ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ : ΠΛΗ12 «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι»

Τελική Εξέταση 25 Ιουνίου 2003

Απαντήστε όλα τα κάτωθι ερωτήματα, παρέχοντας επεξηγηματικά σχόλια όπου χρειάζεται.

1. (16 μον.) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(α) (10 μον.) Να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
(β) (3 μον.) Είναι δυνατή η διαγωνοποίηση του πίνακα A; Γιατί;
Εάν ο πίνακας διαγωνοποιείται, να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.
(γ) (3 μον.) Είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος; Εξηγείστε.

<u>Λύση.</u>

(α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Α είναι:

$$\delta_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 6\lambda - 5\lambda^2 + \lambda^3 = \lambda\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-3).$$

Επομένως, ιδιοτιμές του Α είναι οι: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=0$ θα πρέπει:

$$(0\cdot I - A)\cdot\overrightarrow{u_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{matrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1} = x_3\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=2$:

$$(2\cdot I - A)\cdot\overrightarrow{u_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = 4x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{matrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_2} = x_3\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_3=3$:

$$(3\cdot I - A)\cdot\overrightarrow{u_3} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{matrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_3} = x_3\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(β) Ο πίνακας Α διαγωνοποιείται αφού το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του έχει 3 (όσες και ο βαθμός του) διακεκριμένες ρίζες. Η διαγωνοποίηση αυτή πραγματοποιείται αν κανείς χρησιμοποιήσει τον πίνακα που έχει ως στήλες τα τρία (γραμμικώς ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του Α που υπολογίσαμε στο υποερώτημα (α): $P = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(Αποδεικνύεται δε ότι $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ και $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$).

(γ) Ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος αφού έχει ιδιοτιμή το μηδέν.

2. (12 μον.) Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & \lambda x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το παραπάνω σύστημα έχει: **(i)** μοναδική λύση, **(ii)** άπειρες λύσεις, **(iii)** καμία λύση και να βρεθούν οι λύσεις όποτε υπάρχουν.

<u>Λύση.</u>

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος στον οποίο εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3=\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2=\Gamma_2-2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3=\Gamma_3-(\lambda-1)\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+6 & 2-\lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda+3) & 2-\lambda \end{array}\right]$$

Επομένως, το σύστημα έχει :

- Μοναδική λύση όταν $\lambda \neq 2$ *και* $\lambda \neq -3$ την $\left\{ x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{(3+\lambda)},\ x_3 = \frac{1}{(3+\lambda)} \right\}$
- Άπειρες λύσεις όταν $\lambda = 2$ τις $\{x_1 = 5x_3,\ x_2 = 1-4x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$
- Καμία λύση όταν λ=-3.

3. (12 μον.) Δίνεται η παρακάτω απεικόνιση :

$$f: \Pi_2 \to \Pi_1, \qquad f\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+b$$

όπου Π_2 ο χώρος των πολυωνύμων ως προς x το πολύ β' βαθμού και Π_1 ο χώρος των πολυωνύμων ως προς x το πολύ α' βαθμού.

α) Να δείξετε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι γραμμική και να βρεθεί ο πίνακάς της ως προς τις προφανείς βάσεις ($\{1, x, x^2\}$ του Π_2 και $\{1, x\}$ του Π_1).

β) Να βρεθεί ο πυρήνας της παραπάνω απεικόνισης και η διάσταση του. Είναι η συνάρτηση f ένα προς ένα ;

γ) Να βρεθεί η διάσταση της εικόνας της f.

Λύση.

(α) Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\mathrm{u}=a_1x^2+b_1x+c_1$, $\mathrm{v}=a_2x^2+b_2x+c_2$ του χώρου Π_2 και για κάθε $k\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(\mathrm{u}+\mathrm{v})=f((a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2))=2(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)=$$
$$(2a_1x+b_1)+(2a_2x+b_2)=f(\mathrm{u})+f(\mathrm{v}),$$

$$f(k\mathrm{u})=f(ka_1x^2+kb_1x+kc_1)=2ka_1x+kb_1=k\cdot(2a_1x+b_1)=k\cdot f(\mathrm{u}).$$

Επομένως, η απεικόνιση f είναι πράγματι γραμμική.

Εναλλακτικά θα μπορούσε κανείς να τεκμηριώσει τη γραμμικότητα της f διαπιστώνοντας ότι πρόκειται για την πρώτη παράγωγο συναρτήσεων.

Για τον υπολογισμό του πίνακά της ως προς τις βάσεις $\{1,x,x^2\}$ και $\{1,x\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(1)&=f(0\cdot x^2+0\cdot x+1)=0 &&= 0\cdot 1+0\cdot x,\\
f(x)&=f(0\cdot x^2+1\cdot x+0)=1 &&= 1\cdot 1+0\cdot x,\\
f(x^2)&=f(1\cdot x^2+0\cdot x+0)=2x &&= 0\cdot 1+2\cdot x.
\end{aligned}$$

Έτσι ο ζητούμενος πίνακας είναι ο $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(β) Παρατηρούμε ότι αν $\mathrm{u}=ax^2+bx+c$ είναι τυχόν στοιχείο του χώρου Π_2, τότε :

$$f(\mathrm{u})=0 \Leftrightarrow 2ax+b=0 \Leftrightarrow a=b=0.$$

Επομένως, ο πυρήνας της f αποτελείται από όλα τα σταθερά πολυώνυμα:

$Kerf=\{c\cdot 1,\ c\in\mathbb{R}\}$ Πρόκειται δηλαδή για έναν υπόχωρο του Π_2 διάστασης 1.

Η απεικόνιση f δεν είναι 1-1 αφού ο πυρήνας της περιέχει και μη μηδενικά στοιχεία.

(γ) Αν $\mathrm{Im}f$ είναι η εικόνα της απεικόνισης f, τότε είναι γνωστό ότι:

$$\dim\Pi_2=\dim(\mathrm{Im}\,f)+\dim(Kerf).$$

Επομένως, $3=\dim(\mathrm{Im}\,f)+1 \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}\,f)=2$.

4. (12 μον.)

(α) (6 μον.)Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις κάτωθι σειρές αιτιολογώντας την απάντησή σας:

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

(β) (6 μον.) Να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ ii) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ iii) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

Λύση.

(α)

(i) Η σειρά συγκλίνει αφού αν εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Λόγου έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1.$$

(ii) Ισχύει ότι: $\frac{2n}{n^2+1}\geq\frac{2n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}$, $n\geq 1$. Έτσι, αφού, όπως είναι γνωστό, η σειρά $\zeta(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, το ίδιο θα ισχύει και για την $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+1}$.

(iii) Παρατηρούμε ότι: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$.

Πρόκειται, επομένως, για τηλεσκοπική σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n+1})$ με $a_n=\frac{1}{n}$ η οποία συγκλίνει στο $a_1-\lim_{n\to+\infty}a_n=1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1$.

(β)

(i)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cdot\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\cdot\sin x}=\frac{\sin 0}{2\cos 0-0\cdot\sin 0}=\frac{0}{2}=0.$$

(ii) $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

(iii)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+2x}+x)}{(\sqrt{x^2+2x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x-x^2)}{(\sqrt{x^2+2x}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1.$$

5. (4 μον.) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & x\le -1 \\ x^2-bx+a-3 & x>-1 \end{cases}$$

Για ποιες τιμές των *a, b* είναι η f(x) παραγωγίσιμη στο x = - 1; Εξηγείστε την απάντησή σας.

<u>Λύση.</u>

Αν η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο –1 θα είναι και συνεχής σε αυτό το σημείο. Επομένως θα πρέπει:

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to-1^-}(2x^2+ax+b)=\lim_{x\to-1^+}(x^2-bx+a-3)\Leftrightarrow$$

$$2-a+b=1+b+a-3\Leftrightarrow a=2.$$

Επίσης θα πρέπει να συμπίπτουν οι πλευρικές παράγωγοι της f στο –1:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-1^-}\frac{(2x^2+ax+b)-(2-a+b)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x^2-bx+a-3)-(2-a+b)}{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-1^-}\frac{(2x^2+2x+b)-b}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x^2-bx-1)-b}{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2+2x}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x^2-1)-(bx+b)}{x+1}\Leftrightarrow\lim_{x\to-1^-}\frac{2x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x-1)(x+1)-b(x+1)}{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-1^-}(2x)=\lim_{x\to-1^+}(x-1-b)\Leftrightarrow -2=-2-b\Leftrightarrow b=0.$$

6. (12 μον.)

α) (6 μον.) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int\cos^2 x dx$ **ii)** $\int\frac{dx}{(2x-5)^2}$ **iii)** $\int\frac{e^x dx}{e^x+1}$

(β) (6 μον.) Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της συνάρτησης $f(x)=\ln x$, του άξονα x’x και των ευθειών x=1 και x = e.

<u>Λύση.</u>

(α)

(i) $\int \cos^2 x dx = \int \frac{\cos(2x)+1}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int (\cos(2x)+1) dx = \frac{1}{2} \cdot (\frac{\sin(2x)}{2} + x) + c = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} + c.$

(ii) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $y=2x-5 \Rightarrow dy = 2 \cdot dx$, έχουμε:

$$\int \frac{dx}{(2x-5)^2} = \int \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \cdot \int y^{-2} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-1}{2y} + c = \frac{-1}{2(2x-5)} + c.$$

(iii) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $y=e^x \Rightarrow dy = e^x \cdot dx = y \cdot dx$, έχουμε:

$$\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \int \frac{y}{y+1} \cdot \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{y+1} dy = \ln|y+1| + c = \ln(e^x+1) + c.$$

(β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:

$$\int_1^e \ln x dx = \int_1^e x' \cdot \ln x dx = [x \cdot \ln x]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx = (e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1) - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= e - \int_1^e 1 dx = e - (e-1) = 1.$$

7. (16 μον.) Γράψετε αν οι κάτωθι προτάσεις είναι σωστές ή λάθος.

Α) $A = A^{-1} \quad \Rightarrow \quad \det A = 1$

α) Σωστό β) Λάθος

Β) Το σύνολο $E = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 - 1 = 0\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του R^2.

α) Σωστό β) Λάθος

Γ) Έστω διανυσματικοί χώροι E_1, E_2 τέτοιοι ώστε $\dim E_1 = 2$, $\dim E_2 = 1$. Τότε ισχύει ότι $\dim(E_1 + E_2) = 3$ ή 2.

α) Σωστό β) Λάθος

Δ) Αν $A^2+A=I$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $A^{-1}=A+I$ (I είναι ο μοναδιαίος πίνακας).

α) Σωστό β) Λάθος

Λύση.

(A) Λάθος: $A = A^{-1} \Rightarrow \det A = \dfrac{1}{\det A} \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$. Έτσι και το -1 είναι πιθανή τιμή για την ορίζουσα του Α. Για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, τότε $A = A^{-1}$ και $\det A = -1$.

(Β) Λάθος αφού το σύνολο Ε δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο του $\mathbf{R}^2$: $0+0-1=-1 \neq 0$.

(Γ) Σωστό: ισχύει ότι $\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2) \Rightarrow$

$\dim(E_1+E_2) = 3 - \dim(E_1 \cap E_2)$. Όμως η τομή $E_1 \cap E_2$ είναι υπόχωρος του E_2 και άρα έχει διάσταση 0 ή 1. Αντίστοιχα, επομένως, η διάσταση του E_1+E_2 μπορεί να είναι 3 ή 2.

(Δ) Σωστό: $A^2 + A = I \Rightarrow A\cdot(A+I) = (A+I)\cdot A = I \Rightarrow A^{-1} = A+I$..

8. (16 μον.) Για τις κάτωθι προτάσεις πολλαπλής επιλογής, γράψετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$ τότε το $\lim_{x\to 3} f(x)$ είναι ίσο με

Α. 1 Β. -2 Γ. 4 Δ. 2

2. Αν $\lambda = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$, τότε

Α. $\lambda = 0$ Β. $\lambda = 1$ Γ. $\lambda = \dfrac{1}{5}$ Δ. $\lambda = 5$

3. Αν $f(x) = e^{2x-x^2}$, τότε οι ρίζες της $f'(x)$ είναι :

Α. x = 3 Β. x=0 ή x=2 Γ. x=1 Δ. x = 1 ή x = - 1

4. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$, έχει:

Α. Τοπικό ελάχιστο στο x = - 1 και τοπικό μέγιστο στο x = 1.
Β. Τοπικό ελάχιστο στο x = 0 και τοπικό μέγιστο στο x = 3.
Γ. Τοπικό ελάχιστο στο x = 1 και τοπικό μέγιστο στο x = - 1.
Δ. Τοπικό ελάχιστο στο x = 3 και τοπικό μέγιστο στο x = 0.

Λύση.

(1) Σωστή απάντηση είναι η **Δ**: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-1)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x-1) = 2.$

(2) Σωστή απάντηση είναι η **Δ**: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x} = 5\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{5x} = 5\cdot\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y)}{y} = 5\cdot 1 = 5.$

(3) Σωστή απάντηση είναι η **Γ**: Πράγματι,

$$f'(x) = e^{2x-x^2} \cdot (2x - x^2)' = e^{2x-x^2} \cdot (2-2x) = 2 \cdot e^{2x-x^2} \cdot (1-x),$$

η οποία έχει μοναδική ρίζα το x=1.

(4) Σωστή απάντηση είναι η **Γ** γιατί :

$$f'(x) = (x^3 - 3x)' = (3x^2 - 3) = 3 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$$
$$f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$$

Επομένως, οι πρώτη παράγωγος έχει ρίζες στα σημεία x=1, x=-1 για τα οποία παρατηρούμε ότι: $f''(1) = 6 > 0, f''(-1) = -6 < 0$. Συνεπώς, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x=1 και τοπικό μέγιστο στο x=-1.

Η γραφική της παράσταση στο διάστημα [-2,2] έχει ως εξής: