ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ Α΄ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. *(8 μον.) Η άσκηση αυτή αναφέρεται σε διαιρετότητα και ρίζες πολυωνύμων.*
   a. *Να λυθεί η εξίσωση* $(x^2-5x+6)^2(x^2-3)=0$.
   b. *Γνωρίζουμε ότι μια λύση της εξίσωσης* $x^3-10x^2+29x-20$ *είναι η* $x=1$. *Να βρεθούν οι άλλες πραγματικές λύσεις (αν υπάρχουν).*
   c. *Να βρεθούν τα* a,b *τέτοια ώστε το πολυώνυμο* $x^4+ax^3+bx^2+x+1$ *να διαιρείται με το* x^2-1.
   d. *Να λυθεί η εξίσωση* $\sqrt{x+5}-2\sqrt{x}+1=0$.

Λύση

1. a. Η εξίσωση $(x^2-5x+6)^2(x^2-3)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$ ή $x^2-3=0$. Η εξίσωση $x^2-5x+6=0$ έχει $\Delta=1$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x_1=3,\quad x_2=2.$
Η εξίσωση $x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3,$ άρα προκύπτει $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$.

b. Μετά από διαίρεση του πολυωνύμου με $x-1$ έχουμε
$x^3-10x^2+29x-20=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-9x+20)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x_1=1$ ή
$x^2-9x+20=0 \Leftrightarrow x_2=4,\ x_3=5.$

c. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+x+1$. Αφού διαιρείται με το $x^2-1=(x-1)(x+1)$, διαιρείται και με κάθε παράγοντά του, άρα οι τιμές $x=1$ και $x=-1$ είναι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0,$ από όπου προκύπτει το επόμενο σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \Leftrightarrow P(1)=0 \Leftrightarrow 1+a+b+2=0 \\ x=-1 \Leftrightarrow P(-1)=0 \Leftrightarrow 1-a+b=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a=-1 \\ b=-2 \end{array}$$

d. Για $x\geq 0$ έχουμε

$\sqrt{x+5}+1=2\sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}+1\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+5}+x+6=4x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+5}=3(x-2)$ και αν είναι $x\geq 2,$

$\left(2\sqrt{x+5}\right)^2=\left(3(x-2)\right)^2 \Leftrightarrow 4(x+5)=9(x^2-4x+4) \Leftrightarrow 9x^2-40x+16=0$

$\Leftrightarrow x_1=4/9$ ή $x_2=4$. Επειδή πρέπει να ισχύει και $x\geq 2,$ η λύση της εξίσωσης είναι η $x_2=4$.

2. *(8 μον.) Η άσκηση αυτή αναφέρεται σε πράξεις ρητών συναρτήσεων.*
   a. *Να γραφεί η παράσταση*

$$\frac{x\ +2}{(x-2)(x+4)}$$

ως άθροισμα μερικών κλασμάτων, δηλαδή να βρεθούν οι πραγματικοί Α,Β , τέτοιοι ώστε

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4},$$

b. *Έστω a,b δύο διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί. Να απλοποιηθεί το κλάσμα* $\dfrac{(a^2-b^2)^3}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$.

<u>Λύση</u>

2 a. Η παράσταση

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4} = \frac{(A+B)x+4A-2B}{(x-2)(x+4)}$$

δίνει το σύστημα $\begin{array}{ll} A+B & =1 \\ 4A-2B & =2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A=2/3 \\ B=1/3 \end{array}$.

b. Επειδή $\alpha \neq b$, το κλάσμα απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{(\alpha^2-b^2)^3}{\alpha^3-3\alpha^2b+3\alpha b^2-b^3} = \frac{((\alpha-b)(\alpha+b))^3}{(\alpha-b)^3} = \frac{(\alpha-b)^3(\alpha+b)^3}{(\alpha-b)^3} = (\alpha+b)^3.$$

3. *(10 μον.) Η άσκηση αυτή αναφέρεται σε στοιχειώδεις ανισότητες.*

a. *Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι θετικές παράμετροι λ, μ ώστε η συνάρτηση* $y = x^2 - 2\lambda x + \mu$ *να παίρνει αρνητικές τιμές; Σε ποιο διάστημα* $x \in (x_1, x_2)$ *συμβαίνει αυτό; Δείξτε ότι για x = λ (που βρίσκεται στη μέση του διαστήματος) η συνάρτηση παίρνει την μικρότερη (αρνητική) της τιμή !*

b. *Για ποιες τιμές του x ισχύουν ταυτόχρονα οι ανισότητες* $|x-1|+|x|<3$ *και* $\dfrac{1}{x^2-4x} > 0$ *;*

<u>Λύση</u>

3 a. Επειδή το τριώνυμο έχει $\alpha = 1,\ \beta = -2\lambda,\ \gamma = \mu$ με τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή θετικό, για να παίρνει και αρνητικές τιμές θα πρέπει να έχει διακρίνουσα θετική, δηλ. $\Delta = 4\lambda^2 - 4\mu > 0 \Rightarrow 4(\lambda - \sqrt{\mu})(\lambda + \sqrt{\mu}) > 0$.
Επιπλέον επειδή οι παράμετροι λ, μ είναι θετικές, πρέπει να ισχύει και $\lambda - \sqrt{\mu} > 0 \Rightarrow \lambda > \sqrt{\mu}$.
Στην περίπτωση όπου το $\Delta > 0$, το τριώνυμο έχει δύο διαφορετικές ρίζες, τις $x_{1,2} = \dfrac{2\lambda \mp \sqrt{4(\lambda^2-\mu)}}{2} = \lambda \mp \sqrt{\lambda^2-\mu}$ και ανάμεσα σε αυτές η συνάρτηση έχει πρόσημο ετερόσημο του $\alpha = 1$, δηλ. δέχεται αρνητικές τιμές στο διάστημα $(x_1,\ x_2) = \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2-\mu},\ \lambda + \sqrt{\lambda^2-\mu}\right)$.

Η κορυφή του τριωνύμου είναι στο $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{2\lambda}{2} = \lambda$, προφανώς μετά από πράξεις έχουμε $x_1 + x_2 = \lambda,$ δηλ. το λ είναι το μέσο του διαστήματος (x_1, x_2). Η τιμή της συνάρτησης είναι ίση με $y = \lambda^2 - 2\lambda^2 + \mu = -\lambda^2 + \mu$ και επειδή από την προηγούμενη απόδειξη $\lambda > \sqrt{\mu}$ έχουμε βέβαια $y < 0.$

Επιπλέον $\forall x, y = x^2 - 2\lambda x + \mu \geq -\lambda^2 + \mu = y_{\min}$, καθόσον έχουμε $x^2 - 2\lambda x + 1^2 = (x - \lambda)^2 \geq 0$

b. Αν $x \leq 0,$ η πρώτη ανίσωση γράφεται

$-(x-1) - x < 3 \Rightarrow -2x + 1 < 3 \Rightarrow x > -1$, επομένως η λύση της είναι $x \in (-1, 0]$ (1).

Αν $0 < x \leq 1,$ η ανίσωση γράφεται $-(x-1) + x < 3 \Rightarrow 1 < 3,$ συνεπώς ισχύει για τα $x \in (0, 1]$ (2).

Και τέλος αν $x > 1,$ η ανίσωση είναι $x - 1 + x < 3 \Rightarrow 2x - 1 < 3 \Rightarrow x < 2$ που αν συναληθεύσουμε με τον περιορισμό έχουμε $x \in (1, 2)$ (3). Έτσι από (1), (2) και (3) η λύση της πρώτης ανίσωσης είναι $x \in (-1, 2)$ (4).

Η ανίσωση $\dfrac{1}{x^2 - 4x} > 0 \Rightarrow x^2 - 4x > 0$. Το τριώνυμο $x^2 - 4x$ έχει $\Delta = 16 > 0$. Συνεπώς οι ρίζες του είναι $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4.$

Επειδή $\alpha > 0,$ το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών δηλ. $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$. (5)

Οι δύο ανισότητες συναληθεύουν στις κοινές λύσεις των (4) και (5), οι οποίες είναι $x \in (-1, 0)$.

4. *(10 μον.) Έστω* $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, *όπου* $x \in \mathbb{R}$.

   a. *Από τις παρακάτω παραστάσεις να υπολογισθούν όσες έχουν νόημα AB, BA, (A+B)C, BC, B^2, 5B.*

   b. *Χρησιμοποιώντας επαγωγή, αποδείξτε ότι* $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & (2^n - 1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *για* $n = 1, 2, 3, \ldots$

<u>Λύση</u>

4 a. Ο πίνακας A είναι 2x2 και ο B είναι 2x3 επομένως ο AB ορίζεται και είναι ο επόμενος 2x3 πίνακας

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + x\cdot 0 & 2\cdot 0 + x\cdot 1 & 2\cdot(-2) + x\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot(-2) + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x & -4 + 3x \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας BA δεν ορίζεται, αφού το πλήθος των στηλών του B είναι άλλο από το πλήθος των γραμμών του A.

Ο πίνακας A+B επίσης δεν ορίζεται, αφού οι πίνακες δεν είναι του ίδιου τύπου, συνεπώς δεν ορίζεται και (A+B)C.

Ο πίνακας BC είναι πίνακας $2x1$, και βρίσκουμε

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 - 2\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας B^2 επίσης δεν ορίζεται, αφού ο πίνακας B δεν είναι τετραγωνικός.
Τέλος ο $2x3$ πίνακας

$$5B = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 0 & 5\cdot(-2) \\ 5\cdot 0 & 5\cdot 1 & 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

b. Επαγωγικά προφανώς για $n = 1$ έχουμε $A^1 = \begin{pmatrix} 2^1 & (2^1 - 1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$. Έστω

ότι ισχύει για κάθε $n = k$, δηλ. $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & (2^k - 1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για κάθε $n = k + 1$. Πράγματι,

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 2^k & (2^k - 1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k\cdot 2 & 2^k\cdot x + (2^k - 1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & (2^{k+1} - 1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

το οποίο δείχνει ότι ισχύει η έκφραση του A^n για κάθε $n = 1,2,3,\ldots$

5. *(10 μον.) Έστω Α,Β δύο $n\times n$ πραγματικοί πίνακες.*
   a. *Έστω ότι η πρώτη και η δεύτερη γραμμή του Α είναι ίδιες. Εξηγήστε γιατί η πρώτη και δεύτερη γραμμή του γινομένου ΑΒ είναι ίδιες. Παρόμοια δείξτε ότι αν η πρώτη και η δεύτερη στήλη του Β είναι ίδιες, τότε η πρώτη και η δεύτερη στήλη του ΑΒ είναι ίδιες.*
   b. *Έστω ότι οι Α,Β είναι συμμετρικοί. Αποδείξτε ότι ο πίνακας ΑΒ είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $AB = BA$.*

Λύση

a. Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

Η πρώτη και δεύτερη γραμμή του γινομένου AB θα είναι ίδιες αφού όταν πολλαπλασιάζω δύο πίνακες μεταξύ τους πολλαπλασιάζω γραμμή με στήλη.

Δηλαδή,

$$AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{όπου}$$

$$c_{11} = c_{21} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1})$$

$$c_{12} = c_{22} = (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2})$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$c_{1n} = c_{2n} = (a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn}) .$$

Παρομοίως εάν $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ θα ισχύει ότι η πρώτη και δεύτερη στήλη του *AB* θα είναι ίδιες.

b. Αφού *A* και *B* είναι συμμετρικοί τότε $A = A^T$ και $B = B^T$.

Για να είναι ο πίνακας AB συμμετρικός θα πρέπει $AB = (AB)^T$. Γνωρίζουμε όμως από τις ιδιότητες των πινάκων ότι $(AB)^T = B^T A^T$. Άρα ο μόνος τρόπος για να είναι ο πίνακας AB συμμετρικός είναι να ισχύει η σχέση $AB = BA$.

6. *(12 μον.) Θεωρούμε τα διανύσματα* $a = [1, 2, -1]^t$ *,* $b = [0, 1, 2]^t$ *του* $\mathbb{R}^3$.
   a. *Αληθεύει ότι τα a, b είναι κάθετα;*
   b. *Να βρεθεί ένα διάνυσμα c μήκους 1 που είναι κάθετο και στο a και στο b.*
   c. *Υπολογίστε τα μήκη των a, b, a+b. Τι παρατηρείτε; Δώστε μια γεωμετρική εξήγηση.*

<u>Λύση</u>

a. Για να είναι τα δύο διανύσματα κάθετα μεταξύ τους θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να ισούται με μηδέν. Άρα

$$a \bullet b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1.0 + 2.1 - 1.2 = 0 \text{ (αληθεύει).}$$

b. Υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των *a* και *b*.

$$c = [a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5i - 2j + k \text{ .}$$

Το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα

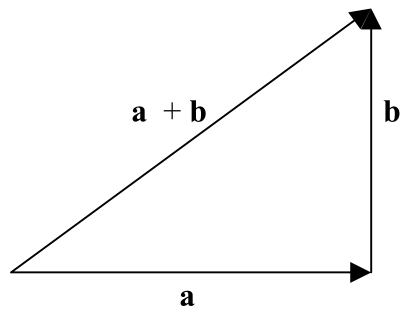
$$c = \frac{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \|} = \frac{5}{\sqrt{30}} i - \frac{2}{\sqrt{30}} j + \frac{1}{\sqrt{30}} k .$$

c. $|a| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$|b| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$|a+b| = \sqrt{1^2 + (2+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{11}.$

Παρατηρούμε ότι $|a|^2 + |b|^2 = |a+b|^2$ $\left[\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{11}\right)^2\right]$. Άρα έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.



Ορίζουσες και αντίστροφοι πίνακες:

7. *(12 μον.) Έστω* $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, *όπου* $k \in \mathbb{R}$.

   a. *Υπολογίστε τον προσαρτημένο πίνακα* $adjA$.
   b. *Για ποιες τιμές του k είναι ο A αντιστρέψιμος; Για τις τιμές αυτές να βρεθεί ο αντίστροφος του A.*
   c. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα και ο αντίστροφος του πίνακα*

   $$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & b \\ 2 & 3 & 4 & c & d \\ 5 & 8 & 9 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ερώτημα b και τη σχέση (2.3) στη σελίδα 33 του βιβλίου καθώς και την προτελευταία σχέση στη σελίδα 37).

__Λύση__

a. $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -5$ $\qquad M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2$ $\qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1$

$$M_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\8&9\end{vmatrix}=-1 \qquad M_{22}=\begin{vmatrix}k&41\\5&9\end{vmatrix}=9k-5 \qquad M_{23}=-\begin{vmatrix}k&1\\5&8\end{vmatrix}=-8k+5$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=1 \qquad M_{32}=-\begin{vmatrix}k&1\\2&4\end{vmatrix}=-4k+5 \qquad M_{33}=\begin{vmatrix}k&1\\2&3\end{vmatrix}=3k-2$$

Άρα,

$$adj(A)=\begin{pmatrix}M_{11}&M_{21}&M_{31}\\M_{12}&M_{22}&M_{32}\\M_{13}&M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&9k-5&-4k+2\\1&-8k+5&3k-2\end{pmatrix}.$$

b. Για να είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος θα πρέπει $\det(A)\neq 0$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}k&1&1\\2&3&4\\5&8&9\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}3&4\\8&9\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&4\\5&9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&3\\5&8\end{vmatrix}=k(-5)-(-2)+1=-5k+3\neq 0.$$

Άρα για $k\neq \frac{3}{5}$ ο πίνακας έχει αντίστροφο. Επομένως,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{3-5k}\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&9k-5&-4k+2\\1&-8k+5&3k-2\end{pmatrix}.$$

c. Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα

$C=\begin{pmatrix}A&M\\0&B\end{pmatrix}$. Όπου $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\5&8&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ και $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}$.

Ο αντίστροφός του πίνακα C δίνεται από την ισότητα $C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}MB^{-1}\\0&B^{-1}\end{pmatrix}$.

Για $k=1$ έχουμε $A^{-1}=\frac{1}{3-5k}\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&9k-5&-4k+2\\1&-8k+5&3k-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&-2&1\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Βρίσκουμε

$$\mathrm{B}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{B}|}\operatorname{adj}(\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ και επιπλέον

$$-A^{-1}MB^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a-c+e+\frac{5b+d-f}{2} & \frac{5a+c-e-5b-d-f}{2} \\ 2a+4c-2e-b-2d+f & -a-2c+e+b+2d-f \\ a-3c+e-\frac{b-3d+f}{2} & \frac{-a+3c-e+b-3d+f}{2} \end{pmatrix}$$

Επομένως,

$$C^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -5a-c+e+\frac{5b+d-f}{2} & \frac{5a+c-e-5b-d-f}{2} \\ -1 & -2 & 1 & 2a+4c-2e-b-2d+f & -a-2c+e+b+2d-f \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & a-3c+e-\frac{b-3d+f}{2} & \frac{-a+3c-e+b-3d+f}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

8. *(10 μον.) Θεωρούμε την $n\times n$ ορίζουσα* $d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$

   $n = 2,3,\ldots$

   a. *Επαληθεύσατε ότι $d_2 = 2$ και τη $d_3 = 2^2$*

   b. *Βρείτε έναν ‘απλό’ τύπο για τη d_n και αποδείξτε τον (Υπόδειξη: Αναπτύξτε τη ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη και χρησιμοποιήστε επαγωγή)*

<u>Λύση</u>

a. Για $n = 2$ έχουμε $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2$

Για $n=3$ έχουμε $d_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} \sim \Gamma_2^{'}=\Gamma_2+\Gamma_1 \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=2+2=4=2^2$

b.

$$d_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{vmatrix} \sim \Gamma_2^{'}=\Gamma_2+\Gamma_1 \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2 & 2 & 2\\ -1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \sim \Gamma_2^{1}=\Gamma_2+\Gamma_1\, 2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=2^2\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=$$

Είναι προφανές ότι εάν συνεχίσουμε αυτή την διαδικασία τότε $d_n=2^{n-1}$.

Απόδειξη.

- Για $n=2$ $d_2=2^{2-1}=2$ (ισχύει)
- Έστω ότι ισχύει για $n=k$ $d_k=2^{k-1}$
- Τώρα θα αποδείξουνε ότι ισχύει και για $n=k+1$

$$d_{k+1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}_{d_k}+\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}_{d_k}$$

(Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη.) Αλλά το $d_k=2^{k-1}$. Άρα

$d_{k+1}=2^{k-1}+2^{k-1}=2.2^{k-1}=2^{k-1+1}=2^k$.

Γραμμικά συστήματα:

9. *(10 μον.)*
    a. *Να λυθεί το σύστημα*

$$x+2y-3z=1$$
$$3x+7y-11z=5$$
$$3x+8y-13z=7.$$

b. *Για ποίες τιμές του k το επόμενο σύστημα 1) έχει ακριβώς μια λύση, 2) δεν έχει λύσεις, 3) έχει άπειρες λύσεις;*

$$x+y-z=1$$
$$3x+4y+kz=4$$
$$4x+(k+5)y+(k+3)z=6.$$

<u>Λύση</u>

a. $$\left(A\,|\,b\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & | & 1\\ 3 & 7 & -11 & | & 5\\ 3 & 8 & -13 & | & 7\end{pmatrix}\sim\begin{matrix}\\ \Gamma_2'=\Gamma_2-3\Gamma_1\\ \Gamma_3'=\Gamma_3-3\Gamma_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & | & 1\\ 0 & 1 & -2 & | & 2\\ 0 & 2 & -4 & | & 4\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{matrix}\\ \\ \Gamma_3'=\Gamma_3-\Gamma_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & | & 1\\ 0 & 1 & -2 & | & 2\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}.\ \text{Άρα}\quad \begin{matrix}x=1-2y+3z\\ y=2+2z\end{matrix}\ .$$

Αντικαταστήσουμε για y και έχουμε $\begin{matrix}x=-3-z\\ y=2+2z\\ z=z\end{matrix}$ **ή** $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

b. Στο σύστημα μας εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss

$$\left(A\,|\,b\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & | & 1\\ 3 & 4 & k & | & 4\\ 4 & k+5 & k+3 & | & 6\end{pmatrix}\sim\begin{matrix}\\ \Gamma_2'=\Gamma_2-3\Gamma_1\\ \Gamma_3'=\Gamma_3-4\Gamma_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & | & 1\\ 0 & 1 & k+3 & | & 1\\ 0 & k+1 & k+7 & | & 2\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{matrix}\\ \\ \Gamma_3'=\Gamma_3-(k+1)\Gamma_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & | & 1\\ 0 & 1 & k+3 & | & 1\\ 0 & k+1 & k+7 & | & 2\end{pmatrix}\sim\begin{matrix}\\ \\ \Gamma_3'=\Gamma_3-(k+1)\Gamma_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & | & 1\\ 0 & 1 & k+3 & | & 1\\ 0 & 0 & -k^2-3k+4 & | & 1-k\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{matrix}\\ \\ \Gamma_3'=-\Gamma_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & | & 1\\ 0 & 1 & k+3 & | & 1\\ 0 & 0 & k^2+3k-4 & | & k-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & | & 1\\ 0 & 1 & k+3 & | & 1\\ 0 & 0 & (k+4)(k-1) & | & k-1\end{pmatrix}.\ \text{Επομένως,}$$

το σύστημα έχει **ακριβώς μια λύση** όταν $k \neq -4$ και $k \neq 1$ την $z = \dfrac{1}{k+4}$,

$y = \dfrac{1}{k+4}$ και $x = 1$.

Το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** όταν $k = 1$ την $z = z$, $y = 1 - 4z$ και $x = 5z$,

δηλαδή $[\mathrm{x} \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{z}]^{\mathrm{T}} = [5\mathrm{z} \quad 1-4\mathrm{z} \quad \mathrm{z}]^{\mathrm{T}} = [0 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}} + \mathrm{c}[5 \quad -4 \quad 1]^{\mathrm{T}}$

Τέλος, το σύστημα **δεν έχει λύσεις** όταν $k = -4$

10. ***Σωστό ή λάθος*** *(10 μον.)*

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές. Αν νομίζετε ότι μια πρόταση είναι σωστή, δώστε μια απόδειξη και αν νομίζετε ότι είναι λάθος, δώστε ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα.

Στην άσκηση αυτή όλοι οι πίνακες είναι $n \times n$ πραγματικοί πίνακες.

a. *Αν A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $A^{-1} = A^t$, τότε* $\det A = \pm 1$.

b. *Αν A,B είναι πίνακες τότε* $\det(A+B) = \det A + \det B$

c. *Το άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος.*

d. *Το γινόμενο δύο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος.*

e. *Η τάξη του πίνακα* $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *είναι ίση με 2 αν και μόνο αν* $a \neq 1$.

<u>Λύση</u>

10 a. *Σωστό,* γιατί από την ισότητα $\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{I}$ και την υπόθεση έχουμε $\mathrm{AA}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$ και αν εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.3 σελ. 33 αποκτούμε διαδοχικά $\det(\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}) = \det\mathrm{A} \det\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (\det\mathrm{A})(\det\mathrm{A}) = 1 \Rightarrow (\det\mathrm{A})^2 = 1 \Rightarrow \det\mathrm{A} = \pm 1$.

b. *Λάθος*, έστω οι πίνακες $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ο $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Οι αντίστοιχες ορίζουσες είναι $\det\mathrm{A} = 1, \quad \det\mathrm{B} = 2$ και $\det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = 6 \neq \det\mathrm{A} + \det\mathrm{B}$.

c. *Λάθος*, έστω ο πίνακας $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\mathrm{A} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Α αντιστρέψιμος,

και $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\mathrm{B} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ ο Β αντιστρέψιμος.

Ο πίνακας $A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος, διότι $\det(A+B)=0$.

d. *Σωστό*. Έστω δύο πίνακες A, B. Επειδή οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι ισχύει $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.3 σελ. 33, $\det(AB)=(\det A)(\det B)\neq 0$ άρα το AB είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

Σημειώστε ότι $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

e. *Σωστό,* αφού η κλιμακωτή μορφή του πίνακα είναι

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Συνεπώς η τάξη του είναι 2 αν και μόνο αν $\alpha \neq 1$.