ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 2002-3
¨ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι¨

ΕΡΓΑΣΙΑ 6 ΛΥΣΕΙΣ

1. (15 μον.) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(α) Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
(β) Είναι δυνατή η διαγωνιοποίηση του πίνακα A; Γιατί;
Εάν ο πίνακας διαγωνιοποιείται, να υπολογιστεί αντιστρέψιμος πίνακας P (καθώς και ο P^{-1}) έτσι ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
(γ) Να υπολογιστεί ο A^{20}.

Λύση

(α)

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} - 0 - 2 \begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2) = (\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0$.

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = 2$, 2 , 1

Για να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα λύνουμε το σύστημα $(\lambda I - \mathrm{A})\underline{x} = 0$ για κάθε μια από τις ιδιοτιμές.

$$\boldsymbol{\lambda = 2}, \ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \text{ Άρα } \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_2 \end{array}$$

Επομένως τα ιδιοδιανύσματα είναι $a\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$..

$$\boldsymbol{\lambda = 1}, \ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3' = \Gamma_3 + \Gamma_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \text{ Άρα } \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = x_3 \end{array}$$

Επομένως τα ιδιοδιανύσματα είναι $a\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(β) Η διαγωνοποίηση του πίνακα A είναι δυνατή αφού έχουμε τρία (3) γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

(γ) $P=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ και $D=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=P^{-1}AP$

(δ) $A=PDP^{-1}\Rightarrow A^{20}=PD^{20}P^{-1}$

$$A^{20}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{20} & 0 & 0\\ 0 & 2^{20} & 0\\ 0 & 0 & 1^{20}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2^{20}+2 & 0 & -2^{21}+2\\ 2^{20}-1 & 2^{20} & 2^{20}-1\\ 2^{20}-1 & 0 & 2^{21}-1\end{bmatrix}$$

2. (5 μον.) Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & & & + & bx_3 & = & 2\\ ax_1 & + & ax_2 & + & 4x_3 & = & 4\\ & & ax_2 & + & 2x_3 & = & b\end{array}$$

Να βρεθούν τα a και b για τα οποία το παραπάνω σύστημα έχει:
(i) μοναδική λύση, **(ii)** άπειρες λύσεις και **(iii)** καμία λύση.

Λύση

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2\\ a & a & 4 & 4\\ 0 & a & 2 & b\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2\\ 0 & a & 4-b & 2\\ 0 & a & 2 & b\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3=\Gamma_3-\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2\\ 0 & a & 4-b & 2\\ 0 & 0 & b-2 & b-2\end{array}\right].$$

Από τον τελευταίο πίνακα συμπεραίνουμε τα εξής.

(i) Το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν $b\neq 2$ και $a\neq 0$.

(ii) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν $b=2$ και $a=0$ **ή** $b=2$ και $a\neq 0$.

(iii) Το σύστημα δεν έχει καμία λύση όταν $b\neq 2$ και $a=0$.

3. (10 μον.) Εστω φ: $R^3 \to R^3$ γραμμική απεικόνιση της οποίας ο αντίστοιχος πίνακας ως προς την συνήθη βάση του R^3 είναι $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(α) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του διανυσματικού χώρου Kerφ.
(β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του διανυσματικού χώρου $\varphi(R^3)$.
(γ) Ποιο (ά) από τα διανύσματα $(3,1,-1)^t$, $(1,2,3)^t$ ανήκει(ουν) στο $\varphi(R^3)$;

Λύση

(α) Έστω A ο δεδομένος πίνακας. Λύνοντας το σύστημα $AX = 0$ βλέπουμε ότι $\ker\phi = \{a(-2,-1,1)^t \,|\, a \in \mathbb{R}\}$. Μια βάση αυτού είναι το σύνολο $\{(-2,-1,1)^t\}$ και η διάστασή του είναι 1.
(β) Από τη σχέση $3 = \dim\ker\phi + \dim\phi(\mathbb{R}^3)$ και το ερώτημα (α) έπεται ότι $\dim\phi(\mathbb{R}^3) = 2$. Ξέρουμε ότι ο χώρος $\phi(\mathbb{R}^3)$ παράγεται από τις στήλες του πίνακα A. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A είναι, για παράδειγμα, οι πρώτες δύο. Άρα μια βάση του χώρου αυτού είναι το σύνολο $\{(1,2,-1)^t, (2,-1,0)^t\}$.
(γ) Εξετάζουμε ποιό (ά) από τα συστήματα $AX = (3,1,-1)^t$, $AX = (1,2,3)^t$ έχει λύση. Με γραμμοπράξεις εύκολα επαληθεύεται ότι το πρώτο σύστημα έχει λύση ενώ το δεύτερο δεν έχει λύση. Άρα $(3,1,-1)^t \in \varphi(R^3)$ και $(1,2,-3)^t \notin \varphi(R^3)$. (Σημείωση: Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να εξετάσουμε ποιά από τα $(3,1,-1)^t$, $(1,2,3)^t$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης που βρήκαμε στο (β)).

4. (10 μον.)
α) Έστω Π_2 ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ 2. Αποδείξτε ότι μια βάση του Π_2 είναι το σύνολο $\{1, t-1, (t-1)^2\}$ και βρείτε την παράσταση του $5t^2 + 3t + 2$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της παραπάνω βάσης.
β) Ποιές είναι οι δυνατές τιμές για τη διάσταση της τομής δύο υποχώρων του R^3 που έχουν διάσταση 2. Δώστε παραδείγματα σε κάθε περίπτωση.

Λύση

(α) Επειδή η διάσταση του Π_2 είναι 3, αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{1, t-1, (t-1)^2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έχουμε

$$a1 + b(t-1) + c(t-1)^2 = 0 \Rightarrow ct^2 + (b-2c)t + (a-b+c^2) \Rightarrow$$

$$c = b-2c = a-b+c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Για το δεύτερο ερώτημα του (α), λύνουμε την εξίσωση

$$a1 + b(t-1) + c(t-1)^2 = 2 + 3t + 5t^2$$

δηλαδή την

$$ct^2 + (b-2c)t + (a-b+c^2) = 5t^2 + 3t + 2t.$$

Αυτή ισοδυναμεί με το σύστημα $c = 5, b-2c = 3, a-b+c^2 = 2$. Άρα $a = -10, b = 13, c = 5$.

Σημείωση. Οι ζητούμενοι συντελεστές θα μπορούσαν να βρεθούν και με το ανάπτυγμα Taylor γύρω από σημείο 1.

(β) Έστω U,V δύο υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2. Από τις σχέσεις

$$2 \le \dim(U+V) \le 3 \;\text{ και }\; \dim(U+V) + \dim U \cap V = \dim U + \dim V = 2+2 = 4$$

συμπεραίνουμε ότι $\dim U \cap V = 1$ ή 2.
Αν $U = V$, τότε βέβαια $\dim U \cap V = 2$.
Αν $U = \{(x,y,0)^t \,|\, x,y \in \mathbb{R}\}$ και $V = \{(0,y,z)^t \,|\, y,z \in \mathbb{R}\}$ τότε $\dim U \cap V = 1$.

5. Σωστό ή Λάθος (Δικαιολογήστε την απάντησή σας) (8 μον.).

1. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση f: $R^4 \to R^3$ με Kerf = 0.
2. Κάθε μη αντιστρέψιμος 2x2 πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 = (a+d)x$.
3. Για κάθε τετραγωνικούς πίνακες A, B που ικανοποιούν A+B = 0, ισχύει ότι detA= -detB.
4. Κάθε 2x2 πίνακας διαγωνοποιείται.

Λύση

1. Λάθος , αφού $4 = \dim\ker f + \dim f(\mathbb{R}^4)$ και $\dim f(\mathbb{R}^4) \le 3$.
2. Σωστό, αφού από το Θεώρημα Cayley-Hamilton
έχουμε $A^2 - (a+d)A + (\det A)I = 0$ και από την υπόθεση $\det A = 0$.
3. Λάθος. Έστω A ένας αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας αρτίου μεγέθους, πχ
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε $\det A = \det B \ne -\det B$.
4. Λάθος, αφού ο $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ δεν διαγωνιοποιείται.

6. (10 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση:

(α) Τις ακολουθίες :

i) $u_n = (-1)^n + 1, \quad n = 0,1,2,3,.....$ ii) $u_n = \frac{1}{n}(-1)^n + 1, \quad n = 1,2,3,.....$

iii) $u_n = \frac{\sin(n)}{n}, \quad n = 1,2,3,.....$ iv) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n = 0,1,2,....$

(β) Τις σειρές:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$ ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$ iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^3+1}$ iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n+1}$

Λύση

α)

i) Έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n+1=0$ για n περιττό και $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n+1=2$ για n άρτιο. Άρα η ακολουθία δεν συγκλίνει.

ii) Έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}(-1)^n+1)=0+1=1$.

iii) Έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sin n)=0$, ως γινόμενο φραγμένης ακολουθίας ($\sin n$) και μηδενικής ($\frac{1}{n}$).

iv) Είναι:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}((\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

β)

i) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$r=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{10^k}{k!}}=\lim_{k\to\infty}\frac{10^{k+1}k!}{(k+1)!10^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{10}{k+1}=0<1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

ii) Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας.

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k+2}{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{k\left(3+\frac{2}{k}\right)}{k\left(2-\frac{1}{k}\right)}=\frac{3}{2}>1$$

άρα η σειρά δεν συγκλίνει.

iii) Για κάθε $n=1,2,\ldots$ έχουμε $2n^2+1\geq 2n^2$ και $n^3+1\leq 2n^3$. Άρα

$$\frac{2n^2+1}{n^3+1}\geq\frac{2n^2}{2n^3}=\frac{1}{n}$$

και αφού η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, η $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+1}{n^3+1}$ επίσης δεν συγκλίνει.

iv) Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ συγκλίνει. Επειδή έχουμε $\frac{3^n}{5^n+1}<\frac{3^n}{5^n}=\left(\frac{3}{5}\right)^n$ συμπεραίνουμε ότι η δοσμένη σειρά επίσης συγκλίνει.

7. (12 μον.) (α) Να προσδιοριστούν οι σταθερές α και β ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2\tan(\frac{\pi}{2}-x), & \text{αν } -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ ax+\beta, & \text{αν } 0\le x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο x=0. Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα: $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$.

(β) Να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού τους και να παραγωγισθούν σε ένα τυχόν σημείο αυτού, x, οι συναρτήσεις:

(i) $f(x)=e^{\tan x}$, (ii) $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$, (iii) $f(x)=(1+\sin 2x)^{-1/2}$

Λύση

(α) Το πρόβλημα ισοδυμαμεί με το να βρούμε τα $a,b\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\tan(\frac{\pi}{2}-x)-b}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+b-b}{x}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\tan(\frac{\pi}{2}-x)-b}{x}=a.$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\tan(\frac{\pi}{2}-x)-b}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}-\lim_{x\to 0^-}\frac{b}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin x}-\lim_{x\to 0^-}\frac{b}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0^-}\sin(\frac{\pi}{2}-x)-\lim_{x\to 0^-}\frac{b}{x}=$$

$$1-\lim_{x\to 0^-}\frac{b}{x}.$$

Παρατηρούμε ότι $1-\lim_{x\to 0^-}\frac{b}{x}=a$ αν και μόνο αν $b=0,\ a=1$.

(β)

i) πεδίο ορισμού $\{x\in\mathbb{R}\,|\cos x\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,\Big|\,x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(x)'=(\tan x)'e^{\tan x}=\frac{1}{\cos^2 x}e^{\tan x}.$$

ii) πεδίο ορισμού : $\{x\in\mathbb{R}\,\Big|\,\frac{e^x-1}{e^x+1}>0\}=$ θετικοί πραγματικοί.

$$f(x)'=\frac{e^x+1}{e^x-1}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=-\frac{2e^x}{(e^x-1)(e^x+1)}.$$

iii) πεδίο ορισμού $\{x\in\mathbb{R}\,|1+\sin 2x>0\}=\{x\in\mathbb{R}\,\Big|\,x\neq(2k+3)\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(x)'=-(1+\sin 2x)^{-\frac{3}{2}}\cos 2x.$$

8. (10 μον.)

(α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^3+x^2-x-1$$

(i) Να βρεθούν τα σημεία όπου η συνάρτηση τέμνει τους άξονες Χ, Υ.

(ii). Να βρεθούν και χαρακτηρισθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

β) Σύρμα μήκους Λ πρόκειται να κοπεί σε δύο κομμάτια, έτσι ώστε το ένα να το λυγίσουμε και να σχηματίσουμε έναν κύκλο, το δε άλλο να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο. Πως θα πρέπει να κόψουμε το σύρμα έτσι ώστε το άθροισμά των περικλειομένων περιοχών να έχει ελάχιστο εμβαδόν ? Πότε γίνεται αυτό το εμβαδόν μέγιστο;

Λύση

α) Η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0,f(0)) = (0,-1)

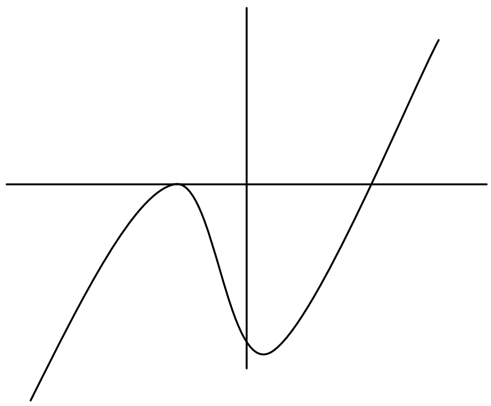
Επειδή $f(x) = (x+1)^2(x-1)$ η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των x στα σημεία (-1,0), (1,0).

$f(x)^{/} = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{1}{3}.$

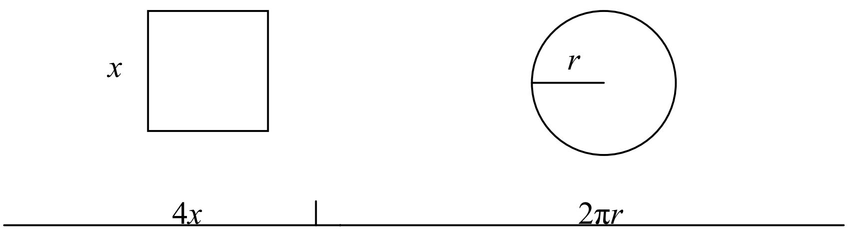
$f(x)^{//} = 6x + 2 \Rightarrow f(-1)^{//} < 0, f(\frac{1}{3}) > 0.$

Άρα στο x = -1 έχουμε τοπικά μέγιστο και στο x = 1/3 τοπικό ελάχιστο.

Σημείο καμπής υπάρχει στο $x = -1/3$.



β) Έστω η ακτίνα του κύκλου *r* και η πλευρά του τετραγώνου *x*.



Άρα το μήκος *Λ* θα είναι :

$$\Lambda = 2\pi r + 4x \qquad (1)$$

Το άθροισμα των εμβαδών είναι:

$$A = \pi r^2 + x^2 \qquad (2)$$

Από την (1) $\frac{d\Lambda}{dr} = 2\pi + 4\frac{dx}{dr}$. Το $\frac{d\Lambda}{dr} = 0$ (Λ = σταθερά) .

Επομένως

$$\frac{dx}{dr} = -\frac{\pi}{2} \tag{3}$$

Από την (2) $\frac{dA}{dr} = 2\pi r + 2x\frac{dx}{dr}$. Άρα $\frac{dA}{dr} = \pi(2r - x) = 0$. Επομένως

$$x = 2r \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (1) έχουμε

$$\Lambda = 2\pi r + 8r \quad \text{, άρα} \quad r = \frac{\Lambda}{2(\pi+4)} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\Lambda}{\pi+4}.$$

Άρα $\frac{dA}{dr} = 0$ όταν $x = \frac{\Lambda}{\pi+4}$ και $r = \frac{\Lambda}{2(\pi+4)}$.

Τώρα $\frac{d^2A}{dr^2} = \pi(2 - \frac{dx}{dr}) = \pi(2 + \frac{\pi}{2}) > 0$.Έπεται λοιπόν ότι η συνάρτησή μας έχει ελάχιστο για τις παραπάνω τιμές του x και r .

Για μέγιστο εμβαδόν $0 \le 2\pi r \le \Lambda$. Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $A(r)$ είναι $\left[0, \frac{\Lambda}{2\pi}\right]$. Άρα το μέγιστο θα είναι σε ένα από τα δύο άκρα.

$r = 0$, $x = \frac{\Lambda}{4}$ και $A = \frac{1}{16}\Lambda^2$

$r = \frac{\Lambda}{2\pi}$, $x = 0$ και $A = \frac{1}{4\pi}\Lambda^2$.

Επομένως η μέγιστη τιμή το εμβαδού επιτυγχάνεται όταν $r = \frac{\Lambda}{2\pi}$, $x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύρμα δεν θα κοπεί καθόλου αλλά θα χρησιμοποιηθεί για το σχηματισμό ενός κύκλου.

Σημείωση. Βλ. Σελίδα 109 του Λογισμού μιας Μεταβλητής, όπου υπάρχει λύση.

9. (15 μον.) (α) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}dx$ ii) $\int \cos(x)\sin^3(x)dx$ iii) $\int \ln(2x)dx$

(β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται κάτω από τη καμπύλη $y = x$ και πάνω από τη καμπύλη $y = (x-2)^2$;

(γ) Αφού υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $\frac{x}{\sin x}$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}dx$

Λύση

(α) i) $\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}dx$

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8} = \frac{x+2}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}$$

$$x+2 = A(x-2) + B(x+4)$$

Για $x=2$, $4 = 6B \Rightarrow B = \frac{2}{3}$ και για x = - 4 , $-2 = -6A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}dx = \int\left(\frac{1}{3(x+4)} + \frac{2}{3(x-2)}\right)dx = \frac{1}{3}\ln(x+4) + \frac{2}{3}\ln(x-2) + C$$

ii) $\int \cos(x)\sin^3(x)dx =$

$= \int u^3 du =$

$\frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4}\sin^4(x) + C$

Έστω $u = \sin(x)$

$\frac{du}{dx} = \cos(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos(x)}$

iii) $\int \ln(2x)dx =$

$= x\ln(2x) - \int 1.dx =$

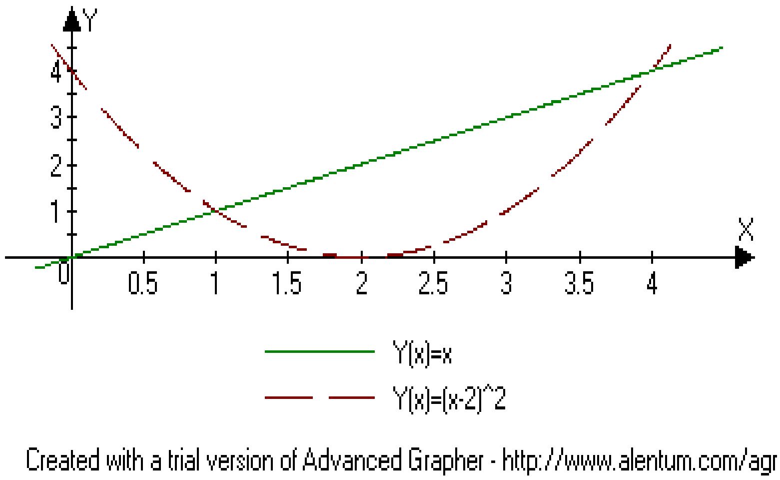
$v = x$

$= x\ln(2x) - x + C = x(\ln(2x)-1) + C$

Έστω $u = \ln(2x)$ $\quad \frac{dv}{dx} = 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2x}.2 = \frac{1}{x}$

(β) $y = x$ και $y = (x-2)^2$



$x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0$. Άρα

$$\int_1^4 \left(x - (x-2)^2\right)dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)dx \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x\right]_1^4 =$$

$$\left[-\frac{64}{3} + 40 - 16\right] - \left[-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right] = 4.5$$

10. (5 μον.) Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor γύρω από το x = 0 τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$ υπολογίστε με ακρίβεια 6 ψηφίων την ποσότητα $\sqrt{1.01}$.

Λύση

$$f(0) = \sqrt{0+1} = 1, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)' = \left(\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(x+1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}(-\frac{3}{2})(x+1)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(0) = \frac{3}{8}$$

Η σειρά Taylor στο x=0 ειναι

$$\sqrt{x+1} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x^2-0) + \frac{f'''(0)}{3!}(x^3-0) + \ldots\ldots \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x - \frac{\frac{1}{4}}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}x^3 + \ldots\ldots \overset{x=0,01}{\Rightarrow} \sqrt{0,01+1} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}0,01 - \frac{\frac{1}{4}}{2!}0,01^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}0,01^3 + \ldots\ldots \Rightarrow$$

$$\sqrt{1,01} = 1,004987$$
