ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΘΕ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΉ Ι (ΠΛΗ 12)

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Οι πρώτες δύο ασκήσεις αναφέρονται στις έννοιες γραμμική ανεξαρτησία, γραμμικός συνδυασμός και βάση (βλ. παράγραφο 4.2)

Άσκηση 1. (12 μον.)

(α) Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες τα διανύσματα $(1,1,a), (2,0,1), (3,-1,1)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

(β) Για τις τιμές του a που βρήκατε πριν, να εκφράστε το $(1,0,0)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $(1,1,a), (2,0,1), (3,-1,1)$.

(γ) Να βρεθούν οι τιμές του b για τις οποίες έχουμε $(1,2,b) \in span\{(1,1,1),(3,2,1)\}$.

Λύση:

α) Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3, το δεδομένο ερώτημα ισοδυναμεί με το να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες τα διανύσματα $(1,1,a), (2,0,1), (3,-1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ακολουθούμε την διαδικασια του Παραδείγματος 4.7 (σελ.71):
από την εξίσωση

$$(0,0,0) = \lambda_1\,(1,1,a) + \lambda_2\,(2,0,1) + \lambda_3\,(3,-1,1)$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα και σε μορφή στηλών

$$[0\ 0\ 0]^T = \lambda_1\,[1\ 1\ a]^T+\lambda_2\,[2\ 0\ 1]^T+\lambda_3\,[3\ -1\ 1]^T$$

έχουμε το ομογενές σύστημα
$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 \qquad\quad -\lambda_3 &= 0 \\ a\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$
το οποίο θέλουμε να έχει **μοναδική λύση την μηδενική** και άρα πρέπει και αρκεί η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ να είναι **μη μηδενική**, δηλαδη $detA=2(1-a)\neq 0$ και αρα οι τιμές του a για τιςοποίες τα αρχικά διανύσματα αποτελούν βάση είναι όλες οι πραγματικές τιμές εκτός από το 1.

β) Για $a \neq 1$, τα δεδομένα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ αποτελούν μια βάση.
Ζητάμε να βρεθούν οι τιμές των συνελεστών $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ώστε να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση

$$(1,0,0) = \lambda_1(1,1,a) + \lambda_2(2,0,1) + \lambda_3(3,-1,1),$$

που ισοδυναμεί με το γραμμικό σύστημα $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, όπου A είναι ο πίνακας του προηγουμένου υποερωτήματος. Σύμφωνα με την μέθοδο Cramer βρίσκουμε ότι

$$\lambda_1=\frac{D_{\lambda_1}}{D}=\frac{1}{2(1-a)},\quad \lambda_2=\frac{D_{\lambda_2}}{D}=\frac{-(a+1)}{2(1-a)},\quad \lambda_3=\frac{D_{\lambda_3}}{D}=\frac{1}{2(1-a)}.$$

γ) (**Βλ. Παραδειγμα 4.3 σελ.67**) Ζητάμε τις τιμές του b τέτοιες ώστε να υπάρχουν x, y που να ικανοποιουν την διανυσματική εξίσωση $(1,2,b)=x(1,1,1)+y(3,2,1)$. η οποία ισοδυναμεί με το γραμμικό σύστημα $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\b\end{pmatrix}$, όπου $B=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος και εκτελούμε διαδοχικά πράξεις στις γραμμές ώστε να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\1&2&2\\1&1&b\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&-1&1\\0&-2&b-1\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&-1&1\\0&0&b-3\end{array}\right)$$

ετσι συμπεραίνουμε ότι $rankB=rank\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\\0&0\end{pmatrix}=2$ και αρα πρέπει και αρκεί

rank$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\1&2&2\\1&1&b\end{array}\right)$=2 το οποίο συμβαίνει μονον όταν b=3.

Άσκηση 2. (12 μον.) Δίνονται τα σύνολα :

$$E_1=\left\{\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}: x_1+x_2=x_3+x_4\right\}; E_2=\left\{\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}: x_1+x_3=x_2+x_4\right\}$$

α) Να δείξετε ότι τα σύνολα E_1, E_2 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου των πινάκων διαστάσεως 2x2.

β) Να βρείτε τις διαστάσεις των υποχώρων $E_1, E_2, E_1\cap E_2$ και E_1+E_2.

Λύση:

α) Επιλέγουμε δύο πίνακες X, Y του συνόλου E_1

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\in E_1 \;\;,\;\; Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\in E_1$$

οπότε $x_1+x_2=x_3+x_4$, $y_1+y_2=y_3+y_4$ και στη συνέχεια ελέγχουμε αν ο πίνακας $\lambda X+\mu Y$ όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ανήκει στον χώρο E_1.

$$\lambda X+\mu Y=\lambda\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda x_1+\mu y_1 & \lambda x_2+\mu y_2 \\ \lambda x_3+\mu y_3 & \lambda x_4+\mu y_4 \end{bmatrix}$$

Πράγματι παρατηρώ ότι ισχύει η ιδιότητα των πινάκων του χώρου E_1 :

$$\begin{aligned}(\lambda x_1+\mu y_1)+(\lambda x_2+\mu y_2)&=\lambda(x_1+x_2)+\mu(y_1+y_2)=\\&=\lambda(x_3+x_4)+\mu(y_3+y_4)=\\&=(\lambda x_3+\mu y_3)+(\lambda x_4+\mu y_4)\end{aligned}$$

και συνεπώς ο πίνακας $\lambda X+\mu Y$ ανήκει στον χώρο E_1. Όμοια επιλέγουμε δύο πίνακες X,Y του χώρου E_2

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\in E_2,\quad Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\in E_2$$

οπότε $x_1+x_3=x_2+x_4$, $y_1+y_3=y_2+y_4$ και στη συνέχεια ελέγχω αν ο πίνακας $\lambda X+\mu Y$ όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ανήκει στον χώρο E_2.

$$\lambda X+\mu Y=\lambda\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda x_1+\mu y_1 & \lambda x_2+\mu y_2 \\ \lambda x_3+\mu y_3 & \lambda x_4+\mu y_4 \end{bmatrix}$$

Πράγματι παρατηρώ ότι ισχύει η ιδιότητα των πινάκων του χώρου E_2 :

$$\begin{aligned}(\lambda x_1+\mu y_1)+(\lambda x_3+\mu y_3)&=\lambda(x_1+x_3)+\mu(y_1+y_3)=\\&=\lambda(x_2+x_4)+\mu(y_2+y_4)=\\&=(\lambda x_2+\mu y_2)+(\lambda x_4+\mu y_4)\end{aligned}$$

και συνεπώς ο πίνακας $\lambda X+\mu Y$ ανήκει στον χώρο E_2.

β) Παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\in E_1$, γράφεται ως εξής:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\overset{x_1+x_2=x_3+x_4}{=}\begin{bmatrix} x_3+x_4-x_2 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_2 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_4 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$=x_2\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{X_1}+x_3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{X_2}+x_4\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{X_3}$$

δηλαδή ως γραμμικός συνδυασμός των X_1,X_2,X_3 με συντελεστές οποιαδήποτε στοιχεια του $\mathbb{R}$ και αντίστροφα, όπου οι πίνακες X_1,X_2,X_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητοι (καθώς αν ένας γραμμικός συνδυασμός τους ισούται προς τον μηδενικό πίνακα

$$x_2\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{X_1}+x_3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{X_2}+x_4\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{X_3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε λόγω της προηγούμενης ισότητας (2^{o} μέλος= 4^{o} μέλος) όλοι οι συντελεστές είναι ισοι με το μηδέν) και συνεπώς αποτελούν βάση του E_1. Άρα $\dim E_1=3$.

Παρόμοια παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \in E_2$ γράφεται ως

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \overset{y_1+y_3=y_2+y_4}{=} \begin{bmatrix} y_2+y_4-y_3 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} =$$

$$= y_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Y_1} + y_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Y_2} + y_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Y_3}$$

όπου οι πίνακες Y_1, Y_2, Y_3 εύκολα αποδεικνύεται (όπως παραπάνω) ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και συνεπώς αποτελούν βάση του E_2. Άρα $\dim E_2 = 3$.

Κάθε πίνακας $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \in E_1 \cap E_2$ γράφεται ως

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \underset{y_1+y_2=y_3+y_4}{\overset{y_1+y_3=y_2+y_4}{=}} \begin{bmatrix} y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} =$$

$$= y_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Y_1} + y_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Y_2}$$

όπου οι πίνακες Y_3, Y_4 είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και συνεπώς αποτελούν βάση του $E_1 \cap E_2$. Άρα $\dim(E_1 \cap E_2) = 2$.

Η διάσταση του αθροίσματος $E_1 + E_2$ επομένως βρίσκεται τώρα από το Θεώρημα 4.3 :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Άσκηση 3. (12 μον.)

(Η άσκηση αυτή αναφέρεται σε γραμμικές απεικονίσεις, βλ. Κεφάλαιο 5).

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ της οποίας ο πίνακας ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(α) Υπολογίστε την εικόνα $f(2,-1,2)$. Βρείτε έναν ‘τύπο’ για την *f*.

(β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση για καθέναν από τους υπόχωρους $\ker f$ και $f(\mathbb{R}^3)$.

(γ) Είναι η απεικόνιση f ένα προς ένα ή επί;

Λύση:

α) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$={(α,β,γ)/ α,β,γ πραγματικοί αριθμοί} με βάση την συνήθη βάση με στοιχεία *e*$_1$*=(1,0,0), e*$_2$*=(0,1,0), e*$_3$*=(0,0,1)* (τόσο ως πεδίο ορισμού όσο και πεδίο τιμών)

Εκφράζουμε το διάνυσμα *u= (2,-1,2)* ως προς αυτή *: (2,-1,2)= 2 (1,0,0)+(-1) (0,1,0)+2 (0,0,1)* δηλαδή $u = 2e_1+(-1)e_2+2e_3$.

Επειδή η *f* είναι γραμμική έχουμε

$f(u)=2f(e_1) - f(e_2)+2f(e_3)$

Οι εικόνες των στοιχείων της βάσης $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ δίνονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των e_1, e_2, e_3 με συντελεστές που βρίσκονται στις στηλες του πινακα Α (βλ. 5.1.2 σελ.93).

Ετσι: $f(e_1)= 1e_1+3e_2+5e_3$, $f(e_2)= 2e_1+(-1)e_2+3e_3$, $f(e_3)= 2e_1+1e_2+5e_3$,

οπότε με αντικατάσταση έχουμε $f(u)=2(1e_1+3e_2+5e_3)-(2e_1+(-1)e_2+3e_3)+2(2e_1+1e_2+5e_3)=4e_1+9e_2+17e_3=(4,9,17)$

Για τον γενικό τύπο της *f* έχουμε:

$f(x,y,z)=x\,f(e_1)+y\,f(e_2)+z\,f(e_3)=(x+2y+2z,\ 3x-y+z,\ 5x+3y+5z)$

β) Παρατηρούμε ότι $(f(x,y,z))^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Για τον πυρήνα λύνουμε το σύστημα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Χρησιμοποιώντας γραμμοπράξεις βρίσκουμε ότι οι λύσεις είναι $(x,y,z) = \left(\frac{-4}{7}z, \frac{-5}{7}z, z\right)$, όπου $z \in \mathbb{R}$. Άρα μια βάση του πυρήνα είναι $\{\left(\frac{-4}{7}, \frac{-5}{7}, 1\right)\}$ και η διάσταση είναι 1.

Η διάσταση της εικόνας είναι $\dim f(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim\ker f = 3-1 = 2$.

Μια βάση αποτελούν τα διανύσματα που αντιστοιχούν σε δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα της *f*, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, π.χ. στις πρώτες δύο, {(1,3,5), (2,-1,3)}.

γ) Η δεδομένη απεικόνιση δεν είναι 1-1 αφού ο πυρήνας της δεν είναι περιέχει μόνο το μηδενικό στοιχείο, (0,0,0), όπως είδαμε πριν. Επίσης δεν είναι επί αφού είδαμε ότι $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2 \neq 3$ και άρα η εικόνα $f(\mathbb{R}^3)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Σημείωση: Η άσκηση 4 αναφέρεται σε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα γραμμικών απεικονίσεων της μορφής $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{R}^n$ με $v \neq (0,...,0)$ τέτοιο ώστε $f(v) = \lambda v$ θα λέμε ότι το λ είναι μια ιδιοτιμή της f και το v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί στη λ.

Αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της f είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του **πίνακα** της f ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$. Για παράδειγμα, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(2x-y,10x+3y)$, είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 4. (10 μον.)

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\ R^3 \to R^3$ που ορίζεται από τη σχέση
$f(x_1,x_2,x_3)=(x_2,x_1+x_3,x_2)$.
(α) Ποιος είναι ο πίνακας A της f που αντιστοιχεί στη συνήθη βάση του R^3;

(β) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της f.

Λύση:
α) Για να βρούμε την πρώτη στήλη του ζητούμενου πίνακα υπολογίζουμε το

$f(1,0,0)=(0,1,0)=0(1,0,0)+1(0,1,0)+0(0,0,1)$. Άρα η πρώτη στήλη είναι η $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Συνεχίζοντας έτσι με τα $f(0,1,0)$ και $f(0,0,1)$ βρίσκουμε ότι ο πίνακας είναι ο $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

β) Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που προκύπτει βρίσκουμε τις ιδιοτιμές:

$$\det(\lambda \mathrm{I}-A)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-2)=0 \Leftrightarrow \lambda=0,\sqrt{2},-\sqrt{2}.$$

Για κάθε μια ιδιοτιμή λ, λύνουμε τώρα το 3×3 σύστημα $(A-\lambda\mathrm{I})X=0$ με γραμμοπράξεις και βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ως εξής (βλ. και άσκηση 7 πιο κάτω):

Για λ = 0, βρίσκουμε ότι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[x_1,x_2,x_3]^T=x[1,0,-1]^T$, όπου $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, δίνουν το ιδιοδιάνυσμα $[1,0,-1]^T$. Παρόμοια, για λ=$\sqrt{2}$, οι λύσεις του $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ δίνουν το ιδιάνυσμα $[1,\sqrt{2},1]^T$, ενώ για λ=$-\sqrt{2}$, παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $[1,-\sqrt{2},1]^T$.

Άσκηση 5. (12 μον.)

Έστω ο πραγματικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

(α) Να ευρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα A .
(**Υπόδειξη:** Μια από τις ιδιοτιμές είναι η 1. Με βάση αυτό και την άσκηση 1.b της Εργασίας 1, μπορείτε να υπολογίστε τις άλλες).

(β) Να υπολογισθούν ως πολυώνυμα του A, οι πίνακες A^{-1} και A^{-2} .
(**Υπόδειξη:** Βλ Παράδειγμα 6.14 και 6.16).

Λύση:

α) Υπολογίζοντας την ορίζουσα $\det(\lambda I - A)$ βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$ Δίνεται ότι μια ρίζα αυτού είναι η 1. Κάνοντας τη διαίρεση με το $\lambda - 1$ βρίσκουμε $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6),$ και άρα

$$\chi_A = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι 1,2,3.

β) Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton, έχουμε

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0.$$

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αφού το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του. Πολλαπλασιάζοντας με A^{-1} βρίσκουμε

$$A^2 - 6A + 11I - 6A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\left(A^2 - 6A + 11I\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας με A^{-2} και αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση, βρίσκουμε

$$A - 6I + 11A^{-1} - 6A^{-2} = 0 \Rightarrow A^{-2} = \frac{1}{6}\left(A - 6I + 11A^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(A - 6I + 11\frac{1}{6}\left(A^2 - 6A + 11I\right)\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{11}{6}A^2 - 10A + \frac{85}{6}I\right).$$

Άσκηση 6. (10 μον.)

Έστω ο πραγματικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

(α) Εξετάστε αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Αν ναι, να βρεθεί ένας πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

(β) Να βρεθεί τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και να υπολογίστε τον πίνακα A^n, $n = 1, 2, \ldots$

Λύση:

α) Υπολογίζοντας την ορίζουσα $det(\lambda I - A)$ βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A = \lambda^2 - 1.$ Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, συνεπώς $\lambda_1 = -1,$ $\lambda_2 = 1.$

Επειδή ο A είναι ένας 2×2 πίνακας που έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, ο A διαγωνοποιείται. Μία βάση από ιδιοδιανυσματα βρίσκεται ως εξής. Λύνουμε τα αντίστοιχα 2×2 συστήματα της μορφής $(A-\lambda \mathrm{I})X=0$ που μετά από γραμμοπράξεις δίνουν:

για $\lambda=-1$ το σύνολο των λύσεων (ιδιοχώρος) $\{\begin{bmatrix}-a & a\end{bmatrix}^T / a\in R\}$ και άρα μία βάση του (που περιέχει αναγκαστικά μη μηδενικα γρ. ανεξάρτητα ιδιοδιανυσματα) $\{[-1\ \ 1]^T\}$,

και για $\lambda=1$ το σύνολο των λύσεων $\{\begin{bmatrix}-3a & a\end{bmatrix}^T / a\in R\}$ και άρα μία βάση του $\{[-3\ \ 1]^T\}$.

Έστω ο πίνακας $P=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ οι στήλες του P είναι γρ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι ο πίνακας $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ είναι πράγματι διαγώνιος.

β) Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που υπολογίσθηκε στο α) ερώτημα και το Θεώρημα Cayley-Hamilton, έχουμε

$$A^2-I=0\Rightarrow A^2=I$$

Πολλαπλασιάζοντας με A την τελευταία σχέση επανειλημμένα με A έχουμε,

$$A^2=\mathrm{I},\quad A^3=A,\quad A^4=A^2=\mathrm{I},\quad A^5=A,\quad A^6=A^2=\mathrm{I}$$

κλπ. Από εδώ παρατηρούμε (εύκολα αποδεικνύεται με επαγωγή) ότι για $n=1,2,...$ ισχύει

$$A^{\mathrm{n}}=\begin{cases}\mathrm{A}, & \text{όταν } \mathrm{n}=2\mathrm{k}+1,\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}\\ \mathrm{I}, & \text{όταν } \mathrm{n}=2\mathrm{k},\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Άσκηση 7. (14 μον.) Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

α) Χωρίς να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, μπορείτε να ελέγξετε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας A ;

β) Να βρεθεί ορθομοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε $A=PDP^{-1}$ όπου D είναι διαγώνιος πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

Υπόδειξη: Για την επίλυση του θέματος (β) θα πρέπει πρώτα να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ και τα ιδιοδιανύσματα $\{u_1,u_2,u_3\}$ του πίνακα A. Στη συνέχεια, με τη μέθοδο του Θεωρήματος 4.4 (σελ. 78 του βιβλίου), θα πρέπει να δημιουργήσετε μια ορθοκανονική βάση του ιδιοχώρου του πίνακα A τα διανύσματα της οποίας θα αποτελέσουν τις στήλες του πίνακα P.

Βλέπε παράδειγμα 6.12 (σελ.117), Παράδειγμα 4.16 (σελ. 79), Παράδειγμα 6.21.

Λύση:

α) Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός πραγματικός και συνεπώς από το φασματικό θεώρημα (σελ.117) είναι ορθομοναδιαία όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα ή, με άλλα λόγια, είναι διαγωνοποιήσιμος με πραγματικές ιδιοτιμές.

β) Για να βρούμε ορθομοναδιαίο όμοιο πίνακα P τέτοιο ώστε $A = PDP^{-1}$ θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε μία βάση ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A.

Πρώτα υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του μέσω του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του:

$$\det(\lambda I_3 - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ -3 & -2 & \lambda-3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ -3 & -2 & \lambda-3 \end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & -4 \\ -3 & -2 & \lambda-6 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = \lambda(\lambda+2)(\lambda-7)$$

Άρα το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A είναι {0,-2,7} και όλες οι ιδιοτιμές είναι απλές.
Στη συνέχεια υπολογίζουμε ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές :

$$Ax = 0x \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = -2x \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 7x \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}; \eta_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

τα οποία είναι και ορθογώνια καθώς αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές συμμετρικού πραγματικού πίνακα A. Αρκεί λοιπόν να κανονικοποιήσουμε τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα

$$\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}, \frac{\eta_3}{\|\eta_3\|} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ώστε να σχηματίσουμε τον πίνακα P με στήλες τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα (προσοχή στην διάταξη των στηλών):

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Πράγματι παρατηρούμε ότι $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = D$:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = D$$

Σημείωση. Επειδή ο πίνακας P είναι ορθοκανονικός ο αντίστροφος του είναι ο συμμετρικός του και συνεπώς δεν χρειάζεται να τον υπολογίσουμε.

Άσκηση 8. (18 μον.)

Σωστό ή λάθος; Να μην απαντάται μονολεκτικά αλλά να δίνετε πάντοτε πλήρη δικαιολόγηση της απάντησή σας.

(α) Υπάρχει μη μηδενικός 2×2 διαγωνοποιήσιμος πίνακας A τέτοιος ώστε $trA = \det A = 0$.

(β) Αν ο A είναι ένας 3×3 ορθομοναδιαίος πίνακας με πραγματικούς συντελεστές (δηλ. ορθογώνιος), τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{τέτοιο ώστε } A^2x = x.$$

(γ) Αν τα διανύσματα *a, b, c,* είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε τα διανύσματα *a- b , b+ c, c+a,* είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(δ) Η παρακάτω απεικόνιση είναι γραμμική:

$$f\left(\left[x_1, x_2, x_3\right]\right) = \left[x_1 - x_2 + 1, x_2 + x_3, x_2 - x_3 - 1\right]$$

(ε) Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ διαγωνοποιείται.

(στ) Οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ είναι όμοιοι.

Λύση:

(α) Λάθος. Οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2, ενός τέτοιου πίνακα A ικανοποιούν τις σχέσεις $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το λ^2 και οι ιδιοτιμές του Α που είναι οι ριζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μηδέν, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Αλλά τότε, αφού ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, ισχύει $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = 0,$ που σημαίνει ότι ο A πρέπει να είναι ο μηδενικός πίνακας.
Αρα δεν υπαρχει μη μηδενικός 2×2 διαγωνοποιήσιμος πίνακας A τέτοιος ώστε $TrA=detA=0$

(β) Σωστό Πράγματι αφού ο A είναι ορθογώνιος ισχύει $A^{-1} = A^T$ και $|\det A| = 1 \neq 0$. Αρα μπορούμε να γράψουμε $det(A^2-I)= det(A\,(A-A^{-1}\,))=det\,(A(A-A^T))= detA\ det(A-A^T\,))$. Όμως ο πίνακας $B=A-A^T$ είναι αντισυμμετρικός δηλαδη $B=-B^T$ και για την ορίζουσά του ισχύει $detB=det(-B^T)=(-1)^3det(B^T\,) = -detB$ (αφού ο B είναι 3×3) άρα $detB=det(A-A^T\,)=0$. Αρα $\det(A^2 - I)=0$ και συνεπώς υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $A^2x = x$.

(γ) Λάθος. Τα διανύσματα $a- b$, $b+ c$, $c+a$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα καθώς ισχύει $1(a-b)+1(b+c)+(-1)(c+a)=0$ δηλαδή υπάρχει γραμμικός συνδυασμός τους ίσος με το μηδενικό διάνυσμα με συντελεστές όχι όλους (εδώ κανένα) μηδενικούς.

(δ) Λάθος. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η

$$
\begin{aligned}
& f\left(\left[x_1,x_2,x_3\right]+\left[y_1,y_2,y_3\right]\right)= \\
&= f\left(\left[x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3\right]\right)= \\
&=\left[\left(x_1+y_1\right)-\left(x_2+y_2\right)+1,\left(x_2+y_2\right)+\left(x_3+y_3\right),\left(x_2+y_2\right)-\left(x_3+y_3\right)-1\right]
\end{aligned}
$$

δεν δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την

$$
\begin{aligned}
& f\left(\left[x_1,x_2,x_3\right]\right)+f\left(\left[y_1,y_2,y_3\right]\right)= \\
&=\left[x_1-x_2+1,x_2+x_3,x_2-x_3-1\right]\ +\left[y_1-y_2+1,y_2+y_3,y_2-y_3-1\right] \\
&=\left[\left(x_1+y_1\right)-\left(x_2+y_2\right)+2,\left(x_2+y_2\right)+\left(x_3+y_3\right),\left(x_2+y_2\right)-\left(x_3+y_3\right)-2\right]
\end{aligned}
$$

όπως θα έπρεπε να συμβαίνει **αν η *f* ήταν γραμμική**.

(ε) Λάθος. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ δεν διαγωνοποιείται διότι έχει δύο ίδιες πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, αλλά ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα $[1,0]^T$, δηλ. δεν έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

(στ) Λάθος. Αν οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$ ήταν όμοιοι θα έπρεπε να έχουν ίδια ορίζουσα και ίδιο ίχνος (βλ. σελ. 99 του βιβλίου). Ενώ όμως ισχύει det$A$ = det$B$ = - 2, δεν ισχύει tr$A$ = tr$B$, αφού tr$A$ = 5 και tr$B$ = - 5.

ΤΕΛΟΣ

ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΟΝΤΑΙ ΜΕΡΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ ΣΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΧΟΛΙΟ_ΑΣΚΗΣΗΣ_1 α,β:

Τα δυο υποερωτήματα μπορουν να αντιμετωπιστούν ταυτόχρονα με το να βρεθεί η κλιμακωτη μορφή του επαυξημένου πίνακα του γραμμικού συστήματος $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ όπως παρακάτω:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\1&0&-1&0\\a&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-a\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-2&-4&-1\\0&-2a+1&-3a+1&-a\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_2\to(-1/2)\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&2&1/2\\0&-2a+1&-3a+1&-a\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+(2a-1)\Gamma_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&2&1/2\\0&0&a-1&-1/2\end{array}\right)$$

Από την κλιμακωτή αυτή μορφή αμέσως συνάγουμε τα ακόλουθα:
για το **α)** τα τρία αρχικά διανυσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν a είναι διάφορο του 1.
για το **β)** έχουμε ότι για τις επιτρεπτές τιμές του a μπορούμε να λύσουμε το σύστημα ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ αρχίζοντας από την τελευταία γραμμή και αντικαθιστώντας προς τα πάνω έτσι ώστε να βρούμε την λύση $\lambda_1=\dfrac{1}{2(1-a)},\quad \lambda_2=\dfrac{-(a+1)}{2(1-a)},\quad \lambda_3=\dfrac{1}{2(1-a)}$.

ΣΧΟΛΙΟ_ΑΣΚΗΣΗΣ_1γ Η διαδικασία της λύσης παρέχει ένα μεθοδολογικό τρόπο να απαντούμε σε τέτοιου είδους ερωτήματα ανεξάρτητα από το πλήθος τών διανυσμάτων που μας δίδονται. Στην προκειμένη περίπτωση που έχουμε πίνακα μικρής διάστασης μπορούμε να διατυπώσουμε την απάντηση χωρίς να εκτελέσουμε πράξεις στις γραμμές ως εξής:
επειδή ο βαθμός (rank) του πίνακα B εύκολα φαίνεται ότι ισούται προς 2 (καθώς είναι το πολύ 2 και μια τουλαχιστον 2x2 υποορίζουσα του είναι διάφορη του μηδενός), πρέπει να είναι ίδιος με τον βαθμό τού επαυξημένου πίνακα τού συστήματος, κάτι που ισχύει αν και μόνο αν $\det\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&2\\1&1&b\end{pmatrix}=0$. Υπολογίζοντας την ορίζουσα στο αριστερό μέλος, βρίσκουμε ότι $b=3$.

ΣΧΟΛΙΟ_ΑΣΚΗΣΗΣ_2 Η απάντηση στο α) ακολούθησε την απόδειξη βάσει **της ικανής και αναγκαίας συνθήκης της σελ.65**(τέταρτη γραμμή από πάνω). Μία εναλλακτική μέθοδος είναι αυτή που χρησιμοποιεί το γεγονός ότι στην αρχή της απάντησης τού β) ουσιαστικά δείχνουμε ότι E_1=span$\{X_1, X_2, X_3\}$ και άρα E_1 είναι υπόχωρος σύμφωνα με την **παρατήρηση που ακολουθεί έπειτα από την ικανή και αναγκαία συνθήκη**. Παρόμοια για τον E_2.

ΣΧΟΛΙΟ_ΑΣΚΗΣΗΣ_6 Η γενική μέθοδος για την απάντηση στο τελευταίο ερώτημα είναι αυτή του Παραδείγματος 6.7 σελ.123

ΣΧΟΛΙΟ_ΑΣΚΗΣΗΣ_7 Αν ακολουθήσαμε την γενική διαδικασία της ορθογωνοποιησης Gram-Schmidt (Θεώρημα 4.4) έχουμε :

$$\xi_1 = \eta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xi_2 = \eta_2 - \frac{\eta_2 \bullet \xi_1}{\xi_1 \bullet \xi_1}\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xi_3 = \eta_3 - \frac{\eta_3 \bullet \xi_1}{\xi_1 \bullet \xi_1}\xi_1 - \frac{\eta_3 \bullet \xi_2}{\xi_2 \bullet \xi_2}\xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{0}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{18}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

όπου $\bullet$ δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο. Συνεπώς παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Η βάση που αποτελείται από τα ορθογώνια ιδιοδιανύματα $\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}$ θα είναι μια ορθοκανονική βάση του πίνακα A

ΣΧΟΛΙΟ_8β Αν ο Α θεωρηθεί ορθομοναδιαίος με μιγαδικούς συντελεστές τοτε η πρόταση είναι λάθος.

Πράγματι:

Η πρόταση **"**υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $A^2x = x$ " ισοδυναμεί με την « ο Α^2 έχει ιδιοτιμή ιση προς το 1».

Θεωρούμε τον πίνακα Α= $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$ με ω=$(1+i\sqrt{3})/2$. Ο Α είναι ορθομοναδιαίος αφού

$$AA^* = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 & 0 & 0 \\ 0 & -i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega\overline{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

αλλά $A^2 = \begin{pmatrix} i^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{\omega} \end{pmatrix}$ δεν έχει καμμία ιδιοτιμή ιση προς 1.

ΣΧΟΛΙΟ_8γ Η μέθοδος για να βρούμε τον παραπάνω γραμμικό συνδυασμό είναι η εξής:

$$\lambda(a-b)+\mu(b+c)+\nu(c+a)=0 \Leftrightarrow (\lambda+\nu)a+(-\lambda+\mu)b+(\mu+\nu)c=0$$

και επειδή τα διανύσματα *a, b, c,* είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda+\nu=0 \\ -\lambda+\mu=0 \\ \mu+\nu=0 \end{array} \right\}$$

που οι λύσεις του είναι (*λ, μ, ν*)= α(1, 1,-1) όπου α ελεύθερη παράμετρος. Ειδικότερα έχουμε και μη μηδενικές λύσεις για παράδειγμα *λ= μ=-ν=1 έτσι ώστε να ισχύει η σχέση,* $1(a-b)+1(b+c)+(-1)(c+a)=0$.

ΣΧΟΛΙΟ_8δ Ένας πιο εύκολος τρόπος να δείξουμε ότι η *f* **δεν είναι γραμμική** είναι να παρατηρήσουμε ότι, λόγω της ιδιότητας $f(kx)=kf(x)$, για κάθε $k \in \mathbb{R}$, μιας γραμμικής απεικόνισης (βλ. ορισμό (5.1), σελ. 90), θα έπρεπε να είχαμε $f(0,0,0)=(0,0,0)$, που όμως δεν ισχύει στην περίπτωσή μας.