ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΘΕ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (ΠΛΗ 12)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 17 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

Άσκηση 1. (15 μον.) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + \lambda z &= 3 \\ x + \lambda y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

(α) να έχει μοναδική λύση
(β) να μην έχει καμία λύση
(γ) να έχει άπειρες λύσεις.

Να υπολογιστούν οι λύσεις όταν το $\lambda = 0$.

Άσκηση 2. (15 μον) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A
(β) Να βρεθεί, αν υπάρχει, αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος.
(γ) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cayley-Hamilton, να υπολογιστεί η δύναμη A^{2004}.

Άσκηση 3. (12 μον): Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+10}-n}{n}$ (β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-x^2-2\cos x}{x^4}$ (γ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3}$

Άσκηση 4. (12 μον)

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(α) (3 μον.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^{2n}}{n^n}$ (β) (4 μον.) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$, (Για ποια $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει;)

(γ) (3 μον.) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{4n^2+8n+3}$ Δείξτε ότι είναι «τηλεσκοπική» και βρείτε την τιμή του αθροίσματος.

Άσκηση 5. (12 μον)

(α) Να βρεθούν και να χαρακτηρισθούν, για $-\infty < x < \infty$, όλα τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$. Να υπολογισθούν επίσης τα σημεία καμπής της συνάρτησης.

(β) Σε ένα ακτήμονα γεωργό προσφέρεται όση έκταση καλλιεργήσιμης γης μπορεί να περικλείσει με ένα φράχτη μήκους 100 μ. σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ποια μήκη πλευρών x, y πρέπει να επιλέξει ώστε να έχει η έκταση αυτή το μέγιστο δυνατό εμβαδόν;

Άσκηση 6. (12 μον.)

(α) (6 μον.) Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

(i) $f(x) = x^2 e^{\cos(2x+1)}$ (ii) $g(x) = \ln(1+\tan x)$, $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ (iii) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$, $x \neq -1$

(β) (6 μον.) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2\alpha \sin x + 1 & , \quad x > 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \\ \beta \cos x + x & , \quad x < 0 \end{cases}$. Να βρεθούν τιμές

των α και β για τις οποίες η *f(x)* είναι παραγωγίσιμη στο x = 0.

Άσκηση 7. (10 μον)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x + \dfrac{2}{x^2}$, $g(x) = x$, με $x > 0$. Έστω ότι $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$, όπου λ >2 μια παράμετρος. Να υπολογισθεί το εμβαδόν αυτό και βρεθεί το όριο $\lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda)$.

Άσκηση 8. (12 μον.) Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$ (iii) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

Υπόδειξη: Για το (i) χρησιμοποιείστε τη μέθοδο χωρισμού της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης σε επί μέρους κλάσματα και για το (ii) χρησιμοποιείστε τη μέθοδο της αντικατάστασης (π.χ. θέστε $\sqrt{x} = u$). Για το (iii) χρησιμοποιείστε την ταυτότητα $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Λύσεις Επαναληπτικής Εξέτασης

Άσκηση 1. Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to r_2 - 2r_1, r_3 \to r_3 - r_1, r_3 \to r_3 - (\lambda - 1)r_2$ παίρνουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda+3) & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το λ και εξετάζουμε τα συστήματα που αντιστοιχούν στον τελευταίο πίνακα. Αν $\lambda \neq 2,-3$ βλέπουμε ότι έχουμε μοναδική λύση, τη $(1,\frac{1}{\lambda+3},\frac{1}{\lambda+3})$. Αν $\lambda = 2$, έχουμε άπειρες λύσεις, τις $(x,y,z)=(5z,1-4z,z),\ z\in\mathbb{R}$. Τέλος αν $\lambda=-3$ το σύστημα είναι ασυμβίβαστο.

Άσκηση 2.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\det\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 3 & x+1 \end{pmatrix} = x^2-4.$ Οι ιδοτιμές είναι 2,-2. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από τα συστήματα $\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 3 & 2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2-1 & 1 \\ 3 & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και είναι τα $(3a,a),\ a\neq 0$ και $(b,-b),\ b\neq 0.$ Επειδή έχουμε 2 διακεκριμένες ιδιοτιμές, ο A διαγωνοποιείται. Ως P μπορούμε να θέσουμε , για παράδειγμα, $P=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Τέλος έχουμε $A^2-4I=0$ και άρα

$$A^{2004}=\left(A^2\right)^{1002}=\left(4I\right)^{1002}=\begin{pmatrix} 2^{2004} & 0 \\ 0 & 2^{2004} \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3.

(α) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+10}-n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+10}}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{10}{n^2}}-1=0.$

(β) Εφαρμόζοντας de l’ Hospital επανειλημμένα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2-2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{12x}=-\frac{1}{12}$$

(γ) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-3x+2}{x^2}}{\frac{2x^2-3}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{2}$

Άσκηση 4.

(α) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{7^{2n}}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^2}{n}=0<1$ και άρα η σειρά συγκίνει από το κριτήριο της ρίζας.

(β) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$: Από το κριτήριο του λόγου: $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{nx}{n+1}|=|x|<1$ βρίσκουμε ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως για όλα τα -1 < x < 1. Συγκλίνει όμως και για x = -1, ως εναλλάσσουσα σειρά. ΔΕΝ συγκλίνει για x = 1, ως αρμονική.

$$(\gamma)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2+8n+3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-....-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 5.

(α) Έχουμε $f'(x)=4x^3-4x$. Οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.

Παίρνοντας δεύτερη παράγωγο έχουμε: $f''(x)=12x^2-4=0\begin{cases}-4\ , & x=0\\ 8\ , & x=\pm1\end{cases}$, οπότε το x = 0 είναι τοπικό μέγιστο ενώ τα x = 1και x = -1 τοπικά ελάχιστα. Ποιο είναι το ολικό ελάχιστο; Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$, αύξουσα στο [-1, 0] , φθίνουσα στο [0, 1] και αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως στα σημεία –1 και 1 βρίσκεται ένα τουλάχιστον ολικό ελάχιστο. Παρατηρούμε ότι $f(-1)=6$ και $f(1)=6$. Συνεπώς η (ολικά) ελάχιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση είναι η 6 και στα 2 αυτά σημεία.

Άσκηση 6. (12 μον.)

(α) Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

(i) $f(x)=x^2e^{\cos(2x+1)}\to f'(x)=2xe^{\cos(2x+1)}-2x^2\sin(2x+1)e^{\cos(2x+1)}$

(ii) $g(x)=\ln(1+\tan x)\to g'(x)=\frac{1}{1+\tan x}\sec^2 x$

(iii) $h(x)=\frac{x^2}{x^3+1}\to h'(x)=\frac{2x(x^3+1)-x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2}=\frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}$

(β) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2\alpha\sin x+1 & , & x>0\\ 1 & , & x=0\\ \beta\cos x+x & , & x<0\end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές των α και β για τις οποίες είναι παραγωγίσιμη στο x = 0.

Πρώτα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η *f(x)* είναι συνεχής στο x = 0. Αυτό συμβαίνει όταν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to0^+}(2\alpha\sin x+1)=\lim_{x\to0^-}(\beta\cos x+x)$, δηλαδή όταν β = 1. Για να είναι και παραγωγίσιμη εκεί πρέπει $\lim_{x\to0^+}(2\alpha\cos x+1)=\lim_{x\to0^-}(-\beta\sin x+1)$ δηλαδή όταν α = ½ .

Άσκηση 7.

Παρατηρούμε πρώτα από τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων ότι για κάθε $x \in [1, \lambda],\ f(x) > g(x).$ Άρα το εμβαδόν της μεταξύ τους περιοχής από x = 1 έως x = λ είναι

$$E(\lambda) = \int_1^\lambda (f(x) - g(x))dx = 2\int_1^\lambda \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{2}{\lambda} + 2.$$

Παίρνοντας το όριο έχουμε $\lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda) = 2.$

Άσκηση 8. (12 μον.) Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα

(i) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx = \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{2}{x+2}dx = 2\ln|x+2| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right| + C$

(ii) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{2udu}{u^2+u} = \int \frac{2du}{u+1} = 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$, έχοντας θέσει $x = u^2$.

(iii) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\cos x dx = \int u^2(1-u^2)du = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$,

έχοντας θέσει u = sinx .
