ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΘΕ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΉ Ι (ΠΛΗ 12)

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5

Άσκηση 1. (8 μον.)
Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = a\cos\theta$, ή $x = a\tan\theta$, για μια κατάλληλη σταθερά α, υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ β) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx$

Υπόδειξη: Για το α) ακολουθείστε το παράδειγμα της σελ. 154 του βιβλίου, ενώ για το β) χρησιμοποιείστε και την αντικατάσταση $u = \cos\theta$.

Λύση:

α) Θέτοντας $x = 2\cos\theta$ και παραγωγίζοντας ως προς θ παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των διαφορικών $\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta \Rightarrow dx = -2\sin\theta d\theta$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα βρίσκουμε:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = -\int \frac{4\cos^2\theta}{\sqrt{4-4\cos^2\theta}}2\sin\theta d\theta = -\int \frac{4\cos^2\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\sin\theta d\theta =$$
$$-\int \frac{4\cos^2\theta}{\sin\theta}\sin\theta d\theta = -4\int \cos^2\theta d\theta$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ταυτότητα $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Τώρα χρησιμοποιούμε άλλη μια γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα
$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \quad \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = -2\int (\cos 2\theta + 1)d\theta = -2\int \cos 2\theta d\theta - 2\theta + C = -\sin 2\theta - 2\theta + C.$$

Παρατηρούμε ότι $x = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ και χρησιμοποιώντας μια ακόμη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα έχουμε
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = -x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - 2\cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

β) Θέτοντας $x = 5\tan\theta$ και παραγωγίζοντας ως προς θ παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των διαφορικών $\dfrac{dx}{d\theta} = 5\sec^2\theta \;\Rightarrow\; dx = 5\sec^2\theta d\theta$. Αντικαθιστώντας στο

ολοκλήρωμα Θέτουμε $x = 5\tan\theta \Rightarrow dx = \dfrac{5}{\cos^2\theta}d\theta$, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{625\tan^3\theta}{\cos^2\theta\sqrt{25\tan^2\theta+25}}d\theta = \int \frac{625\sin^3\theta}{5\cos^5\theta\sqrt{\tan^2\theta+1}}d\theta =$$

$$= \int \frac{125\sin^3\theta}{\cos^5\theta\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}}d\theta = 125\int\frac{\sin^3\theta}{\cos^4\theta}d\theta$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ταυτότητα $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

Θέτουμε $u = \cos\theta \Rightarrow du = -\sin\theta d\theta$. Έχουμε:

$$125\int\frac{\sin^3\theta}{\cos^4\theta}d\theta = 125\int\frac{\sin^3\theta}{u^4}\left(-\frac{du}{\sin\theta}\right) =$$

$$= -125\int\frac{\sin^2\theta}{u^4}du = -125\int\frac{1-u^2}{u^4}du =$$

$$= -125\left(-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u}\right) + C.$$

Εκφράζουμε τώρα το u συναρτήσει του x.

$\tan\theta = \dfrac{x}{5} \;\Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{x}{5} \;\Rightarrow \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \dfrac{x}{5} \Rightarrow \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{x^2}{25}$. Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε $u = \cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{25+x^2}}$.

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{25+x^2}}dx = -125\left(-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u}\right) + C = \frac{\sqrt{\left(25+x^2\right)^3}}{3} - 25\sqrt{25+x^2} + C.$$

Άσκηση 2. (12 μον.)

α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παραγοντικής ολοκλήρωσης (βλ. σελ. 149, 150 του βιβλίου) υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int \ln x dx$ και $\int (\ln x)^2 dx$.

β) Να βρεθεί αναγωγικός τύπος για το $I_n = \int (\ln x)^n dx$, $n = 3, 4, \ldots$, από τον οποίο να υπολογίζεται το I_n, συναρτήσει του προηγουμένου I_{n-1}.

γ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του β), υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα: $J_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$, για n = 5, 6,…,10. Τι παρατηρείτε για την τιμή του J_n, καθώς αυξάνει το n; Κάντε μια γραφική παράσταση του J_n ως προς n.

Λύση:

α) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο παραγοντικής ολοκλήρωσης βρίσκουμε για τα δύο πρώτα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \ln x dx = x\ln x - \int x \frac{d(\ln x)}{dx} dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C$$

$$I_2 = \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int x\frac{d(\ln x)^2}{dx} dx = x(\ln x)^2 - \int x 2(\ln x)\frac{1}{x} dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2I_1 = x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - x\right) + C$$

β) Τώρα μπορούμε να βρούμε επαγωγικά το ολοκλήρωμα. Για $n \geq 2$ έχουμε

$$I_n = \int \left(\ln x\right)^n dx = \int (x)'\left(\ln x\right)^n dx = x\left(\ln x\right)^n - \int x\left(\left(\ln x\right)^n\right)' dx =$$

$$= x\left(\ln x\right)^n - n\int x\left(\ln x\right)^{n-1}\left(\ln x\right)' dx = x\left(\ln x\right)^n - n\int x\left(\ln x\right)^{n-1}\frac{1}{x} dx =$$

$$= x\left(\ln x\right)^n - n\int \left(\ln x\right)^{n-1} dx = x\left(\ln x\right)^n - nI_{n-1}.$$

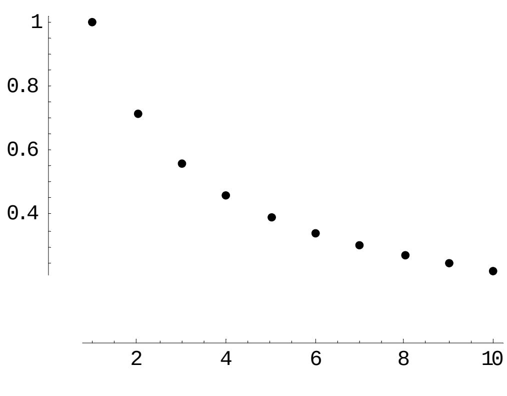
γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του β) μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $J_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$, για n =2, 3,… ως εξής: Πρώτα παρατηρούμε ότι από το α) έχουμε $J_1 = x\ln x - x\Big|_1^e = 1$. Τώρα για $n = 2, 3, ...$

$$J_n = \int_1^e (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n \Big|_1^e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1} dx = e - nJ_{n-1}.$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τη σχέση αυτή και λαμβάνοντας υπόψη ότι $J_1 = 1$ έχουμε J_2 = e-2 = 0.71828 , J_3 = e-3(e-2)= -2e+6 = 0.5634 , J_4 = e - 4(-2e +6) = 9e-24 = 0.4645, J_5 = e - 5(9e -24) = - 44e +120 = 0.3956, J_6 = 265e-720 = 0.34468, J_7 = -1854e+5040 = 0.30549 , J_8 = 0.27436 .....

Από τα αποτελέσματα αυτά ‘αναμένουμε’ ότι τα J_n φθίνουν καθώς μεγαλώνει το n.

Η γραφική παράσταση των παραπάνω τιμών του J_n έχει ως εξής :



Άσκηση 3. (10 μον.)

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-3}{x^3-3x^2+2x}$. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμά της $\mathrm{I}=\int f(x)dx$ ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

(α) Παρατηρείστε ότι ο παρονομαστής παραγοντοποιείται στην μορφή:

$$x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$$

και αναλύστε την f(x) σε "απλά" κλάσματα ως εξής:

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x-2}, \qquad (*)$$

όπου Α, Β, Γ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

(β) Υπολογίστε το ζητούμενο ολοκλήρωμα, Ι, χρησιμοποιώντας την ως άνω μορφή της *f(x)*, (*) και τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων που αναφέρονται στις σελίδες 148-149 του βιβλίου σας.

Λύση:

α) Έστω ότι

$$\frac{(x-3)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}.$$

Προσθέτοντας τα κλάσματα στο β μέλος παίρνουμε

$\dfrac{(x-3)}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$ και εξισώνοντας τους δυο αριθμητές έχουμε

$$x-3\doteq A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1).$$

Θέτοντας διαδοχικά στην παραπάνω σχέση $x=0, x=1, x=2$ παίρνουμε : $-3=2A$, $-2=-B$, $-1=2C$, δηλαδή $A=-\frac{3}{2}, B=2, C=-\frac{1}{2}.$

Σημείωση. Στην περίπτωση που ο παρονομαστής μιας ρητής παράστασης αναλύεται σε παράγοντες πρώτου βαθμού, όπου δεν υπάρχουν κοινές ρίζες π.χ.

$$f(x)=\frac{n(x)}{d(x)}=\frac{n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_2)}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a_n)}$$

$$\deg n(x)<\deg d(x)=n, a_i\neq a_j$$

τότε

$$A_i=\lim_{x\to a_i}(x-a_i)f(x), i=1,2,...,n$$

Στο παράδειγμα μας λοιπόν θα έχουμε :

$$A=\lim_{x\to 0} xf\left(x\right)=\lim_{x\to 0} x\frac{x-3}{x\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=\frac{-3}{\left(-1\right)\left(-2\right)}=-\frac{3}{2}$$

$$B=\lim_{x\to 1}\left(x-1\right)f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\left(x-1\right)\frac{x-3}{x\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x\left(x-2\right)}=\frac{-2}{1\left(-1\right)}=2$$

$$C=\lim_{x\to 2}\left(x-2\right)f\left(x\right)=\lim_{x\to 2}\left(x-2\right)\frac{x-3}{x\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x\left(x-1\right)}=\frac{-1}{2\times 1}=-\frac{1}{2}$$

Στην περίπτωση που ο παρονομαστής έχει ρίζες πολλαπλότητας μεγαλύτερης του 1 π.χ.

$$f\left(x\right)=\frac{n(x)}{d(x)}=\frac{n\left(x\right)}{\left(x-a_1\right)^{k_1}\left(x-a_2\right)^{k_2}\cdots\left(x-a_n\right)^{k_n}}=$$

$$=\frac{A_{11}}{\left(x-a_1\right)}+\frac{A_{12}}{\left(x-a_1\right)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{\left(x-a_1\right)^{k_1}}+$$

$$+\frac{A_{21}}{\left(x-a_2\right)}+\frac{A_{22}}{\left(x-a_2\right)^2}+\cdots+\frac{A_{2k_2}}{\left(x-a_2\right)^{k_2}}+$$

$$+\cdots+\frac{A_{n1}}{\left(x-a_n\right)}+\frac{A_{n2}}{\left(x-a_n\right)^2}+\cdots+\frac{A_{nk_n}}{\left(x-a_n\right)^{k_n}}$$

$$\deg n\left(x\right)<\deg d\left(x\right)=k_1+k_2+\cdots+k_n,\, a_i\neq a_j$$

τότε

$$A_{iq}=\lim_{x\to a_i}\frac{1}{(k_i-q)!}\frac{d^{k_i-q}}{dx^{k_i-q}}\left[\left(x-a_i\right)^{k_i}f\left(x\right)\right]$$

$$i=1,2,...,n \text{ και } q=1,2,...,k_i$$

Έτσι αν έχουμε την παράσταση

$$\frac{2x+1}{\left(x-1\right)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{\left(x-1\right)^2}$$

οι συντελεστές που ψάχνουμε θα είναι :

$$A_2=\lim_{x\to 1}\left(x-1\right)^2\frac{2x+1}{\left(x-1\right)^2}=\lim_{x\to 1}\left(2x+1\right)=3$$

$$A_1=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dx}\left[\left(x-1\right)^2\frac{2x+1}{\left(x-1\right)^2}\right]=\lim_{x\to 1}2=2$$

β) Από το α) έχουμε

$$\int\frac{(x-3)dx}{x(x-1)(x-2)}=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x-2|+c$$

Άσκηση 4. (20 μον.)

Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του $\mathrm{I}=\int_1^2 x^3dx$ εργαστείτε ως εξής:

(α) Διαμερίστε το διάστημα ολοκλήρωσης σε ίσα υποδιαστήματα μήκους 1/n και ακολουθήστε τη διαδικασία που περιγράφεται στις σελίδες 139-141 του βιβλίου σας καταλήγοντας σε δύο ακολουθίες a_n, b_n που προσεγγίζουν το Ι ως "κάτω προσέγγιση" και "άνω προσέγγιση" αντίστοιχα.

(β) Μια άλλη μέθοδος για τον προσεγγιστικό υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων Ι = $\int_a^b f(x)dx$ είναι η **μέθοδος του τραπεζίου**, η οποία περιγράφεται από τον εξής αλγόριθμο**:**

Βήμα 1. Ορίζουμε φυσικό αριθμό n.

Βήμα 2. Χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Βήμα 3. Ορίζουμε τα άκρα των διαστημάτων $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ... $[x_{n-1},b]$, όπου

$$x_1 = a+h,\ x_2 = x_1 + h, \ldots,\ b = x_{n-1}+h.$$

Βήμα 4. Υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$A_1 = \tfrac{1}{2}h[f(a)+f(x_1)]\ ,\ \ A_2 = \tfrac{1}{2}h[f(x_1)+f(x_2)], \ldots,\ A_n = \tfrac{1}{2}h[f(x_{n-1})+f(b)]$$

Βήμα 5. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται προσεγγιστικά από την ποσότητα

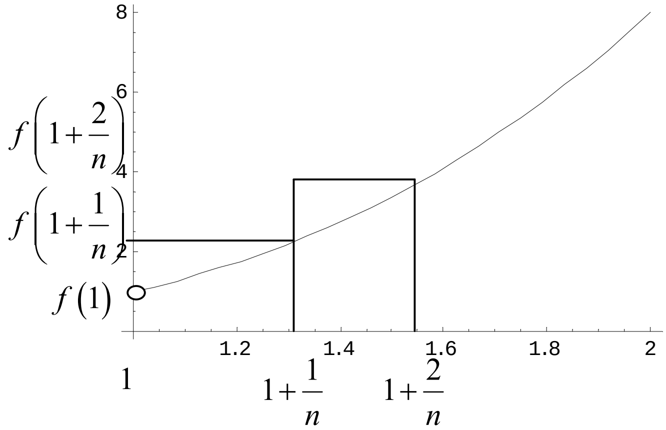
$c_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ αφού $\mathrm{I} = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Βήμα 6. Εάν η προσέγγιση δεν είναι ικανοποιητική, πηγαίνουμε στο Βήμα 2 και π.χ αυξάνουμε τον αριθμό n των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίσαμε το [a, b].

Ποια από τις ακολουθίες a_n, b_n, c_n των προηγούμενων ερωτημάτων δίνει καλύτερη προσέγγιση του ακριβούς αποτελέσματος για n = 2, 3, 5, 10 ;

Λύση:

(α) Αρχικά θα υπολογίσουμε την άνω προσέγγιση του ολοκληρώματος. Θεωρείστε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^3$, όπου έχουμε χωρίσει το διάστημα [1,2] σε n ίσα υποδιαστήματα.



Άνω προσέγγιση του ολοκληρώματος

Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης προσεγγίζεται με το άθροισμα των ορθογωνίων που σχηματίζονται στο παραπάνω σχήμα δηλ.

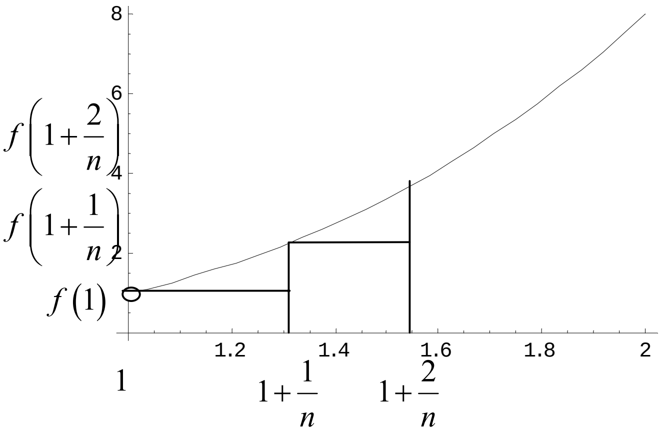
$$I_n^a = \left(\left[1+\frac{1}{n}\right]-[1]\right)\max\left\{f(x)\middle| x\in\left[1,1+\frac{1}{n}\right]\right\}+$$

$$+\left(\left[1+\frac{2}{n}\right]-\left[1+\frac{1}{n}\right]\right)\max\left\{f(x)\middle| x\in\left[1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n}\right]\right\}+$$

$$+\cdots+\left(\left[1+\frac{n}{n}\right]-\left[1+\frac{n-1}{n}\right]\right)\max\left\{f(x)\middle| x\in\left[1+\frac{n-1}{n},1+\frac{n}{n}=2\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(1+\frac{n}{n}\right)^3=\frac{(1+3n)(3+5n)}{4n^2}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την κάτω προσέγγιση του ολοκληρώματος.



Κάτω προσέγγιση του ολοκληρώματος

Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης προσεγγίζεται με το άθροισμα των ορθογωνίων που σχηματίζονται στο παραπάνω σχήμα δηλ.

$$I_n^k = \left(\left[1+\frac{1}{n}\right]-[1]\right)\min\left\{f(x)\middle| x\in\left[1,1+\frac{1}{n}\right]\right\}+$$

$$+\left(\left[1+\frac{2}{n}\right]-\left[1+\frac{1}{n}\right]\right)\min\left\{f(x)\middle| x\in\left[1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n}\right]\right\}+$$

$$+\cdots+\left(\left[1+\frac{n}{n}\right]-\left[1+\frac{n-1}{n}\right]\right)\min\left\{f(x)\middle| x\in\left[1+\frac{n-1}{n},1+\frac{n}{n}=2\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{n}(1)^3+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^3=\frac{(-1+3n)(-3+5n)}{4n^2}$$

Παρακάτω δίνουμε έναν πίνακα τιμών των παραπάνω αθροισμάτων I_n^k, I_n^a για n=2,3,…,10 καθώς και την διαφορά τους από την πραγματική τιμή του ολοκληρώματος I=15/4=3.75 π.χ. $E_n^k = 3.75 - I_n^k, E_n^a = 3.75 - I_n^a$.

E_n^k	I_n^k	n	I_n^a	E_n^a
1.5625	2.1875	2	5.6875	-1.9375
1.08333	2.66667	3	5.	-1.25
0.828125	2.92188	4	4.67188	-0.921875
0.67	3.08	5	4.48	-0.73
0.5625	3.1875	6	4.35417	-0.604167
0.484694	3.26531	7	4.26531	-0.515306
0.425781	3.32422	8	4.19922	-0.449219
0.37963	3.37037	9	4.14815	-0.398148
0.3425	3.4075	10	4.1075	-0.3575

Συνεπώς θα έχουμε ότι :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1+3n)(-3+5n)}{4n^2}\right] \le \int_1^2 x^3 dx \le \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+3n)(3+5n)}{4n^2}\right] \Rightarrow$$

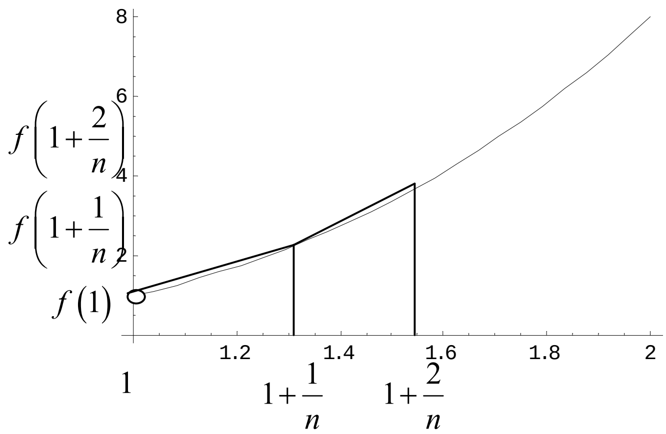
$$\frac{15}{4} \le \int_1^2 x^3 dx \le \frac{15}{4} \Rightarrow \int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$$

Το όριο των παραπάνω ακολουθιών, όταν το πλήθος των υποδιαστημάτων τείνει στο άπειρο, τείνει στο πηλίκο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του αριθμητή δια του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του παρονομαστή.

Σημείωση. Για τον υπολογισμό των παραπάνω αθροισμάτων θα πρέπει να υπολογίσετε το ανάπτυγμα κάθε παρένθεσης και να λάβετε υπόψη σας τους τύπους :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(β) Στη μέθοδο του τραπεζίου διαχωρίζουμε την επιφάνεια μεταξύ της συνάρτησης $f(x) = x^3$ και του άξονα xx' σε επιμέρους τραπέζια :



Προσέγγιση με τη μέθοδο του τραπεζίου

Συνεπώς η προσέγγιση του ολοκληρώματος θα είναι το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους τραπεζίων δηλ.

$$I_n = \frac{1}{2}\left(f(1)+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2}\left(f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+f\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\frac{1}{n}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1^3+\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1+\frac{2}{n}\right)^3\right)\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^3+\left(1+\frac{n}{n}\right)^3\right)\frac{1}{n}=$$
$$=\frac{1}{2n}\left(1^3++2\sum_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{i}{n}\right)^3+2^3\right)=\frac{3}{4}\left(5+\frac{1}{n^2}\right)$$

Υπενθυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου με πλευρές παράλληλες μήκους a,b και ύψους h, είναι $E=\frac{1}{2}(a+b)h$. Είναι εύκολο να δούμε ότι όταν το πλήθος n των υποδιαστημάτων τείνει στο άπειρο τότε :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(5+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{15}{4}$$

Μπορούμε εύκολα να συγκρίνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα με το ορισμένο ολοκλήρωμα της άσκησης :

$$\int_1^2 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{15}{4}$$

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις τιμές του αθροίσματος $I_n, n=2,3,...,10$ καθώς και την διαφορά $E_n=3.75-I_n$ από την πραγματική τιμή του ολοκληρώματος I=15/4=3.75.

n	I_n	E_n
2	3.9375	-0.1875
3	3.83333	-0.0833333
4	3.79688	-0.046875
5	3.78	-0.03
6	3.77083	-0.0208333
7	3.76531	-0.0153061
8	3.76172	-0.0117188
9	3.75926	-0.00925926
10	3.7575	-0.0075

Είναι εύκολο να δούμε : α) ότι για n=10 έχω την καλύτερη προσέγγιση, και β) ότι η μέθοδος του τραπεζίου οδηγεί σε πιο γρήγορη σύγκλιση προς την τιμή του ολοκληρώματος I=3.75, από την μέθοδο των ορθογωνίων.

Άσκηση 5. (10 μον.)

Δίνεται ότι το **απόλυτο σφάλμα** | E | = |πραγματική τιμή – υπολογιζόμενη τιμή| του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$ της μεθόδου του τραπεζίου (βλ. Άσκηση 4β), ικανοποιεί την σχέση:

$$|E|\le\frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)| \qquad (**)$$

όπου το μέγιστο της δευτέρας παραγώγου της f, υπολογίζεται για όλα τα x του διαστήματος $[a,b]$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτή και ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα, υπολογίστε προσεγγιστικά τον αριθμό $\ln 2$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2}.

α) Δείξτε ότι: $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$

β) Υπολογίστε το $\max\left|f''(x)\right|$, όταν $x \in [1,2]$

γ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του σφάλματος (**) υπολογίσατε ένα n, τέτοιο ώστε $|E| < 10^{-2}$.

δ) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του τραπεζίου και την τιμή του n που βρήκατε προηγουμένως, υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Σχολιάστε κατά πόσον η ακρίβεια του αποτελέσματος είναι αυτή που περιμένατε.

Λύση:

α) Κατ΄αρχάς έχουμε: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ και άρα

$$\int_1^2 \tfrac{1}{x}dx = \left[\ln|x| + C\right]_1^2 = \left(\ln 2 + C\right) - \left(\ln 1 + C\right) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

β) Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον δοθέντα τύπο. Κατ΄αρχάς

$f''(x) = \left[\left(x^{-1}\right)'\right]' = \left[\frac{-1}{x^2}\right]' = \frac{2}{x^3}$ και αφού $x \in [1,2]$, έπεται ότι $\max\left|\frac{2}{x^3}\right| = \frac{2}{1^3} = 2$.

Ακόμα, $b - a = 2 - 1 = 1$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$. Επομένως

$$|E| \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}.$$

γ) Θέλουμε

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-2} \Rightarrow \frac{100}{6} < n^2 \Rightarrow n > 4.082$$

άρα με $n = 5$ μπορούμε να εξασφαλίσουμε τον υπολογισμό του $\ln 2$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2}.

δ) Για την προσέγγιση τώρα, με τον αλγόριθμο του τραπεζίου έχουμε:

$h = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$ και

$x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = 1$

$x_1 = 1 + \dfrac{1}{5} \Rightarrow f(x_1) = 0.8333$

$x_2 = 1 + \dfrac{2}{5} \Rightarrow f(x_2) = 0.714286$

$x_3 = 1 + \dfrac{3}{5} \Rightarrow f(x_3) = 0.625$

$x_4 = 1 + \dfrac{4}{5} \Rightarrow f(x_4) = 0.555556$

$x_5 = 1 + \dfrac{5}{5} \Rightarrow f(x_5) = 0.5$

και ο τύπος του τραπεζίου μας δίνει

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 =$$

$$\frac{1}{2} h \cdot [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)] =$$

$$\frac{1}{10} \cdot 6.95634 = 0.695634$$

Η τιμή που παίρνουμε από τον ορισμό είναι $\ln 2 = 0.693147$, βλέπουμε επομένως ότι έχουμε ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

Άσκηση 6. (15 μον.)

Αντιστοιχίστε τα ολοκληρώματα των κάτωθι συναρτήσεων με τις προτεινόμενες «λύσεις»

	Ολοκληρώματα συναρτήσεων		**Λύσεις**
A.	$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx$	1.	$\frac{\pi}{2}$
B.	$\int_1^e \frac{1}{2x} dx$	2.	1
C.	$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$	3.	π
D.	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$	4.	$\frac{\ln^2 3}{2}$
E.		5.	$\frac{1}{2}$

	$\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$		

Λύση:

A) Υπολογίζω το $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$. Ισχύει

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\sin(x))'.\cos(x) - \sin(x).(\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Άρα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(\frac{\pi}{4}) - \tan(0) = 1 - 0 = 1$

Σωστή επιλογή το (2).

B) Υπολογίζω το $\int \frac{1}{2x} dx$. Ισχύει $\int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2}.\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}.\ln(x) + C$.

Άρα $\int_1^e \frac{1}{2.x} dx = \frac{1}{2}.\ln(e) - \frac{1}{2}.\ln(1) = \frac{1}{2}$

Σωστή επιλογή το (5).

C) Υπολογίζω πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{1+x^2} dx$. Χρησιμοποιώ τους τύπους ολοκλήρωσης από το βιβλίο σελ 148-149.

Ισχύει $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x) + C$.

Παρατηρώ ότι η $\frac{1}{1+x^2}$ είναι συνεχής για όλα τα $x \in R$. Υπολογίζω για $z > 0$ το $\int_0^z \frac{1}{1+x^2} dx = I_z$. Είναι $I_z = \tan^{-1}(z) - \tan^{-1}(0) = \tan^{-1}(z)$, όπου $\omega = \tan^{-1}(z)$ γωνία $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Προφανώς το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει έννοια σαν

$$lim_{z \to +\infty} I_z = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Σωστή επιλογή το (1).

D) Υπολογίζω πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2+2.x+2}dx$.

Είναι $\int \frac{1}{x^2+2.x+2}dx = \int \frac{1}{x^2+2.x+1+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$.

Σύμφωνα με το **C** παραπάνω και τους τύπους ολοκλήρωσης από το βιβλίο σελ 148-149, έχω :

$\int \frac{1}{x^2+2.x+2}dx = \tan^{-1}(x+1)+C$.

Η συνάρτηση $\frac{1}{x^2+2.x+2}$ είναι συνεχής και ορισμένη για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, άρα μπορώ να μιλάω για το ορισμένο ολοκλήρωμα :

$$I_t = \int_{-t}^{t} \frac{1}{x^2+2.x+2}dx = \tan^{-1}(t+1) - \tan^{-1}(-t+1).$$

Προφανώς το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει έννοια σαν

$$lim_{t\to+\infty} I_t = lim_{t\to+\infty}(\tan^{-1}(t+1)) - lim_{t\to+\infty}(\tan^{-1}(-t+1)) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

Δηλαδή $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2.x+2}dx = \pi$

Σωστή επιλογή το (3).

E) Υπολογίζω πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$. Θέτω $z=\ln(x)$ και έχω $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}$. Με την αντικατάσταση παίρνω $\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int zdz = \frac{1}{2}.z^2 + C = \frac{1}{2}.\ln^2(x)+C$

Άρα $\int_1^3 \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2(3) - \frac{1}{2}\ln^2(0) = \frac{1}{2}\ln^2(3).$

Σωστή επιλογή το (4).

Άσκηση 7. (15 μον.).

Υπολογίστε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν

α) f(x) = sinax, $-\pi \le x < \pi$, $a\in\mathbb{R}$ όχι ακέραιος

β) $f(x) = x^2$, $-\pi \le x < \pi$

γ) $f(x) = \begin{cases} \alpha x, & -\pi \le x < 0 \\ \beta x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ $\quad \alpha, \beta \in\mathbb{R}$

Λύση:

(α) Δεδομένου ότι ισχύει $\sin(a(-x)) = -\sin(ax)$ η συνάρτηση $f(x) = \sin(ax)$ είναι περιττή. Αρκεί να βρούμε τα β_n στην παράσταση:

$$\sin(ax) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx)$$

Σύμφωνα με το βιβλίο κεφ. 12.2 :

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \ .$$

Για να υπολογίσουμε το $I = \int \sin(ax)\sin(nx)dx$ χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(ax)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-n)x - \cos(a+n)x\right)$. Έχουμε

$$I = \int \sin(ax)\sin(nx)dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(a-n)x - \cos(a+n)x\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a-n}\sin(a-n)x - \frac{1}{a+n}\sin(a+n)x\right] + C.$$

Άρα

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a-n}\sin(a-n)x - \frac{1}{a+n}\sin(a+n)x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{a-n}\sin(a-n)\pi - \frac{1}{a+n}\sin(a+n)\pi.$$

Όμως οι γωνίες $(a-n)\pi, (a+n)\pi$ διαφέρουν κατά άρτιο πολλαπλάσιο του π. Άρα

$$I = \frac{1}{a-n}\sin(a-n)\pi - \frac{1}{a+n}\sin(a+n)\pi =$$
$$= \frac{1}{a-n}\sin(a-n)\pi - \frac{1}{a+n}\sin(a-n)\pi =$$
$$= \frac{2n}{a^2-n^2}\sin(a-n)\pi.$$

Τελικά έχουμε $I = \frac{2n}{a^2-n^2}\sin(a-n)\pi = (-1)^n\frac{2n}{a^2-n^2}\sin a\pi$

(β) Η λύση υπάρχει στη σελίδα 197 του βιβλίου. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι άρτια και άρα $\beta_n = 0$.

(γ) Υπολογίζουμε αναλυτικά τους συντελεστές του αναπτύγματος Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} axdx + \int_{0}^{\pi} \beta xdx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(a\int_{-\pi}^{0} xdx + \beta\int_{0}^{\pi} xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(a\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \beta\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-a\frac{\pi^2}{2} + \beta\frac{\pi^2}{2}\right) = \pi\cdot\frac{(\beta - a)}{4}$$

Στα παρακάτω χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\cdot\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} \beta x\cdot\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(a\int_{-\pi}^{0} x\cdot\frac{\left(\sin(nx)\right)'}{n}dx + \beta\int_{0}^{\pi} x\cdot\frac{\left(\sin(nx)\right)'}{n}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[x\cdot\sin(nx)\right]_{x=-\pi}^{x=0} - a\int_{-\pi}^{0}(x)'\cdot\sin(nx)dx + \beta\left[x\cdot\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \beta\int_{0}^{\pi}(x)'\cdot\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[x\cdot 0 - x\cdot 0\right] - a\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx + \beta\left[x\cdot 0 - x\cdot 0\right] - \beta\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-a\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=-\pi}^{x=0} - \beta\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left(-a(-\cos(0) + \cos(-n\pi)) - \beta(-\cos(n\pi) + \cos(0))\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left(-a(-1 + (-1)^n) - \beta(-(-1)^n + 1)\right) = \frac{a - \beta + (-1)^n(\beta - a)}{\pi n^2}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\cdot\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} \beta x\cdot\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(a\int_{-\pi}^{0} x\cdot\frac{\left(-\cos(nx)\right)'}{n}dx + \beta\int_{0}^{\pi} x\cdot\frac{\left(-\cos(nx)\right)'}{n}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[-x\cdot\cos(nx)\right]_{x=-\pi}^{x=0} + a\int_{-\pi}^{0}(x)'\cdot\cos(nx)dx + \beta\left[-x\cdot\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} + \beta\int_{0}^{\pi}(x)'\cdot\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[-0\cdot\cos(0) - \pi\cdot\cos(-n\pi)\right] + a\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx + \beta\left[-\pi\cdot\cos(n\pi) + 0\cdot\cos(0)\right] + \beta\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(a\left[-\pi\cdot(-1)^n\right] + a\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=-\pi}^{x=0} + \beta\left[-\pi\cdot(-1)^n\right] + \beta\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-a\pi\cdot(-1)^n + a\left[0-0\right] - \beta\pi\cdot(-1)^n + \beta\left[0-0\right]\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(a + \beta\right)$$

Έτσι, το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $f(x)$ είναι:

$$f(x) = \pi\cdot\frac{(\beta - a)}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a - \beta + (-1)^n(\beta - a)}{\pi n^2}\cdot\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(a + \beta\right)\cdot\sin(nx)\right].$$

Άσκηση 8. (10 μον.)

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

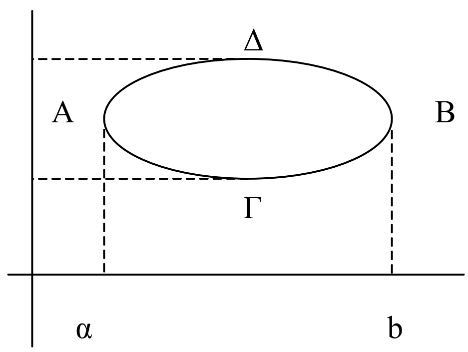
$x = -2y^2$ και $x = 1 - 3y^2$

β) Να βρεθεί ο όγκος εκ περιστροφής, γύρω από τον άξονα των x, του χωρίου που περιέχεται μεταξύ του τόξου του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$ και της ευθείας $x + y = 4$.

Υπόδειξη: Δείτε την Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1β, σελ. 176. Παρατηρείστε ότι ο τύπος για τον όγκο εκ περιστροφής χωρίου μεταξύ δύο καμπυλών είναι

$$V = \pi\int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x))dx$$

όπου η f_1 είναι η καμπύλη ΑΔΒ και η f_2 η καμπύλη ΑΓΒ, βλ. κάτωθι σχήμα:



Λύση:

α) Τα κοινά σημεία των δύο γραμμών έχουν συντεταγμένες τη λύση του συστήματος:

$\left.\begin{array}{r} x = -2y^2 \\ x = 1 - 3y^2 \end{array}\right\}$ από όπου προκύπτει ότι $y = \pm 1$. Συνεπώς τα κοινά σημεία είναι A(-2,1) και B(-2,-1).

Η ολοκλήρωση ως προς y κρίνεται συμφέρουσα. Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς των δύο συναρτήσεων:

$1 - 3y^2 > -2y^2 \Leftrightarrow 1 - y^2 > 0 \Leftrightarrow (1 - y).(1 + y) > 0$.

Συνεπώς $y \in \left(-1,1\right)$, οπότε έχουμε:

$$\int_{-1}^{1}(1-3y^2)-(-2y^2)dy=\int_{-1}^{1}1-3y^2+2y^2dy=\int_{-1}^{1}(1-y^2)dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}1dy-\int_{-1}^{1}y^2dy=y\Big|_{-1}^{1}-\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\left[1-(-1)\right]-\left[\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=$$

$$=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\tau.\mu.\alpha.$$

β) Βρίσκω τα σημεία τομής:

$$\left.\begin{matrix}x^2+y^2=16\\ x+y=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x^2+y^2=16\\ x=y-4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}(y-4)^2+y^2=16\\ x=y-4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{matrix}x=0\\ y=4\end{matrix}\text{ ή }\begin{matrix}x=4\\ y=0\end{matrix}$$

Συνεπώς:

$$V=\pi\int_{0}^{4}\left(\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2-\left(4-x\right)^2\right).dx=$$

$$=\pi\int_{0}^{4}\left(\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2\right).dx-\pi\int_{0}^{4}\left(\left(4-x\right)^2\right).dx=$$

$$=\pi\int_{0}^{4}\left(16-x^2\right).dx-\pi\int_{0}^{4}\left(16-8x+x^2\right).dx=$$

$$=\pi\left(\int_{0}^{4}16.dx-\int_{0}^{4}x^2.dx-\int_{0}^{4}16.dx+8\int_{0}^{4}x.dx-\int_{0}^{4}x^2.dx\right)=$$

$$=\pi.\left(8\int_{0}^{4}x.dx-2.\int_{0}^{4}x^2.dx\right)=\pi.\left(8.\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{4}-2.\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{4}\right)=\pi.\left(\left(8.\frac{16}{2}-0\right)-2.\left(\frac{64}{3}-0\right)\right)=$$

$$=\pi.\left(64-\frac{2.64}{3}\right)=\frac{64.\pi}{3}$$
