ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΘΕ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΉ Ι (ΠΛΗ 12)

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Άσκηση 1. (10 μον.).

Έστω z ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$.
(α) Δίνεται η εξίσωση:

$$z^3 + az^2 + z + 1 = 0 .$$

Αν γνωρίζουμε ότι μία ρίζα της είναι η $z_1 = i$, προσδιορίστε την παράμετρο $α$ και βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες της z_2, z_3 .

(β) Προσδιορίστε στο μιγαδικό επίπεδο *x, y* το σύνολο των σημείων που επαληθεύει την εξίσωση: $|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}((1-3i)z) + 6 = 0$. (Re(z)=Πραγματικό μέρος του z)

Υπόδειξη: *Θέστε z=x+iy και βρείτε μια εξίσωση με x, y. Παρατηρείστε ότι η εξίσωση* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ *(όπου όλα είναι πραγματικοί και r>0) παριστά έναν κύκλο κέντρου* (x_0, y_0) *και ακτίνας r.*

<u>Λύση</u>

(α) Αφού η z_1=i είναι μία ρίζα της εξίσωσης, θα ισχύει ότι:

$$i^3 + ai^2 + i + 1 = 0 \Rightarrow -i - a + i + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 .$$

Επομένως η υπό μελέτη εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 \cdot (z+1) + z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2+1)\cdot(z+1) = 0 \Leftrightarrow (z-i)\cdot(z+i)\cdot(z+1) = 0$$

Έτσι, οι ρίζες της είναι οι $z_1 = i,\ z_2 = -i,\ z_3 = -1$.

<u>2ος τρόπος:</u>

Έχουμε ήδη βρει ότι $α$=1. Εφόσον το πολυώνυμο $z^3 + z^2 + z + 1$ έχει πραγματικούς συντελεστές και μια μιγαδική ρίζα την $z_1 = i$, θα έχει και την συζυγή της $z_2 = \overline{z_1} = -i$. Άρα το $z^3 + z^2 + z + 1$ διαιρείται από δευτεροβάθμιο πολυώνυμο $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$.

Εκτελούμε τη διαίρεση

$$\begin{array}{rrrr|rr}
z^3 & +z^2 & +z & +1 & z^2 & +1 \\ \cline{5-6}
-z^3 & & -z & & z & +1 \\ \cline{1-4}
 & z^2 & & +1 & & \\ \cline{2-4}
 & -z^2 & & -1 & & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Επομένως, $z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2+1)(z+1)$ και η τρίτη ρίζα είναι η $z_3 = -1$.

(β) Θέτοντας z=x+iy έχουμε:

$$|x+iy|^2 - 2\,\mathrm{Re}((1-3i)(x+iy)) + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\,\mathrm{Re}(x + 3y + i(y-3x)) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(x+3y) + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 6y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1^2) + (y^2 - 2\cdot 3\cdot y + 3^2) - 1 - 3^2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$

Προκύπτει επομένως ένας κύκλος κέντρου (1,3) και ακτίνας 2.

Άσκηση 2. (8 μον.)

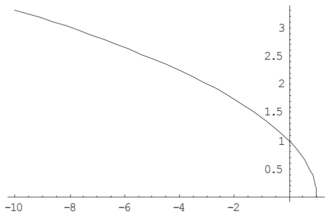
Δίνονται οι συναρτήσεις $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$, $\quad g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\quad h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\sqrt{1-x}, \qquad g(x)=\ln(x-1) \quad \text{και} \quad h(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x+1}.$$

(α) Να προσδιορισθεί ακριβώς το πεδίο τιμών τους στο $\mathbb{R}$ και να εξηγηθεί αν είναι επί ή /και 1 – 1.
(β) Να ορίσετε τις σύνθετες συναρτήσεις : $h_1=g\circ f$, $h_2=f\circ g$, $h_3=h\circ f$ και να προσδιορίσετε ακριβώς το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών τους.

Λύση:

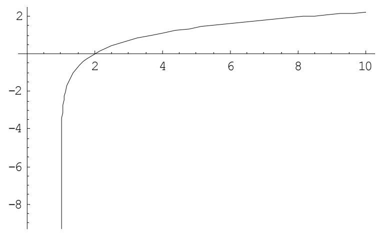
(α) Προφανώς $f(x)=\sqrt{1-x}\geq 0$. Επομένως, το πεδίο τιμών της f περιέχεται στο διάστημα [0, +∞).
Αντίστροφα, αν $y\geq 0$ θα δείξουμε ότι υπάρχει $x\in(-\infty,1]$, τέτοιο ώστε $y=\sqrt{1-x}$.
Πράγματι, $y=\sqrt{1-x}\Rightarrow y^2=1-x\Leftrightarrow x=1-y^2$. Αλλά, $1-y^2\leq 1\Rightarrow 1-y^2\in(-\infty,1]$ και $f(1-y^2)=\sqrt{1-(1-y^2)}=\sqrt{y^2}=|y|\underset{y\geq 0}{=}y$. Επομένως, το πεδίο τιμών της f είναι το διάστημα [0, +∞) και η f δεν είναι επί.
Είναι όμως 1-1 γιατί : $\sqrt{1-x_1}=\sqrt{1-x_2}\Rightarrow 1-x_1=1-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$.
Η γραφική παράσταση της f έχει ως εξής:



Σε ότι αφορά την g(x):
Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $\ln:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ του λογαρίθμου έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$ και πεδίο τιμών όλο το $\mathbb{R}$.
Για να ορίζεται η $g(x)$ θα πρέπει $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.
Έστω τώρα $y\in\mathbb{R}$. Τότε, λύνοντας την εξίσωση $y=\ln(x-1)$, έχουμε:

$$y=\ln(x-1)\Leftrightarrow e^y=x-1\Leftrightarrow x=e^y+1>1.$$

Έτσι, για κάθε $y\in\mathbb{R}$, υπάρχει $x\in(1,+\infty)$, με $y=\ln(x-1)$. Δηλαδή, το πεδίο τιμών της g είναι όλο το $\mathbb{R}$ και, επομένως, η g είναι επί.
Είναι και 1-1, γιατί αν $g(x_1)=g(x_2)$, τότε $\ln(x_1-1)=\ln(x_2-1)\underset{1-1}{\overset{\ln}{\Rightarrow}} x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2$.
Γραφικά η g έχει τη μορφή:



Τέλος, για την τρίτη συνάρτηση h(x) έχουμε: Για να βρούμε το πεδίο τιμών της, θέτουμε

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+x+1}\Leftrightarrow y(x^2+x+1)=x^2-1 \Leftrightarrow yx^2+yx+y=x^2-1\Leftrightarrow \Leftrightarrow (y-1)x^2+yx+y+1=0.$$

Η τελευταία εξίσωση θα πρέπει να έχει πραγματικές ρίζες ως προς x.

Για $y=1$ είναι η πρωτοβάθμια $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

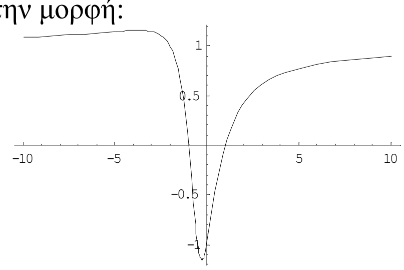
Πράγματι, $h(-2)=\dfrac{(-2)^2-1}{(-2)^2+(-2)+1}=\dfrac{3}{4-2+1}=1$ και συνεπώς το 1 ανήκει στο πεδίο τιμών. Αν $y\neq 1$, τότε είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $y^2-4(y-1)(y+1)=-3y^2+4=-3\left(y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(y+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Άρα η εξίσωση $(y-1)x^2+yx+y+1=0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνον αν $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leq y\leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Επομένως το πεδίο τιμών της *h* είναι το διάστημα $\left[-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ (αφού αυτό περιέχει και την τιμή $y=1$ που βρήκαμε προηγουμένως). Η συνάρτηση *h* δεν είναι λοιπόν επί.

Δεν είναι ούτε 1-1 γιατί $h(1)=h(-1)=0$. Γενικότερα, αν $y\neq 1$ και $y\neq \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, η δευτεροβάθμια εξίσωση $(y-1)x^2+yx+y+1=0$ έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $x_1=\dfrac{-y+\sqrt{4-3y^2}}{2(y-1)}$ και $x_2=\dfrac{-y-\sqrt{4-3y^2}}{2(y-1)}$, με $h(x_1)=h(x_2)=y$.

Η γραφική παράσταση της *h* έχει την μορφή:



(β) $h_1(x)=g(f(x))=g(\sqrt{1-x})=\ln(\sqrt{1-x}-1)$.

Θα πρέπει $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$ και $\sqrt{1-x}-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}>1 \Leftrightarrow 1-x>1 \Leftrightarrow x<0$.

Άρα τελικά $x<0$ και το πεδίο ορισμού της $h_1=g\circ f$ είναι το διάστημα $(-\infty, 0)$.

Για το πεδίο τιμών παρατηρούμε ότι: Αν $y\in\mathbb{R}$, τότε

$y=h_1(x)=\ln(\sqrt{1-x}-1) \Leftrightarrow e^y=\sqrt{1-x}-1 \Leftrightarrow 1-x=(e^y+1)^2 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow x=1-(e^y+1)^2$.

Πράγματι, $1-(e^y+1)^2\in(-\infty, 0)$ και

$h_1(1-(e^y+1)^2)=\ln(\sqrt{1-[1-(e^y+1)^2]}-1)=\ln(\sqrt{(e^y+1)^2}+1)= \ =\ln(e^y+1-1)=\ln(e^y)=y$.

Επομένως, το πεδίο τιμών της h_1 είναι όλο το $\mathbb{R}$.

$h_2(x)=f(g(x))=f(\ln(x-1))=\sqrt{1-\ln(x-1)}$.

Πρέπει $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ και $1-\ln(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow \ln(x-1)\leq 1 \Leftrightarrow x-1\leq e \Leftrightarrow x\leq e+1$.

Επομένως, $1<x\leq e+1$, δηλαδή το πεδίο ορισμού της h_2 είναι το διάστημα $(1, e+1]$.

Σε ότι αφορά το πεδίο τιμών, παρατηρούμε ότι $h_2(x)=\sqrt{1-\ln(x-1)}\geq 0$. Αντίστροφα, για κάθε $y\in[0,+\infty)$ έχουμε:

$$y=\sqrt{1-\ln(x-1)} \underset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} y^2=1-\ln(x-1) \Leftrightarrow \ln(x-1)=1-y^2 \Leftrightarrow x-1=e^{1-y^2} \Leftrightarrow x=e^{1-y^2}+1.$$

Πράγματι, $e^{1-y^2}+1\in(1, e+1]$ και

$$h_2(e^{1-y^2}+1)=\sqrt{1-\ln(e^{1-y^2}+1-1)}=\sqrt{1-\ln(e^{1-y^2})}=\sqrt{1-(1-y^2)}=|y| \underset{y\geq 0}{=} y.$$

Επομένως, το πεδίο τιμών της h_2 είναι το διάστημα $[0,+\infty)$.

Τέλος, για την h_3 έχουμε:

$$h_3(x)=h(f(x))=h(\sqrt{1-x})=\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2-1}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2+\sqrt{1-x}+1}=-\frac{x}{2-x+\sqrt{1-x}}.$$

Ο μόνος περιορισμός είναι $1-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1$ (γιατί $t^2+t+1\ne 0$, για κάθε $t\in\mathbb{R}$, άρα και για $t=\sqrt{1-x}$). Παρατηρούμε ότι, ενώ το x διατρέχει το διάστημα $(-\infty,1]$, η ρίζα $t=\sqrt{1-x}$ διατρέχει το διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα $h_3(x)=h(t),\quad t\ge 0$. Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της h στο $[0,+\infty)$.

Έστω λοιπόν $0\le t_1<t_2$. Τότε,

$$h(t_1)-h(t_2)=\frac{t_1^2-1}{t_1^2+t_1+1}-\frac{t_2^2-1}{t_2^2+t_2+1}=\frac{(t_1^2-1)(t_2^2+t_2+1)-(t_2^2-1)(t_1^2+t_1+1)}{(t_1^2+t_1+1)(t_2^2+t_2+1)}=\frac{t_1^2t_2+2t_1^2-2t_2^2+t_1-t_2-t_2^2t_1}{(t_1^2+t_1+1)(t_2^2+t_2+1)}$$

$$=\frac{t_1t_2(t_1-t_2)+2(t_1-t_2)(t_1+t_2)+(t_1-t_2)}{(t_1^2+t_1+1)(t_2^2+t_2+1)}=\frac{(t_1t_2+2t_1+2t_2+1)(t_1-t_2)}{(t_1^2+t_1+1)(t_2^2+t_2+1)}<0.$$

Άρα $h(t_1)<h(t_2)$ και η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

(Εναλλακτικά, η h έχει θετική παράγωγο $h'(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}\right)'=\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$)

Επιπλέον, $h(0)=\dfrac{0^2-1}{0^2+0+1}=-1$ και $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2-1}{t^2+t+1}=1$. Επομένως, το σύνολο τιμών της $h_3(x), x\le 1$, ή ισοδύναμα της $h(t), t\ge 0$, είναι το διάστημα [-1, 1).

Άσκηση 3. (8 μον.)

Να υπολογιστούν τα όρια των κάτωθι ακολουθιών με $n\in\mathbb{N}$:

(α) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2n^2+n-5}{7n^2+n+1}$ **(β)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3-3n^2+n-5}{3n^2-n+2}$

(γ) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2+n-3})$ **(δ)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+4^n}{(-2)^n+5^n}$

Λύση:

(α) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n^2+n-5}{7n^2+n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(-2+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(7+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{-2+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}}{7+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{-2+0-0}{7+0+0}=-\frac{2}{7}.$$

(β)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3-3n^2+n-5}{3n^2-n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^2\left(3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\left[n\cdot\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}\right]=(+\infty)\cdot\frac{2}{3}=+\infty$$

(γ)

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2+n-3})=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2+n-3})(\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2+n-3})}{\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2+n-3}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+5-(n^2+n-3)}{\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2+n-3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+8}{\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2+n-3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+8}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+5}}{n}+\frac{\sqrt{n^2+n-3}}{n}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{8}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0-0}}=\frac{1}{2}$$

(δ) Διαιρούμε με τη δύναμη του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+4^n}{(-2)^n+5^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(-\frac{2}{5}\right)^n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n+1}=\frac{0+0}{0+1}=0\,.$$

Άσκηση 4.

(α) Υποθέστε ότι ο μηνιαίος μισθός σας είναι 1000 ευρώ, ενώ το κεφάλαιό σας, a_n, μειώνεται κατά τη διάρκεια ενός μηνός κατά τα 2/3 αυτού. Με την αρχή του νέου μήνα, επομένως, το νέο σας κεφάλαιο είναι $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+1000$. Αν a_0 =1000, ποιο είναι το κεφάλαιό σας στο n-οστό μήνα και σε ποιό ποσό K συγκλίνει, $a_n\to K$, καθώς περνούν οι μήνες ($n\to\infty$);

(β) Δείξτε ότι η ακολουθία που παράγεται από την αναδρομική σχέση $a_{n+1}=\sqrt{3a_n-2}$, (με $a_n>2/3$) είναι γνησίως αύξουσα για $1<a_0<2$ και γνησίως φθίνουσα για $a_0>2$. Χρησιμοποιείστε τη θεωρία της Ενότητας 2.4 και τον υπολογιστή σας για να προσδιορίσετε το όριο της ακολουθίας όταν το a_0 παίρνει τιμές στις δύο αυτές περιοχές.

Λύση:

(α) Από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+1000$ υπολογίζουμε μερικούς όρους της ακολουθίας:

$$a_0=a_0$$

$$a_1=\frac{1}{3}a_0+a_0=(1+\frac{1}{3})a_0$$

$$a_2=\frac{1}{3}a_1+a_0=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{3})a_0+a_0=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2})a_0.$$

Με βάση τα παραπάνω εικάζουμε ότι ισχύει

$$a_n=(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{3^n})a_0,\quad n=0,1,...$$

Πράγματι, η σχέση αυτή αποδεικνύεται άμεσα με μια επαγωγή. Συνεπώς παίρνουμε

$$a_n=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}a_0.$$

Λαμβάνοντας το όριο έχουμε

$$\lim a_n=\frac{1-\lim\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}a_0=\frac{1-0}{1-\frac{1}{3}}a_0=\frac{3}{2}a_0=1500=K$$

που αντιπροσωπεύει το ποσό των Ευρώ που θα μας μείνει τελικά.

(β) Αρχικά θα δείξουμε ότι αν $a_0 > 1$, τότε η ακολουθία ορίζεται καλά, δηλαδή ότι το $\sqrt{3a_n - 2}$ έχει έννοια. Αρκεί να ελέγξουμε ότι $3a_n - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a_n \geq \frac{2}{3}$, για κάθε $n = 0,1,2,\ldots$. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο: $a_n > 1$, για κάθε $n = 0,1,2,\ldots$

Για $n = 0$, έχουμε $a_0 > 1$, που ισχύει από υπόθεση.

Αν τώρα $a_n > 1$, τότε $3a_n - 2 > 3 - 2 = 1 \Rightarrow \sqrt{3a_n - 2} > 1$, δηλαδή $a_{n+1} > 1$. Άρα, με βάση την αρχή της τέλειας επαγωγής, $a_n > 1$, για κάθε $n = 0,1,2,\ldots$

Παρατηρούμε επίσης ότι $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3a_n - 2 - a_n^2 = -(a_n^2 - 3a_n + 2) = -(a_n - 1)(a_n - 2)$. Άρα, αν $1 < a_n < 2$, τότε $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -(a_n - 1)(a_n - 2) > 0$, ενώ αν $a_n > 2$, $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -(a_n - 1)(a_n - 2) < 0$.

1η περίπτωση: Έστω $1 < a_0 < 2$.

Υποθέτουμε ότι $1 < a_n < 2$. Τότε $1 < 3a_n - 2 < 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3a_n - 2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow 1 < a_{n+1} < 2$.

Άρα $1 < a_n < 2$, για κάθε $n = 0,1,2,\ldots$. Έτσι, $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -(a_n - 1)(a_n - 2) > 0$ και επειδή οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί, $a_{n+1} > a_n$, για κάθε $n = 0,1,2,\ldots$, η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον, αφού $1 < a_n < 2$, η ακολουθία είναι άνω φραγμένη από το 2. Ως αύξουσα και άνω φραγμένη θα συγκλίνει σ' έναν αριθμό *x*. Τότε, $x = \lim_{n\to+\infty} a_n \geq a_0 > 1$.

Ακόμη, $x = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{3a_n - 2} = \sqrt{3\lim_{n\to+\infty} a_n - 2} = \sqrt{3x - 2}$.

Άρα $x = \sqrt{3x - 2} \Rightarrow x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$. Επειδή $x > 1$, έπεται ότι $x = \lim_{n\to+\infty} a_n = 2$.

2η περίπτωση: Έστω $a_0 > 2$.

Υποθέτουμε ότι $a_n > 2$. Τότε $3a_n - 2 > 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3a_n - 2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow a_{n+1} > 2$.

Άρα $a_n > 2$, για κάθε $n = 0,1,2,\ldots$. Επομένως $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -(a_n - 1)(a_n - 2) < 0$ και επειδή οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί, $a_{n+1} < a_n$, για κάθε $n = 0,1,2,\ldots$ Δηλαδή, η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή όμως $a_n > 2$, η ακολουθία είναι και κάτω φραγμένη από το 2. Έτσι, ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη η a_n θα συγκλίνει σ' έναν αριθμό *x*. Τότε, $x = \lim_{n\to+\infty} a_n \geq 2$ και

$x = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{3a_n - 2} = \sqrt{3\lim_{n\to+\infty} a_n - 2} = \sqrt{3x - 2}$.

Άρα $x = \sqrt{3x - 2} \Rightarrow x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$. Επειδή $x \geq 2$, έπεται ότι $x = \lim_{n\to+\infty} a_n = 2$.

Άσκηση 5.

Κατά τη διάρκεια μιας προεκλογικής περιόδου και στις χρονικές στιγμές 0, 1, 2, . . . , n, . . . δημοσιεύονται οι τάσεις του εκλογικού σώματος που αφορούν δύο υποψήφιους Α, Β. Συμβολίζουμε με a_n, b_n τα ποσοστά του δείγματος που είναι υπέρ των υποψηφίων Α και Β αντίστοιχα, την χρονική στιγμή n. Η εξέλιξη των ποσοστών αυτών από την *n* στην *n+1* δημοσκόπηση δίνεται από τη σχέση

$$X_{n+1} = MX_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

όπου $X_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix}^T$ και $M = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$

και $a_n + b_n = 1$ (επειδή πρόκειται για ποσοστά). Για να βρείτε τα ποσοστά δημοτικότητας των δύο υποψηφίων μετά από n δημοσκοπήσεις, υπολογίστε την ποσότητα $X_n = M^n X_0$ ως ακολούθως:

(α) Διαγωνοποιείστε τον πίνακα M σε ένα πίνακα Λ χρησιμοποιώντας τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων του P (και τον P^{-1}) και εκφράστε τον πίνακα $M^n, (n \geq 2)$ μέσω των P, P^{-1} και του Λ^n.

(β) Κατόπιν βρείτε το όριο του X_n, όταν $n \to +\infty$ και δείξτε ότι είναι ανεξάρτητο από την αρχική συνθήκη $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix}^T$, υπολογίζοντας έτσι και τα τελικά ποσοστά των 2 υποψηφίων.

Λύση:

(α) $X_{n+1} = MX_n = M^2 X_{n-1} = M^3 X_{n-2} = \cdots = M^n X_1 = M^{n+1} X_0$. Αν θέσουμε n στη θέση του n+1, θα πάρουμε: $X_n = M^n X_0$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Μ είναι: $\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 0,6 & -0,3 \\ -0,4 & \lambda - 0,7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{13}{10}\lambda + \frac{3}{10}$ με

ρίζες (ιδιοτιμές του M): $\dfrac{\frac{13}{10} \pm \frac{7}{10}}{2} = \dfrac{13 \pm 7}{20} = \begin{cases} \dfrac{13+7}{20} = 1 \\ \dfrac{13 \pm 7}{20} = \dfrac{3}{10} \end{cases}$

Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

Για την ιδιοτιμή 1:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = 0 \\ \frac{2}{5}x - \frac{3}{10}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4x + 3y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y.$$ Επομένως, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{y}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \; y \neq 0$.

Για την ιδιοτιμή $\frac{3}{10}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}x \\ \frac{3}{10}y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{3}{10}y = 0 \\ \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y.$$ Επομένως, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; y \neq 0$.

Έστω $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων. Τότε $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$.

Ακόμη, $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$ και επομένως $M = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}P^{-1}$. Άρα

$$M^n = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{10}\right)^n \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{10}\right)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n \\ \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n \end{bmatrix}$$

(β) $$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n \\ \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) + b_0\left(\frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) \\ a_0\left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) + b_0\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) \end{bmatrix}.$$

Επομένως, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) + b_0\left(\frac{3}{7} - \frac{3}{7}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) = a_0\left(\frac{3}{7} + 0\right) + b_0\left(\frac{3}{7} - 0\right) =$

$= \frac{3}{7}\left(a_0 + b_0\right) = \dfrac{3}{7}$ (γιατί $a_0 + b_0 = 1$) και

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a_0\left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) + b_0\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{7}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) = a_0\left(\frac{4}{7} - 0\right) + b_0\left(\frac{4}{7} + 0\right) = = \frac{4}{7}\left(a_0 + b_0\right) = \dfrac{4}{7}.$

Έτσι, $\lim_{n\to+\infty} X_n = \begin{bmatrix} \lim_{n\to+\infty} a_n \\ \lim_{n\to+\infty} b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$, το οποίο είναι πράγματι ανεξάρτητο από την αρχική συνθήκη.

Άσκηση 6.

Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

(α) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n + 3\cdot 5^n}{4\cdot 7^n}$ **(β)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$ ***Υπόδειξη:*** $\frac{1}{9n^2-3n-2} = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(γ) Να συγκριθεί η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \right)^n$$

με εκείνη που έχει γενικό όρο $(1/2)^n$, να δειχθεί ότι συγκλίνει και να βρεθεί, μέσω της σύγκρισης αυτής, ο ελάχιστος αριθμός των όρων που χρειάζονται ώστε το σφάλμα της σειράς (ή η «απόσταση» από το όριό της) να είναι μικρότερο από 0,0001.

Λύση:

(α) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n + 3\cdot 5^n}{4\cdot 7^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{7}\right)^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{7}} = \frac{203}{72}$

(β) Παρατηρούμε ότι $9n^2 - 3n - 2 = 9n^2 - 6n + 3n - 2 = 3n(3n-2) + (3n-2) = (3n-2)(3n+1)$.
Θέτουμε

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} \Leftrightarrow 1 = A(3n+1) + B(3n-2) \Leftrightarrow 1 = 3n(A+B) + (A-2B)$$

Άρα $\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$. Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) =$

$$= \frac{1}{3}\lim_{k\to+\infty}\left(1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{3k-2}} - \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}\lim_{k\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

(γ) $\sqrt{n^2+n}+n > \sqrt{n^2}+n = n+n = 2n$. Άρα $\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n < \left(\frac{n}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n$.

Έστω $A = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n$. Το σφάλμα της προσέγγισης του A από το μερικό άθροισμα $\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n$ είναι

$$\left| A - \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n \le \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{k+1}}\cdot 2 = \frac{1}{2^k}$$

Άρα, πρέπει $\frac{1}{2^k} < 10^{-4} \Leftrightarrow 2^k > 10^4 \Leftrightarrow k\ln 2 > 4\ln 10 \Leftrightarrow k > \frac{4\ln 10}{\ln 2} = \frac{4\cdot 2,30}{0,69} = 13,33$

Επομένως, αρκεί να πάρουμε $k \geq 14$.

Άσκηση 7.

Δεχόμαστε το ακόλουθο **Θεώρημα (Κριτήριο Leibniz):** *Αν η ακολουθία των θετικών όρων a_n έχει όριο το μηδέν και είναι φθίνουσα , τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.*

(α) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου και το Κριτήριο Leibniz δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n3^n}$ συγκλίνει μόνο για τις τιμές του x που ανήκουν στο διάστημα $[-3,3)$.

Λύση:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου Leibniz αφού οι όροι της ακολουθίας $\frac{1}{2n-1}$ είναι θετικοί, η ίδια ακολουθία τείνει στο μηδέν και είναι φθίνουσα αφού ισχύει: $\frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} < 0$. Άρα η σειρά **συγκλίνει**.

Αντίθετα, η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$ **δεν συγκλίνει** γιατί η ακολουθία των όρων της δεν είναι μηδενική.

Πράγματι, $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

(β) Αν $x=0$ τότε προφανώς $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n3^n} = 0$. Έστω $x \neq 0$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{x^n}{n3^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{nx}{3(n+1)}\right| = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{3}\cdot 1 = \frac{|x|}{3}.$$

Άρα, αν $\frac{|x|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n3^n}$ συγκλίνει, αφού συγκλίνει απολύτως.

Αν $\frac{|x|}{3} > 1 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x > 3$ ή $x < -3$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n3^n}$ δεν συγκλίνει, επειδή ο γενικός όρος της σειράς τείνει (απολύτως) στο άπειρο καθώς $n \to \infty$.

Εξετάζουμε ξεχωριστά τη σειρά στα σημεία $x = \pm 3$. Αν $x=3$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = \zeta(1) = +\infty$.

Αν $x=-3$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου Leibniz και άρα, συγκλίνει. Συμπερασματικά, η σειρά συγκλίνει στο διάστημα [-3,3).

Άσκηση 8. (10 μον.)

(α) Προσδιορίστε τα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης

$$h(x) = x^2 - 4x - 5, \qquad -\infty < x < \infty .$$

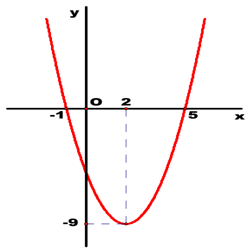
στα οποία αυτή αντιστρέφεται και υπολογίστε τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της αντιστρόφου της σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά.

(β) Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, δείξτε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να προσδιορίστε την, επισημαίνοντας το πεδίο ορισμού της.

Λύση:

(α) Από τα μαθηματικά της Α΄ Λυκείου γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση της μορφής $h(x)=ax^2+bx+c$, με $a>0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$, γνησίως αύξουσα στο $[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $h(-\dfrac{b}{2a})=-\dfrac{\Delta}{4a}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου. Ακόμη, $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. Επομένως η h έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-\dfrac{\Delta}{4a},+\infty)$ και αντιστρέφεται στα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού της $(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$ και $[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ δίνοντας δύο συναρτήσεις $h_1:[-\dfrac{\Delta}{4a},+\infty)\to(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$ (γνησίως φθίνουσα) και $h_2:[-\dfrac{\Delta}{4a},+\infty)\to[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ (γνησίως αύξουσα).

Στην περίπτωσή μας, έχουμε $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-4}{2}=2$ και $-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{(-4)^2-4(-5)}{4}=-9$. Επομένως, η h αντιστρέφεται στα διαστήματα $(-\infty,2]$ και $[2,+\infty)$ δίνοντας δύο συναρτήσεις
$h_1:[-9,+\infty)\to(-\infty,2]$ (γνησίως φθίνουσα) και $h_2:[-9,+\infty)\to[2,+\infty)$ (γνησίως αύξουσα).



Οι τύποι των h_1 και h_2 υπολογίζονται ως εξής: Λύνουμε την εξίσωση
$y=x^2-4x-5 \Leftrightarrow x^2-4x-5-y=0$ (όπου $y\ge -9$) ως προς x και βρίσκουμε
$x=\dfrac{4\pm\sqrt{36+4y}}{2}=\dfrac{4\pm2\sqrt{9+y}}{2}=2\pm\sqrt{9+y}$. Προφανώς $2-\sqrt{9+y}<2<2+\sqrt{9+y}$ για κάθε $y>-9$. Επομένως, $h_1(y)=2-\sqrt{9+y}$ και $h_2(y)=2+\sqrt{9+y}$ ή, διατηρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το x, $h_1(x)=2-\sqrt{9+x}$ και $h_2(x)=2+\sqrt{9+x}$.

(β) $0<f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}<1$. Άρα το σύνολο τιμών της f περιέχεται στο διάστημα $(0,1)$.

Αντίστροφα, έστω $y\in(0,1)$. Λύνουμε την εξίσωση $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ως προς x:

$$y=\frac{e^x}{1+e^x}\Leftrightarrow y+ye^x=e^x\Leftrightarrow e^x(1-y)=y\underset{y\neq1}{\Leftrightarrow}e^x=\frac{y}{1-y}\underset{\substack{0<y<1\text{ και}\\ \text{άρα }\frac{y}{1-y}>0}}{\Leftrightarrow}x=\ln\left(\frac{y}{1-y}\right).$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι όλο το διάστημα $(0,1)$.

Επίσης, αφού η εξίσωση $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ έχει μοναδική λύση ($\forall\ y \in (0,1)$) την $x = \ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$, έπεται ότι η f είναι 1-1 και η αντίστροφή της έχει τύπο $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\quad 0 < x < 1\cdot$

Άσκηση 9. (10 μον.)

(α) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2^{1/x}+3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{1/x}+3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχείς στο $x = 0$ και δικαιολογείστε την απάντησή σας.

(β) Να προσδιορίσετε τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-ax}{x-1}, & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x = 1$.

Λύση:

(α) Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2^{1/x}+3} = \lim_{x\to 0^-} x \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2^{1/x}+3} \underset{y=\frac{1}{x}\to-\infty}{=} 0 \cdot \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{2^y+3} = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2^{1/x}+3} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^{1/x}+3} \underset{y=\frac{1}{x}\to+\infty}{=} 0 \cdot \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2^y+3} = 0 \cdot 0 = 0\,.$$

Επομένως υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και είναι ίσο με μηδέν. Επιπλέον, $f(0) = 0$, οπότε η f **είναι συνεχής** στο $x = 0$ (αλλά και σ' όλο το $\mathbb{R}$).

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{2^{1/x}+3} = \dfrac{1}{3}$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2^{1/x}+3} = 0$, όπως έχουμε ήδη υπολογίσει. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και επομένως η f **δεν είναι συνεχής** στο $x = 0$.

(β) Αν η f είναι συνεχής στο $x = 1$, τότε $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = b$. Αλλά τότε $\lim_{x\to 1}[(x-1)f(x)] = 0 \cdot b = 0$.

Όμως, $\lim_{x\to 1}[(x-1)f(x)] = \lim_{x\to 1}\left[\sqrt{x^2+3}-ax\right] = \sqrt{1^2+3}-a = 2-a$. Επομένως, $2-a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Τώρα, $b = f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 - 4x^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3-4x^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(1-x^2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}$$

$$= -\lim_{x\to 1} \frac{3\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)} = -3\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2x} = -3 \cdot \frac{1+1}{\sqrt{1^2+3}+2} = -3 \cdot \frac{2}{4} = -\frac{3}{2}$$

Άσκηση 10.

Να υπολογιστούν τα κάτωθι όρια, στην περίπτωση που αυτά υπάρχουν:

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-2}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\tan(\frac{3x-\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{3}}$

Λύση:

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x+3)-(x+3)}{x^2+2x-x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x^2-1)}{x(x+2)-(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x+2)\cancel{(x-1)}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x+1)}{x+2}=\dfrac{(1+3)(1+1)}{1+2}=\dfrac{8}{3}$.

(ii) Έχουμε $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Επομένως, $x^2-3x+2<0$ για $1<x<2$ και $x^2-3x+2>0$ για $x>2$. Άρα, αν $1<x<2$, τότε $|x^2-3x+2|=-(x^2-3x+2)$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-2}=-\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=-\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=-\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=-1$.

Αν $x>2$ τότε $|x^2-3x+2|=x^2-3x+2$ και επομένως

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)=1$.

Εφόσον $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-2}$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-2}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\tan(\frac{3x-\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{3}}$. Θέτουμε $y=x-\dfrac{\pi}{3}\xrightarrow[x\to\pi/3]{}0$. Τότε $\dfrac{3x-\pi}{2}=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}y$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\tan(\frac{3x-\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\tan\left(\frac{3}{2}y\right)}{y}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\tan\left(\frac{3}{2}y\right)}{\frac{3}{2}y}\underset{u=\frac{1}{2}y\to 0}{=}\dfrac{3}{2}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\tan u}{u}=$

$=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{\cos u}\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos 0}\cdot 1=\dfrac{3}{2}$, γιατί $\cos 0=1$.
