ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΛΗ 12: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι

ΛΥΣΕΙΣ 5ης ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Άσκηση 1. (10 μον.)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Λύση:

α) Ο τύπος της σειράς με κέντρο το 0 είναι $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Υπολογίζουμε τις επιμέρους ποσότητες:

$$f(0)=\sin 0=0$$
$$f'(0)=(\sin x)'_{x=0}=(\cos x)_{x=0}=1$$
$$f''(0)=(\cos x)'_{x=0}=-(\sin x)_{x=0}=0$$
$$f'''(0)=(-\sin x)'_{x=0}=-(\cos x)_{x=0}=-1$$
$$f^{(4)}(0)=(-\cos x)'_{x=0}=(\sin x)_{x=0}=0$$
$$f^{(5)}(0)=(\sin x)'_{x=0}=(\cos x)_{x=0}=1$$

Και η σειρά τώρα είναι

$$\sin x = x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου x την ποσότητα $46^o=\frac{46\pi}{180}$, και χρησιμοποιώντας την τιμή του π, που μας δίνει η άσκηση βρίσκουμε:

$$\sin 46^o = 0.719382\,.$$

β) Ο τύπος της σειράς με κέντρο το $x_0=\pi/4$ είναι $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\pi/4)}{n!}(x-\frac{\pi}{4})^n$. Υπολογίζουμε τις επιμέρους ποσότητες:

$$f(\tfrac{\pi}{4})=\sin\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad , \qquad f'(\tfrac{\pi}{4})=(\sin x)'_{x=\frac{\pi}{4}}=(\cos x)_{x=\frac{\pi}{4}}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f''(\tfrac{\pi}{4})=(\cos x)'_{x=\frac{\pi}{4}}=-(\sin x)_{x=\frac{\pi}{4}}=-\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

Και η σειρά τώρα είναι

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+....$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου x την ποσότητα $46^o = \frac{46\pi}{180}$ και χρησιμοποιώντας την τιμή του π, που μας δίνει η άσκηση βρίσκουμε: $\sin 46^o = 0.71934$.

Η ακριβής τιμή, που δίνει ένας υπολογιστής τσέπης είναι: $\sin 46^o = 0.71934$ και άρα η δεύτερη μέθοδος είναι ακριβέστερη και γρηγορότερη.

Άσκηση 2. (10 μον.)

Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα των εμπλεκόμενων συναρτήσεων σε σειρές Maclaurin υπολογίστε τα όρια:

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

Λύση:

(ι) Το ανάπτυγμα Maclaurin του αριθμητή είναι:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - ...$$

και άρα το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(x^2 - \frac{x^6}{3!} + ..) = 1$$

(ιι) Το ανάπτυγμα Maclaurin του αριθμητή και του παρονομαστή είναι:

$$e^x - e^{-x} = 2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

και το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \cdots}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots} = 2$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα αποκτάται διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με x, και αντικαθιστώντας όπου x το 0.

Άσκηση 3. (15 μον.)

(α) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα:

i. $\int e^{\alpha x}\cos(bx)dx$ ii. $\int x^2 \ln x dx$ iii. $\int \ln(x^2+1)dx$

(β) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκλισης που παρουσιάζεται στην Παράγραφο 10.2 (σελ.162) του βιβλίου σας, ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

i. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ii. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$

σύμφωνα με το αν τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους με τα οποία οι σειρές αυτές συνδέονται δίνουν πεπερασμένο ή άπειρο αποτέλεσμα.

<u>Λύση</u>

(α)

i. Αν θέσουμε $I=\int e^{ax}\cos(bx)dx$, με επανειλημμένη χρήση της μεθόδου της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, έχουμε:

$$I=\int e^{ax}(\frac{\sin(bx)}{b})'dx=e^{ax}\frac{\sin(bx)}{b}-\int(e^{ax})'\frac{\sin(bx)}{b}dx=e^{ax}\frac{\sin(bx)}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}(\frac{-\cos(bx)}{b})'dx=$$

$$=e^{ax}\frac{\sin(bx)}{b}-\frac{a}{b}(-e^{ax}\frac{\cos(bx)}{b}+\int(e^{ax})'\frac{\cos(bx)}{b}dx)=$$

$$=e^{ax}\frac{\sin(bx)}{b}+\frac{ae^{ax}\cos(bx)}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos(bx)dx.$$

Άρα αποδείξαμε ότι $I=\frac{be^{ax}\sin(bx)+ae^{ax}\cos(bx)}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}I$ **.**

Λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς I έχουμε:

$$(1+\frac{a^2}{b^2})I=\frac{e^{ax}(b\sin(bx)+a\cos(bx))}{b^2}\Rightarrow I=\frac{e^{ax}(b\sin(bx)+a\cos(bx))}{a^2+b^2}$$

ii.

$$\int x^2\ln x dx=\int(\frac{x^3}{3})'\ln x dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}(\ln x)'dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$$

iii.

$$\int \ln(x^2+1)dx = \int (x)'\ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) - \int x(\ln(x^2+1))'dx =$$
$$= x\ln(x^2+1) - \int x\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'dx = x\ln(x^2+1) - \int x\frac{1}{x^2+1}(2x)dx =$$
$$= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$
$$= x\ln(x^2+1) - 2\int (1-\frac{1}{x^2+1})dx = x\ln(x^2+1) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$
$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\tan^{-1}x + c.$$

(β)

i. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, η οποία είναι προφανώς θετική στο διάστημα $[1,+\infty)$ αλλά και φθίνουσα γιατί:

$$f'(x) = (\frac{1}{\sqrt{2x+1}})' = ((2x+1)^{\frac{-1}{2}})' = -\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{-3}{2}}(2x+1)' = \frac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}} < 0.$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο σύγκλισης (Θεώρημα) της σελίδας 162 του βιβλίου σας, σύμφωνα με το οποίο το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν συγχρόνως. Έτσι για το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_1^{+\infty} (2x+1)^{\frac{-1}{2}}dx = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2\cdot 1+1}) = +\infty.$$

Άρα η υπό μελέτη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ αποκλίνει.

ii. Δουλεύοντας ανάλογα με το προηγούμενο υποερώτημα, χρησιμοποιούμε την θετική και φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4x^2}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^2}dx = \lim_{x\to+\infty}(\frac{-1}{4x} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}.$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα και η σειρά συγκλίνουν.

Άσκηση 4. (20 μον.)

Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του $I = \int_1^2 x^2 dx$ εργαστείτε ως εξής:

(α) Διαμερίστε το διάστημα ολοκλήρωσης σε ίσα υποδιαστήματα μήκους 1/n και ακολουθήστε τη διαδικασία που περιγράφεται στις σελίδες 139-141 του βιβλίου σας καταλήγοντας σε δύο ακολουθίες a_n, b_n που προσεγγίζουν το Ι ως "κάτω προσέγγιση" και "άνω προσέγγιση" αντίστοιχα.

(β) Μια άλλη μέθοδος για τον προσεγγιστικό υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων $I = \int_a^b f(x)dx$ είναι η **μέθοδος του τραπεζίου**, η οποία περιγράφεται από τον εξής αλγόριθμο**:**

Βήμα 1. Ορίζουμε φυσικό αριθμό n.

Βήμα 2. Χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Βήμα 3. Ορίζουμε τα άκρα των διαστημάτων $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ... $[x_{n-1},b]$, όπου

$$x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = x_1 + \Delta x, ...,\ b = x_{n-1} + \Delta x.$$

Βήμα 4. Υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\Delta x[f(a) + f(x_1)]\ ,\ A_2 = \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_1) + f(x_2)], \ldots,\ A_n = \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_{n-1}) + f(b)]$$

Βήμα 5. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται προσεγγιστικά από την ποσότητα

$$c_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad \text{αφού} \quad I = \lim_{n\to\infty} c_n \quad .$$

Βήμα 6. Εάν η προσέγγιση δεν είναι ικανοποιητική, πηγαίνουμε στο Βήμα 2 και αυξάνουμε τον αριθμό n των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίσαμε το [a, b].

Ποια από τις ακολουθίες a_n, b_n, c_n των προηγούμενων ερωτημάτων δίνει καλύτερη προσέγγιση του ακριβούς αποτελέσματος για n = 2, 3, 5, 10 ;

<u>Λύση</u>

(α) Διαμερίζοντας το διάστημα [1,2] σε ίσα υποδιαστήματα μήκους 1/n έχουμε:

$$1 = x_0 < x_1 = 1 + \frac{1}{n} < x_2 = 1 + \frac{2}{n} < \ldots < x_{k-1} = 1 + \frac{k-1}{n} < x_k = 1 + \frac{k}{n} < \ldots < x_n = 2.$$

Η λεπτότητα της διαμέρισης αυτής είναι $\lambda = \max\{x_k - x_{k-1},\ 1 \le k \le n\} = \dfrac{1}{n}$.

Δεδομένου τώρα ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι αύξουσα στο διάστημα [1,2] ($f'(x)=2x>0$, $x \in [1,2]$), οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές της στα υποδιαστήματα της παραπάνω διαμέρισης είναι αντίστοιχα:

$$\underline{f_k} = \min\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} = (1 + \frac{k-1}{n})^2,$$

$$\overline{f_k} = \max\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} = (1 + \frac{k}{n})^2.$$

Η "κάτω" προσέγγιση του ολοκληρώματος επομένως προκύπτει ως εξής (βλ. και τύπο 9.9 στη σελίδα 140 του βιβλίου σας):

$$a_n = \underline{E}(f) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot \underline{f_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1 + \frac{k-1}{n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 + \frac{2(k-1)}{n} + \frac{(k-1)^2}{n^2}) =$$

$$= \frac{1}{n}(n + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2) = 1 + \frac{2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k + \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 =$$

$$= 1 + \frac{(n-1)n}{n^2} + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6} = 1 + \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} =$$

$$= 1 + \frac{n-1}{n} + \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}.$$

Αντίστοιχα , για την "άνω" προσέγγιση του ολοκληρώματος έχουμε:

$$b_n = \overline{E}(f) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot \overline{f_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1 + \frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 + \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2}) =$$

$$= \frac{1}{n}(n + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2) = 1 + \frac{n(n+1)}{n^2} + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= 1 + \frac{n+1}{n} + \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}.$$

Παρατηρούμε επομένως ότι:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1 + 1 + \frac{2}{6} = \frac{7}{3}, \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = 1 + 1 + \frac{2}{6} = \frac{7}{3}.$$

Συνεπώς και το υπό μελέτη ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^2 dx$ είναι ίσο με $\frac{7}{3}$=2.333333.

(β) Ακολουθώντας τα βήματα του Αλγορίθμου που περιγράψαμε πιο πάνω για τον υπολογισμό των επί μέρους τραπεζίων, έχουμε στο παράδειγμα αυτό ότι οι προσεγγίσεις του εμβαδού για διαμερίσεις σε n τραπέζια :

$$c_n = \frac{1}{2n}\left(1 + 2(1 + \frac{1}{n})^2 + 2(1 + \frac{2}{n})^2 + ...2(1 + \frac{n-1}{n})^2 + 4\right)$$

Θέτοντας τώρα n = 2, 3, 5 ,10 στον τύπο αυτό παίρνουμε

$$c_2 = 2.375 \quad , \quad c_3 = 2.35185 \quad , \quad c_5 = 2.34 \quad , \quad c_{10} = 2.335$$

Στον επόμενο πίνακα καταγράφουμε τις προσεγγίσεις που δίνουν όλες οι προηγούμενες ακολουθίες για n=2, 3, 5 και 10, μαζί με τα αντίστοιχα σφάλματα αφαιρώντας κάθε αποτέλεσμα από τη σωστή απάντηση που είναι το 2.333333:

n	α_n	Σφάλμα	b_n	Σφάλμα	c_n	Σφάλμα
2	1,625	0,708	3,125	-0,792	2.375	-0,042
3	1,852	0,481	2,852	-0,519	2.3518	-0,0173
5	2,040	0,293	2,640	-0,307	2.34	-0,0067
10	2,185	0,148	2,485	-0,152	2.335	-0,00167

Από τον ως άνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι οι ακολουθίες των εκτιμήσεων του εμβαδού μέσω άνω και κάτω παραλληλογράμμων έχουν παρόμοια ακρίβεια, αλλά υστερούν κατά πολύ από τη μέθοδο των τραπεζίων της οποίας τα σφάλματα είναι πολύ μικρότερα. Ο λόγος για αυτό είναι βέβαια το γεγονός ότι τα τραπέζια αποτελούν ένα **μέσο όρο** μεταξύ των εκτιμήσεων των άνω και κάτω παραλληλογράμμων.

Άσκηση 5. (15 μον.)

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ είναι δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R, τότε για κάθε α, β ∈ (x_0 -R, x_0+R) ισχύει ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{\alpha}^{\beta} a_n (x-x_0)^n dx\right)$$

(α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}dx$, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη δυναμοσειρά για το cosx με $x_0 = 0$. Μέχρι ποιας τάξης όρους πρέπει να κρατήσετε για να μπορείτε να ισχυρισθείτε ότι βρήκατε το αποτέλεσμα με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων;

Λύση:

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του συνημιτόνου:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

υπολογίζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!}\ldots\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \frac{x^7}{8!}\ldots\right)dx$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{96} + \frac{1}{4320} - \frac{1}{322560} + \ldots.$$

Το αποτέλεσμα, κρατώντας στο ανάπτυγμα του συνημιτόνου όρους μέχρι και $8^{ης}$ τάξης, είναι:

$$I_8 = 0.239811714$$

Αν σταματούσαμε όμως σε όρους $6^{ης}$ τάξης θα παίρναμε την εκτίμηση I_6 = 0.2398148, η οποία είναι ακριβής όσον αφορά στα 5 πρώτα δεκαδικά ψηφία αφού ο όρος $8^{ης}$ τάξης αφαιρεί ποσότητα που είναι περίπου .000003.

(β) Αναλύστε την συνάρτηση $y(x) = e^{-x}$ σε σειρά Taylor με κέντρο $x_0 = 1$, μέχρι και τον $(x-1)^3$ όρο και υπολογίστε προσεγγιστικά το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx$. Πόσο διαφορετικό θα ήταν το αποτέλεσμα αν είχατε κρατήσει και όρους $(x-1)^4$; Θεωρείτε επιτυχή τη προσέγγιση μέχρι τον όρο $(x-1)^3$;

Λύση:

Το ζητούμενο ανάπτυγμα γράφεται:

$$e^{-x} = e^{-1} - e^{-1}(x-1) + \frac{1}{2!}e^{-1}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}e^{-1}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}e^{-1}(x-1)^4 ...$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα και κάνοντας τις πράξεις έχουμε:

$$I = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_1^2 \frac{e^{-1}}{x}(1 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!})dx$$

$$= \int_1^2 dx \; e^{-1}\left(\frac{-5}{2} + \frac{8}{3x} + x - \frac{x^2}{6} + \left[\frac{x^3}{24} - \frac{4x^2}{24} + \frac{6x}{24} - \frac{4}{24} + \frac{1}{24x}\right]\right)$$

όπου σε τετράγωνες παρενθέσεις έχουμε συμπεριλάβει τους όρους $4^{ης}$ τάξης του αναπτύγματος.

Υπολογίζοντας τα επί μέρους ολοκληρώματα μέχρι όρους $3^{ης}$ τάξης βρίσκουμε το αποτέλεσμα:

$$I_3 = e^{-1}\left(\frac{-5}{2} + \frac{8}{3}\ln 2 + \frac{3}{2} - \frac{7}{18}\right) = .4595 \; e^{-1}$$

Αν συμπεριλαμβάναμε και τους όρους $4^{ης}$ τάξης θα βρίσκαμε:

$$I_4 = e^{-1}\left(\frac{-16}{6} + \frac{65}{24}\ln 2 + \frac{15}{8} - \frac{7}{9} + \frac{15}{96}\right) = .4641 \; e^{-1}$$

Από το γεγονός ότι τα 2 αυτά αποτελέσματα έχουν μικρή διαφορά, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι βρίσκονται κοντά στη σωστή απάντηση. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται και από το ότι αν υπολογίζαμε το ολοκλήρωμα I με τη μέθοδο των τραπεζίων της Άσκησης 4, για διαμέριση σε 5 τραπέζια βάσης Δx = 1/5 θα παίρναμε $I_{τραπ} = .469134 \; e^{-1}$ που είναι επίσης κοντά στις ως άνω 2 εκτιμήσεις.

Άσκηση 6. (10 μον.)

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2x - 2}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2}$. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμά της $I = \int f(x)dx$ ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

(α) Αποδείξτε ότι ο παρονομαστής παραγοντοποιείται στην μορφή:

$$x^5-x^4+x^3-x^2 = x^2(x^2+1)(x-1)$$

και αναλύστε την f(x) σε "απλά" κλάσματα ως εξής:

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x-1} + \frac{\Delta x + E}{x^2+1}, \qquad (*)$$

όπου Α, Β, Γ, Δ, Ε είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Τα δύο πρώτα κλάσματα αντιστοιχούν στον παράγοντα x^2, το τρίτο στον x-1 ενώ το τέταρτο στον x^2+1.

(β) Υπολογίστε το ζητούμενο ολοκλήρωμα Ι χρησιμοποιώντας την ως άνω μορφή της f(x) (*) και τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων που αναφέρονται στις σελίδες 148-149 του βιβλίου σας.

Λύση

Η σχέση $x^5-x^4+x^3-x^2 = x^2(x^2+1)(x-1)$ μπορεί να ελεγχθεί εύκολα αν κανείς εκτελέσει τους πολλαπλασιασμούς στο δεύτερο μέρος.

Για την ανάλυση της f(x) σε απλά κλάσματα εργαζόμαστε ως εξής:

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x-1} + \frac{\Delta x + E}{x^2+1} \Leftrightarrow$$
$$x^4 + x^3 + 2x - 2 = Ax(x-1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + \Gamma x^2(x^2+1) + (\Delta x + E)x^2(x-1)$$

Η τελευταία σχέση δίνει:

Για x=0 → -2 = -B → B=2

Για x=1 → 2 = 2Γ → Γ=1

Για x=-1 → -4 = 4A-8+2-2(-Δ+E) → 2A+Δ-E = 1

Για x=2 → 26 = 10A+30+4(2Δ+E) → 5A+4Δ+2E = -2

Για x=-2 → 2 = -30A-10+-12(-2Δ+E) → 5A-4Δ+2E = -2

Τελικά **A=0, B=2, Γ=1, Δ=0, E=-1** και $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}$.

Έτσι το ζητούμενο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathrm{I} = \int f(x)dx = \int \frac{2}{x^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = 2\int x^{-2}dx + \int (x-1)^{-1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx =$$
$$= -\frac{2}{x} + \ln|x-1| - \tan^{-1} x + c.$$

Άσκηση 7. (10 μον.)

Το εμβαδόν Ε του χωρίου , που ορίζεται από την καμπύλη $y(x)=\ln^2 x$, τις ευθείες $x=1$, $x=2$ και τον άξονα των x, δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E=\int_1^2 \ln^2 x dx$$

(α) Βρείτε το εμβαδόν αυτό υπολογίζοντας το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \ln^2 x dx$, με τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης (βλ. παράδειγμα στη σελ. 150 του βιβλίου) και εφαρμόζοντας μετά το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού.

Λύση:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln^2 x dx &= x\ln^2 x\,|_1^2 - 2\int_1^2 \ln x dx\\ &= 2\ln^2 2 - 2(x\ln x\,|_1^2 - \int_1^2 dx)\\ &= 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2 = 0.188317\end{aligned}$$

(β) Βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται περιστρέφοντας τη συνάρτηση $y=\ln(x+1)$ γύρω από τον άξονα των x από x = 0 έως x =1 (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε αν θέλετε το αποτέλεσμα του (α)). Σχεδιάστε το στερεό αυτό και εξηγείστε τη σχέση του με το στερεό που παράγεται από την περιστροφή της συνάρτησης $y=e^x-1$ γύρω από τον άξονα των y, από x = 0 έως x = ln2.

Σύμφωνα με τον τύπο (1.1.3) , σελ. 176 του βιβλίου, ο ζητούμενος όγκος δίνεται από τον τύπο:

$$V=\pi\int_0^1 \ln^2(x+1)dx.$$

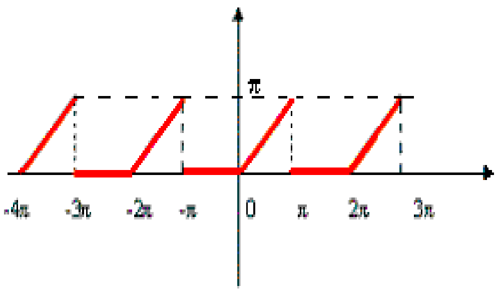
Αλλάζοντας μεταβλητές σε z = x+1 μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο αυτό χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α) ως εξής:

$$V=\pi\int_0^1 \ln^2(x+1)dx=\pi\int_1^2 \ln^2(z)dz=0.188317\pi$$

Τέλος, το στερεό που σχηματίζεται αν περιστρέψουμε τη συνάρτηση $y=e^x-1$ γύρω από τον άξονα των y, από x = 0 έως x = ln2 είναι **το ίδιο** με αυτό που μόλις υπολογίσαμε, αφού η $y=e^x-1$ είναι η **αντίστροφη της** $y=\ln(x+1)$, τα δε άκρα ολοκλήρωσης εύκολα δείχνεται ότι συμπίπτουν. Άρα και ο όγκος του στερεού αυτού είναι ίδιος με αυτόν που μόλις βρήκαμε δηλαδή V=0.188317π.

Άσκηση 8. (10 μον.)

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier στο διάστημα [-π, π] την περιοδική συνάρτηση με γραφική παράσταση:



και αποδείξτε ότι $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

<u>**Λύση**</u>

Από το σχήμα γίνεται φανερό ότι η υπό μελέτη συνάρτηση στο διάστημα [-π,0] είναι σταθερά ίση με **μηδέν**, ενώ στο [0,π] ο τύπος της είναι **f(x)=x**, ώστε η γραφική της παράσταση να είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο (0,0) και τέλος το (π,π). Άρα ο γενικός τύπος της θα είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (12.17)-(12.20) του βιβλίου σας για το διάστημα [-π,π], έχουμε το ανάπτυγμα Fourier της f(x) ως εξής:

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))$, όπου:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot\cos(nx)dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \int_{0}^{\pi} x\cdot\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} x'\cdot\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{\sin(n\pi)}{n} - 0 - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{0}{n} - \frac{1}{n}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω αν λάβουμε υπόψη μας ότι $(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=2k \\ -1, & \text{αν } n=2k+1 \end{cases}$, ως εξής: $a_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n=2k \\ \dfrac{-2}{\pi(2k-1)^2}, & \text{αν } n=2k\text{-}1 \end{cases}$, $k=1,2,3,\ldots.$

Ανάλογα υπολογίζουμε ότι:

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot\sin(nx)dx) = \frac{1}{\pi}(0+\int_{0}^{\pi} x\cdot(\frac{-\cos(nx)}{n})'dx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\left[x\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} x'\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}dx) = \frac{1}{\pi}(-\pi\cdot\frac{\cos(n\pi)}{n} + 0 + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\pi\cdot\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}) = \frac{1}{\pi}(-\pi\cdot\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\cdot 0) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο ανάπτυγμα Fourier της f(x) είναι:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x) + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)).$$

Εφαρμόζοντας τον τελευταίο τύπο για **x=0** έχουμε:

$$f(0) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(0)) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$
