{\alpha}{x^2}+\beta=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sin x+3x\alpha+3\beta x^3}{3x^3}=\frac{1}{3}\quad\overset{L.H.}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to 0^+}\frac{3\cos x+3\alpha+9\beta x^2}{9x^2}=\frac{1}{3}$$

Αν ο αριθμητής του ορίου τείνει σε οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό εκτός του μηδενός η ισότητα αυτή είναι αδύνατη. Πρέπει λοιπόν $\lim_{x\to 0^+}(3\cos x+3\alpha+9\beta x^2)=0$

Έτσι $\lim_{x\to 0^+}(\cos x+\alpha+3\beta x^2)=0\quad\Leftrightarrow\quad 1+\alpha=0\quad\Leftrightarrow\quad \alpha=-1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x+\alpha+3\beta x^2}{3x^2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1+3\beta x^2}{3x^2}=\frac{1}{3} \overset{\text{L.H.}}{\Leftrightarrow}$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x+6\beta x}{6x}=\frac{1}{3} \overset{\text{L.H.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\cos x+6\beta}{6}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{2}$$

4. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής:

(α) (5 μον.) Θεωρείστε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)$ όπου ln( ) δηλώνει τον λογάριθμο με βάση το e και δείξτε ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών με α≠β ισχύει $|f(\alpha)-f(\beta)|\le|\alpha-\beta|$.

ΛΥΣΗ 4α

$f(x)=\ln(1+x^2)$

f: συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β)

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

Άρα από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει

$$\xi\in(\beta,a): f'(\xi)=\frac{f(a)-f(\beta)}{\alpha-\beta} \Leftrightarrow \frac{2\xi}{1+\xi^2}=\frac{f(a)-f(\beta)}{\alpha-\beta} \Leftrightarrow \left|\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right|=\frac{|f(a)-f(\beta)|}{|\alpha-\beta|}$$

Αρκεί να δειχτεί ότι

$$\left|\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right|\le 1 \Leftrightarrow \frac{|2\xi|}{1+\xi^2}\le 1 \Leftrightarrow |2\xi|\le 1+\xi^2 \Leftrightarrow 0\le 1+\xi^2-2|\xi|$$

το οποίο ισχύει.

Άρα $\dfrac{|f(a)-f(\beta)|}{|\alpha-\beta|}\le 1 \Leftrightarrow |f(a)-f(\beta)|\le|\alpha-\beta|$

(β) (5 μον.) Να δειχθεί ότι

$$n\beta^{n-1}(a-\beta)\le\alpha^n-\beta^n\le na^{n-1}(a-\beta) \qquad n\ge 1 \quad \text{με} \quad 0<\beta<\alpha$$

ΛΥΣΗ 4β

Θεωρώ την $f(x)=x^n$

Αυτή είναι συνεχής στο [β,α] και παραγωγίσιμη στο (β,α) $\left(f'(x)=nx^{n-1}\right)$

Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $x\in(\beta,\alpha): \dfrac{f(a)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=nx^{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{a^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=nx^{n-1}$

Όμως, εφόσον είναι όλα θετικά, είναι:

$$0<\beta<\chi<\alpha \Leftrightarrow \beta^{n-1}<x^{n-1}<a^{n-1} \Leftrightarrow n\beta^{n-1}<nx^{n-1}<na^{n-1} \Leftrightarrow n\beta^{n-1}<\frac{\alpha^n-\beta^n}{a-\beta}<na^{n-1} \Leftrightarrow$$

$n\beta^{n-1}(a-\beta)<a^n-\beta^n<na^{n-1}(a-\beta)$ εφόσον α-β>0

5. (α) (5 μον.) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3-3x+1$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα [1 , 2].

ΛΥΣΗ 5α

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3-3x+1$. Επειδή g(1)g(2)= - 3 και η g (ως πολυωνυμική) είναι συνεχής, από το θεώρημα Bolzano συνεπάγεται ότι στο [1, 2] υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.Επειδή $g'(x)=3x^2-3>0$ στο (1,2), η g(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (1,2) οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

(β) (10 μον.) Για να βρείτε τη ρίζα αυτή υπολογιστικά γράψτε την εξίσωση *g(x) = 0* στη μορφή *x = f(x),* επιλέγοντας μια κατάλληλη *f(x)* , ώστε η ακολουθία $\{x_n\}$ που προκύπτει από τη σχέση $x_{n+1} = f(x_n)$, n = 0,1,2,…όπου $x_0 \in [1 , 2]$, να συγκλίνει στη ζητούμενη ρίζα.

Υπόδειξη: Δοκιμάστε την:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{3x_n^{\ 3} + 3x_n - 1}{4x_n^{\ 2}} \qquad (*)$$

με $x_0 = 1$ και βρείτε τη ρίζα με ακρίβεια 3 ψηφίων. Πόσες επαναλήψεις της (*) χρειαστήκατε;

ΛΥΣΗ 5β

Η εξίσωση g(x)=0 γράφεται $x=\dfrac{3x^3+3x-1}{4x^2}$

$$f(x)=\frac{3x^3+3x-1}{4x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(9x^2+3\right)4x^2-\left(3x^3+3x-1\right)8x}{16x^4}=\frac{36x^4+12x^2-24x^4-24x^2+8x}{16x^4}$$

$$=\frac{12x^4-12x^2+8x}{16x^4}=\frac{4x\left(3x^3-3x+2\right)}{16x^4}=\frac{\left(3x^3-3x+2\right)}{4x^3}$$ το οποίο ικανοποιεί

$$0.5\le\frac{3x^3-3x+2}{4x^3}\le 0.625 \text{ για κάθε } x\in\left[1,2\right].$$

Επομένως η επαναληπτική σχέση $x_{n+1} = f(x_n)$, n = 0,1,2,…όπου $x_0 \in [1 , 2]$, θα συγκλίνει στη ζητούμενη ρίζα. Για να το δούμε αυτό υπολογίζουμε με $x_0=1$:

$$x_1=f(x_0)=\frac{3\cdot 1^3+3\cdot 1-1}{4\cdot 1}=1{,}25$$

$x_2=f(x_1)=1.3775$, $x_3=f(x_2)=1{,}4458378$, $x_4=f(x_3)=1{,}483517$, $x_5=f(x_4)=1{,}50459927$

…… $x_{10}=f(x_9)=1{,}5304544$, ….., $x_{16}=f(x_{15})=1{,}532033$, $x_{17}=f(x_{16})=1{,}532057$,….., οπότε και οι επαναλήψεις έχουν σταθεροποιήσει τα 3 πρώτα δεκαδικά ψηφία. Η τιμή της ρίζας με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων είναι ρ = 1.532088886..

(γ) (5 μον.) Δοκιμάστε τώρα μια επαναληπτική σχέση με $f(x)=(3x-1)/x^2$

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{3x_n - 1}{x_n^{\ 2}} \qquad (**)$$

Ποιά συγκλίνει πιο γρήγορα στη ζητούμενη ρίζα, η (*) ή η (**) και γιατί;

ΛΥΣΗ 5γ

Αφού

$$f(x)=\frac{3x-1}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2-\left(3x-1\right)2x}{x^4}=\frac{3x^2-6x^2+2x}{x^4}=\frac{-3x^2+2x}{x^4}=\frac{-3x+2}{x^3}$$

έχουμε: $-1 \le f'(x) \le -.5$ στο διάστημα [1 , 2] και η επαναληπτική σχέση (**) θα συγκλίνει αλλά πιο αργά από την (*) αφού η τιμή της $|f'(\rho)|$ στη ρίζα ρ είναι **μικρότερη** για την (*) από ότι είναι για την (**). Για να το δούμε αυτό θέτουμε πάλι $x_0 = 1$ και επαναλαμβάνοντας την (**) παίρνουμε

$x_1 = f(x_0) = 2$

$x_2 = f(x_1) = 1,250$, $x_3 = f(x_2) = 1,760$, $x_4 = f(x_3) = 1,3817488$, $x_5 = f(x_4) = 1,6474178$, $x_6 = f(x_5) = 1,45256986$,…, $x_{13} = f(x_{12}) = 1,5403785$, $x_{14} = f(x_{13}) = 1,52612419$, οι δε επαναλήψεις συνεχίζουν να δίνουν αριθμούς εναλλάξ πάνω και κάτω από το όριο μέχρις ότου σταθεροποιήσουν τα πρώτα 3 δεκαδικά ψηφία του ορίου στο 27^o βήμα:

$x_{27} = f(x_{26}) = 1,532175316$, $x_{28} = f(x_{27}) = 1,532026492$,…

Επομένως, η (*) συγκλίνει πιο γρήγορα.

6. (α) (5 μον.) Σε ένα πείραμα μελέτης της σχέσης μιας μεταβλητής y από την x, καταγράφονται οι αριθμοί (x , y) = (1, 2.2), (2, 3.8), (3, 5.8), (4, 8.2) και αναζητείται η ευθεία y = αx που περιγράφει καλύτερα τη γραφική τους παράσταση. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό σφάλμα, f(α),

$$f(\alpha) = (2.2-\alpha)^2 + (3.8-2\alpha)^2 + (5.8-3\alpha)^2 + (8.2-4\alpha)^2$$

των τετραγωνικών αποστάσεων των σημείων από την ευθεία. Βρείτε την τιμή του α που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση σφάλματος f(α).

ΛΥΣΗ 6α

Αφού ζητάμε το ελάχιστο της συνάρτησης σφάλματος παίρνουμε την παράγωγό της ως προς την άγνωστη παράμετρο α:

$f'(a) = 2(2.2-a)(-1) + 2(3.8-2a)(-2) + 2(5.8-3a)(-3) + 2(8.2-4a)(-4)$

$f'(a) = -4.4 + 2a - 15.2 + 8a - 34.8 + 18a - 65.6 + 32a$,

$f'(a) = 60a - 120$ και την θέτουμε ίση με το μηδέν οπότε έχουμε:

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 60a - 120 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

$f''(a) = 60$

$f''(2) = 60 > 0$

Άρα η κλίση της γραμμικής προσέγγισης y = αx των δεδομένων που δίνει την ελάχιστη τιμή του σφάλματος είναι α = 2.

(β) (10 μον.) Ένας κατασκευαστής κώνων με κομφετί, θέλει να γεμίσει κώνους με κυκλική βάση ακτίνας R και ύψος h, με μια ποσότητα κομφετί όγκου $V = \pi R^2 h/3 = \pi/3$ σε κάθε κώνο. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις R, h του κώνου ώστε να ελαχιστοποιείται η εξωτερική του επιφάνεια $S = \pi R\sqrt{h^2 + R^2}$, αν ο κώνος είναι ανοικτός (δηλαδή δεν υπολογίζουμε την κυκλική βάση);
Ποιες είναι οι διαστάσεις αυτές αν ο κώνος είναι κλειστός;

Υπόδειξη: Μελετήστε καλά τις ασκήσεις των σελ. 102 – 105, 113 – 115.

ΛΥΣΗ 6β

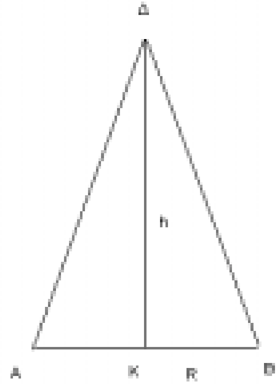
(β) (10 μον.) Ένας κατασκευαστής κώνων με κομφετί, θέλει να γεμίσει κώνους με κυκλική βάση ακτίνας R και ύψος h, με μια ποσότητα κομφετί όγκου $V = \pi R^2 h/3 = \pi/3$ σε κάθε κώνο. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις R, h του κώνου ώστε να ελαχιστοποιείται η εξωτερική του επιφάνεια $S = \pi R\sqrt{h^2 + R^2}$, αν ο κώνος είναι ανοικτός (δηλαδή δεν υπολογίζουμε την κυκλική βάση);

Ποιες είναι οι διαστάσεις αυτές αν ο κώνος είναι κλειστός;

Υπόδειξη: Μελετήστε καλά τις ασκήσεις των σελ. 102 – 105, 113 – 115.

$S = \pi R\sqrt{h^2 + R^2}$ και εμβαδόν βάσης $= \pi R^2$.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \Rightarrow R^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{R^2}$$



Αν ο κώνος είναι ανοιχτός, η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου είναι:

$$E(h) = \pi\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{h^2 + \frac{1}{h}} = \frac{\pi}{h}\sqrt{1+h^3}$$

Για να βρούμε την τιμή του h όπου η συνάρτηση αυτή έχει ακρότατο παίρνουμε την παράγωγό της και τη θέτουμε ίση με το μηδέν:

$E'(h) = \dfrac{3h\pi}{2\sqrt{1+h^3}} - \dfrac{\pi\sqrt{1+h^3}}{h^2} = 0 \quad \rightarrow 3h^3 = 2(1+h^3)$, από όπου αμέσως προκύπτει $h = (2)^{1/3}$ και $R = (h)^{-1/2} = (2)^{-1/6}$. Το ότι το ακρότατο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο διαπιστώνεται παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης E(h):

$E''(h) = \dfrac{\pi}{4h^3(1+h^3)^{3/2}}(16h^3 + 8 - h^6)$ και παρατηρώντας ότι είναι θετική για $h = (2)^{1/3}$

Αν θεωρήσουμε όμως ότι ο κώνος είναι κλειστός τότε η συνάρτηση του εμβαδού του και οι αντίστοιχες παράγωγοι αυτού είναι:

$$E(h) = \pi\frac{1}{h} + \pi\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{h^2 + \frac{1}{h}} = \frac{\pi}{h}\left(1 + \sqrt{1+h^3}\right) \quad \Rightarrow \quad E'(h) = \frac{3h\pi}{2\sqrt{1+h^3}} - \frac{\pi\left(1+\sqrt{1+h^3}\right)}{h^2}$$

$$E''(h) = -\frac{9h^3\pi}{4\left(1+h^3\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\pi\left(1+\sqrt{1+h^3}\right)}{h^3}$$

Θέτοντας πάλι τη πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν βρίσκουμε:

$$E'(h) = \frac{3h\pi}{2\sqrt{1+h^3}} - \frac{\pi\left(1+\sqrt{1+h^3}\right)}{h^2} = 0 \Rightarrow h = 2$$

$E''(2) = -\dfrac{9*2^3\pi}{4\left(1+2^3\right)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2\pi\left(1+\sqrt{1+2^3}\right)}{2^3} = \dfrac{\pi}{3} > 0$ Άρα έχουμε ελάχιστο για h=2 και $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
