ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΘΕ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 6 - ΛΥΣΕΙΣ

Άσκηση 1. (6 μον.) Ελέγξτε ποια από τα επόμενα σύνολα είναι διανυσματικοί χώροι δικαιολογώντας την απάντησή σας. Στις περιπτώσεις που θα απαντήσετε καταφατικά προσδιορίστε μία βάση.

(i) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 0\}$

(ii) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq y\}$

(iii) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - y + 3x = 0\}$

<u>Λύση</u>

(i) Δεν είναι υπόχωρος αφού $(1,0), (0,1) \in V_1$ αλλά $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin V_1$.

(ii) Δεν είναι υπόχωρος αφού $(1,2,0) \in V_2$ αλλά $-1\bullet(1,2,0) = (-1,-2,0) \notin V_2$.

(iii) Αν θεωρήσουμε $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$ δύο στοιχεία του υπό μελέτη συνόλου, οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις $z_1-y_1+3x_1 = z_2-y_2+3x_2 = 0$, παρατηρούμε ότι:

$u+v= (x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$, το οποίο επίσης ανήκει στο V_3 αφού:

$$(z_1+z_2)-(y_1+y_2)+3(x_1+x_2) = (z_1-y_1+3x_1) + (z_2-y_2+3x_2) = 0 + 0 = 0.$$

Επίσης, για κάθε πραγματικό αριθμό λ έχουμε:

$\lambda u = \lambda(x_1,y_1,z_1) = (\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$, το οποίο ανήκει στο V_3 γιατί:

$$\lambda z_1-\lambda y_1+3\lambda x_1 = \lambda(z_1-y_1+3x_1) = \lambda 0 = 0.$$

Αποδείξαμε έτσι ότι ο V_3 είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και άρα διανυσματικός χώρος.

Εναλλακτικά μπορεί να τεκμηριώσει κανείς ότι το V_3 είναι υπόχωρος παρατηρώντας ότι πρόκειται για το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς συστήματος Σ οι οποίες ικανοποιούν την ιδιότητα το άθροισμα τους και το γινόμενο τους με πραγματικό αριθμό να είναι επίσης λύσεις του συστήματος Σ. Αυτό άλλωστε επαληθεύσαμε προηγουμένως.

Προχωρώντας στον προσδιορισμό μιας βάσης του V_3 παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του $u=(x,y,z)$ αναλύεται στη μορφή:

$u = (x,y,z) = (x,y,y-3x) = (x,0,-3x) + (0,y,y) = x(1,0,-3) + y(0,1,1)$.

Δηλαδή τα διανύσματα $\{(1,0,-3), (0,1,1)\}$ είναι γεννήτορες του V_3 και ως γραμμικά ανεξάρτητα (αφού προφανώς είναι μη συγγραμμικά) αποτελούν μια βάση του υπό μελέτη χώρου.

Άσκηση 2. (10 μον.) Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ 2x & + & 3y & + & \lambda z & = & -1 \end{array}$$

Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες αυτό έχει:

(i) μοναδική λύση **(ii)** άπειρες λύσεις **(iii)** καμία λύση

Επίσης να προσδιορίσετε τις λύσεις του συστήματος στις περιπτώσεις που υπάρχουν.

<u>**Λύση**</u>

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & \lambda & -1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματίζουμε σε τριγωνικό πίνακα με πράξεις μεταξύ των γραμμών:

2η γραμμή ίσον 1^{η} γραμμή μείον 2^{η} γραμμή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 2 & 3 & \lambda & -1 \end{bmatrix}$$

3η γραμμή ίσον 3η γραμμή μείον 2 •1η γραμμή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \lambda-2 & -3 \end{bmatrix}$$

Εδώ πρέπει να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(I) Αν λ=1, τότε ο πίνακας γίνεται $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, οπότε έχουμε αόριστο σύστημα:

$x = 4-2z$, $y = -3+z$, $z \in \mathbb{R}$ (απλή απειρία λύσεων).

(II) Αν $\lambda \neq 1$, τότε, προχωρώντας ένας βήμα ακόμη τις πράξεις μεταξύ των γραμμών, έχουμε:

3η γραμμή ίσον 3η γραμμή επί (1-λ) μείον 2η γραμμή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda-2) & -4(1-\lambda) \end{bmatrix}$$

Από την τριγωνική μορφή είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι για λ=2 δεν υπάρχει λύση, οπότε το σύστημα γίνεται αδύνατο, ενώ για τις υπόλοιπες τιμές του λ η λύση είναι μοναδική: $z = \dfrac{-4}{\lambda-2}, y = 1, x = \dfrac{4}{\lambda-2}$

Άσκηση 3. (12 μον.) Ελέγξτε ποιοι από παρακάτω πίνακες μπορούν να διαγωνοποιηθούν και εκτελέστε την διαγωνοποίηση όποτε αυτό είναι δυνατόν:

(i) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5/3 & -1/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ **(ii)** $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **(iii)** $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Λύση</u>

(i) Για τον πίνακα A έχουμε χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{3}-x & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3}-x \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{3}-x\right)\left(\frac{1}{3}-x\right)+\frac{4}{3}\bullet\frac{1}{3} = x^2-2x+1.$$

Έχουμε, επομένως, διπλή ρίζα το 1 και ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα το (1, 2). Έτσι ο πίνακας δεν γίνεται διαγώνιος,

(ii) Για τον B έχουμε χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\begin{vmatrix} 4-x & 3 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = (4-x)(3-x)-6 = x^2-7x+12-6.$$

Ρίζες - ιδιοτιμές εδώ είναι οι 6, 1.

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 6 ικανοποιεί το σύστημα

$\begin{bmatrix} 4-6 & 3 \\ 2 & 3-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ που είναι ισοδύναμο με το $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και αυτό έχει λύσεις της μορφής c(3, 2).

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 ικανοποιεί το σύστημα

$\begin{bmatrix} 4-1 & 3 \\ 2 & 3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ που είναι ισοδύναμο με το $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και αυτό έχει λύσεις της μορφής c(-1, 1).

Ο πίνακας Β επομένως διαγωνοποιείται με αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα τον $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και πίνακα αλλαγής βάσης Ρ = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(iii) Τέλος για τον πίνακα Γ έχουμε:

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 3 & -5-x & 3 \\ 6 & -6 & 4-x \end{pmatrix} =$$

$$-(1-x)(-5-x)(4-x)-54-54-18(-5-x)+18(1-x)+9(4-x)=$$

$$-\left(x^2-5x+4\right)(5+x)+36-9x = -x^3+12x+16\,.$$

Μία ρίζα είναι η -2 (η οποία προκύπτει αν δοκιμάσουμε διαιρέτες του σταθερού όρου). Διαιρώντας έχουμε $-x^3+12x+16=(x+2)\left(-x^2+2x+8\right)$. Το τριώνυμο $-x^2+2x+8$ εύκολα διαπιστώνουμε ότι έχει ρίζες τις x=4 και x=-2 (η οποία είναι επομένως διπλή ρίζα).

Έτσι οι ιδιοτιμές του πίνακα Γ είναι οι 4 και -2 με ιδιοδιανύσματα που υπολογίζονται ως εξής:

Για την 4:

$$\Gamma\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x-3y+3z=4x \\ 3x-5y+3z=4y \\ 6x-6y+4z=4z \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3z=6y \\ 3z=6y \\ y=x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} z=2x \\ y=x \\ x\in\mathbb{R} \end{Bmatrix}$$

Έτσι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 4 έχουν τη μορφή:

$$(x,x,2x) = x\cdot(1,1,2)$$

Αντίστοιχα, για την ιδιοτιμή -2 έχουμε:

$$\Gamma\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-2)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x-3y+3z=-2x \\ 3x-5y+3z=-2y \\ 6x-6y+4z=-2z \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x-3y+3y-3x=-2x \\ 3x-5y+3y-3x=-2y \\ z=y-x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\in\mathbb{R} \\ y\in\mathbb{R} \\ z=y-x \end{Bmatrix}$$

Επομένως, τα ιδιοδιανύσματα της -2 είναι

$$(x, y, y-x) = (x, 0, -x) + (0, y, y) = x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, 1)$$

και ο πίνακας Γ διαγωνοποιείται με αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα τον $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ και πίνακα αλλαγής τον $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 4. (10 μον) Δίνεται η απεικόνιση:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \to (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$$

(i) Αποδείξτε ότι είναι γραμμική και βρείτε τον πίνακά της ως προς τις κανονικές βάσεις του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών της.

(ii) Βρείτε βάσεις του πυρήνα Kerf και της εικόνας Imf της f.

<u>Λύση</u>

(i) Για κάθε επιλογή διανυσμάτων $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ του πεδίου ορισμού $\mathbb{R}^3$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z') = \\ &= (2(x+x')+(y+y')-(z+z'), 3(x+x')-2(y+y')+4(z+z')) = \\ &= (2x+y-z+2x'+y'-z', 3x-2y+4z+3x'-2y'+4z') = \\ &= (2x+y-z, 3x-2y+4z)+(2x'+y'-z', 3x'-2y'+4z') = \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \\ &= (2\lambda x + \lambda y - \lambda z, 3\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda z) = \\ &= \lambda(2x+y-z, 3x-2y+4z) = \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

Έτσι αποδείξαμε ότι η f είναι πράγματι γραμμική απεικόνιση.

Για τις κανονικές βάσεις $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ και $\{(1,0),(0,1)\}$ των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
f(1,0,0) &= (2\cdot 1+0-0,\ 3\cdot 1-2\cdot 0+4\cdot 0) = (2,3) &&= 2\cdot(1,0)+3\cdot(0,1)\\
f(0,1,0) &= (2\cdot 0+1-0,\ 3\cdot 0-2\cdot 1+4\cdot 0) = (1,-2) &&= 1\cdot(1,0)-2\cdot(0,1)\\
f(0,0,1) &= (2\cdot 0+0-1,\ 3\cdot 0-2\cdot 0+4\cdot 1) = (-1,4) &&= -1\cdot(1,0)+4\cdot(0,1)
\end{aligned}
$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς τις προηγούμενες βάσεις είναι ο $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) Για τον πυρήνα της f έχουμε:

$$
(x,y,z)\in Kerf \Leftrightarrow f(x,y,z)=(0,0) \Leftrightarrow (2x+y-z,3x-2y+4z)=(0,0) \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2x+y-z=0 \\ 3x-2y+4z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z=2x+y \\ 3x-2y+4(2x+y)=0 \end{matrix}\right\}
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z=2x+y \\ 11x+2y=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z=2x-\dfrac{11}{2}x \\ y=\dfrac{-11}{2}x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z=\dfrac{-7}{2}x \\ y=\dfrac{-11}{2}x \end{matrix}\right., x\in\mathbb{R}
$$

Έτσι τα στοιχεία του Kerf έχουν τη μορφή:

$$
(x,\frac{-11}{2}x,-\frac{7}{2}x)=x\cdot(1,\frac{-11}{2},\frac{-7}{2}),
$$

με το διάνυσμα $(1,\frac{-11}{2},\frac{-7}{2})$ να αποτελεί βάση. Πρόκειται , δηλαδή για έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 1.

Αντίστοιχα, για την εικόνα Imf της γραμμικής απεικόνισης f έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}\in \operatorname{Im} f &\Leftrightarrow \vec{v}=f(x,y,z) \Leftrightarrow \vec{v}=(2x+y-z,3x-2y+4z) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \vec{v}=(2x,3x)+(y,-2y)+(-z,4z) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \vec{v}=x\cdot(2,3)+y\cdot(1,-2)+z\cdot(-1,4)
\end{aligned}
$$

Πρόκειται δηλαδή για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τα διανύσματα $(2,3),\ (1,-2),\ (-1,4)$. Επειδή όμως κάθε ζευγάρι από αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ο χώρος που παράγουν είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ διάστασης 2, δηλαδή ο ίδιος ο $\mathbb{R}^2$. Έτσι Imf $=\mathbb{R}^2$ και ως βάση της μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε ζευγάρι από τα $(2,3),\ (1,-2),\ (-1,4)$ ή, γενικότερα, οποιοδήποτε ζευγάρι μη συγγραμμικών, και άρα γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 5. (8 μον) Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton αποδείξτε ότι ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφό του.

<u>Λύση</u>

Εύκολα υπολογίζουμε την ορίζουσα αναπτύσσοντας την τρίτη στήλη που έχει μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο. Η ορίζουσα είναι ίση με 1, άρα μη μηδενική και επομένως υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι ίσο με

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -1 & -x & 0 \\ 2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$(1-x)\det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = (1-x)\left((-x)(1-x)+1\right) = (1-x)\left(x^2-x+1\right) = -x^3+2x^2-2x+1.$$

Δηλ. ο πίνακας ικανοποιεί την εξίσωση $-A^3+2A^2-2A+I=0$, άρα και την $\left(A^2-2A+2I\right)A=I$. Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι ο αντίστροφος του A είναι ο $A^2-2A+2I$.

Άσκηση 6. (12 μον)

α) (9 μον.) Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x-x^2}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$

iii) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

β) (3 μον.) Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $a,b\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x-1}-ax-b)=3$

Λύση

α) Εφαρμόζουμε τον κανόνα de l'Hospital:

i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-x^2-2)'}{(\sin^2 x-x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{2\sin x\cos x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin 2x-2x}=$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(\sin 2x-2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(2\cos 2x-2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{-4\sin 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(-4\sin 2x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-8\cos 2x}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

ii)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x(e^x-1)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1+xe^x\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

iii)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln(\sin x)\right)'}{\left(\ln(\tan x)\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{(\tan x)'}{\tan x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cos x}{\sin x\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cos x\cos^2 x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\cos^2 x=1$$

β)

Για $x>0$ έχουμε:

$$\sqrt{x^2-3x-1}-ax-b=\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}-ax-b=x(\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x})=(+\infty)(1-\alpha)$$

Έτσι, αν $1-a \neq 0$, το όριο της ανωτέρω παράστασης απειρίζεται, άρα είναι διαφορετικό του απαιτούμενου 3. Επομένως θα πρέπει $a=1$ και τότε η υπό μελέτη συνάρτηση γίνεται:

$$\sqrt{x^2-3x-1}-x-b=\sqrt{x^2-3x-1}-(x+b)=\frac{x^2-3x-1-(x+b)^2}{\sqrt{x^2-3x-1}+(x+b)}=\frac{(-3-2b)x-(1+b^2)}{\sqrt{x^2-3x-1}+(x+b)}$$

$$=\frac{x(-3-2b-\frac{1+b^2}{x})}{x(\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{b}{x})}=\frac{-3-2b-\frac{1+b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{b}{x}}$$

Όταν το $x \to +\infty$ η ανωτέρω παράσταση τείνει στο $\frac{-3-2b}{2}$. Άρα πρέπει

$$\frac{-3-2b}{2}=3 \Leftrightarrow b=-\frac{9}{2}$$

Άσκηση 7. (12 μον)

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{a-x}{x^2+a^2}$ (α μη μηδενική σταθερή πραγματική παράμετρος).

Αποδείξτε ότι τα σημεία καμπής της βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία την οποία να προσδιορίσετε.

β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση y=Asin(kx)+Bcos(kx) επαληθεύει την (διαφορική) εξίσωση $\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$.

γ) Ένα κλειστό κυλινδρικό δοχείο με κυκλική βάση έχει χωρητικότητα 64 cm^3. Βρείτε τις διαστάσεις του ώστε το ποσό του μετάλλου που χρειάζεται για τα τοιχώματά του να είναι ελάχιστο.

<u>Λύση</u>

(α) Παρατηρούμε ότι

$$f'(x)=\left(\frac{a-x}{x^2+a^2}\right)'=\frac{(a-x)'\left(x^2+a^2\right)-(a-x)\left(x^2+a^2\right)'}{(x^2+a^2)^2}=\frac{-\left(x^2+a^2\right)-(a-x)2x}{\left(x^2+a^2\right)^2}=$$

$$=\frac{-x^2-a^2-2ax+2x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{x^2-2ax-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-2ax-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(x^2-2ax-a^2\right)'\left(x^2+a^2\right)^2-\left(x^2-2ax-a^2\right)\left(\left(x^2+a^2\right)^2\right)'}{\left(x^2+a^2\right)^4}$$

$$\frac{(2x-2a)\left(x^2+a^2\right)^2-\left(x^2-2ax-a^2\right)2\left(x^2+a^2\right)2x}{\left(x^2+a^2\right)^4}=$$

$$\frac{(2x-2a)\left(x^2+a^2\right)-4\left(x^2-2ax-a^2\right)x}{\left(x^2+a^2\right)^3}=-\frac{2\left(x^3-3a^2x-3ax^2+a^3\right)}{\left(x^2+a^2\right)^3}.$$

Μία ρίζα είναι το $-a$ (διαιρέτης του σταθερού όρου), διαιρώντας έχουμε $\left(x^3-3a^2x-3ax^2+a^3\right)=(x+a)(x^2-4ax+a^2)$. Ρίζες του δευτεροβάθμιου παράγοντα είναι οι $a\left(2\pm\sqrt{3}\right)$. Έτσι, τα σημεία καμπής της f(x) είναι τα :

$$\left(x_0,y_0\right)=\left(-a,\frac{1}{a}\right),\ \left(x_1,y_1\right)=\left(a\left(2+\sqrt{3}\right),\frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)}{a\left(8+4\sqrt{3}\right)}\right),$$

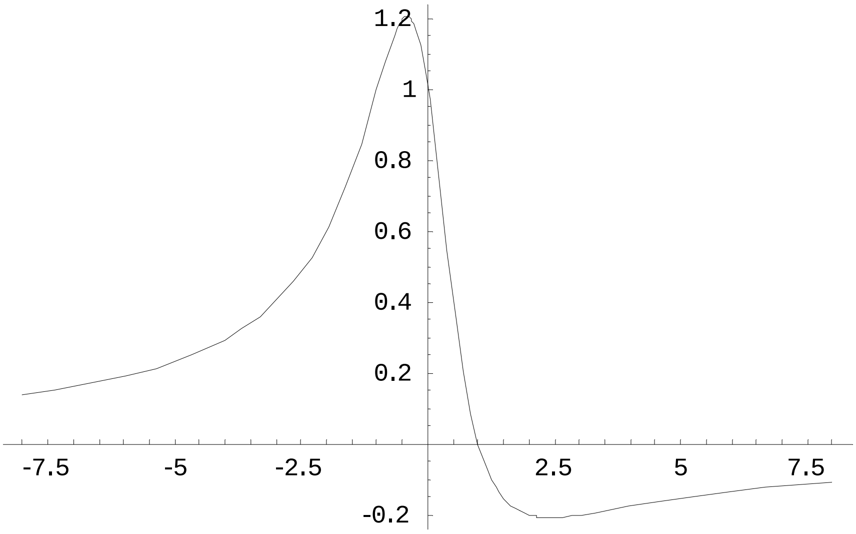
$$\left(x_2,y_2\right)=\left(a\left(2-\sqrt{3}\right),\frac{-1+\sqrt{3}}{a\left(8-4\sqrt{3}\right)}\right).$$

Για να αποδείξουμε ότι τα τρία αυτά σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία, αρκεί να ελέγξουμε ότι τα πηλίκα $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$, $\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}$ είναι ίσα. Πράγματι,

$$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)}{a\left(8+4\sqrt{3}\right)}}{-a-a\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{9+5\sqrt{3}}{-a^2\left(3+\sqrt{3}\right)\left(8+4\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{-4a^2}.$$

$$\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{-1+\sqrt{3}}{a\left(8-4\sqrt{3}\right)}}{-a-a\left(2-\sqrt{3}\right)}==\frac{9-5\sqrt{3}}{-a^2\left(-3+\sqrt{3}\right)\left(8-4\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{-4a^2}.$$

Δηλ. τα σημεία καμπής ανήκουν στην ευθεία με κλίση $\frac{1}{-4a^2}$ η οποία περιέχει το σημείο $\left(-a,\frac{1}{a}\right)$.



Γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \dfrac{a-x}{x^2+a^2}$ για a=1.

β) Είναι y΄ = A k cos (kx) – B k sin (kx), y΄΄ = -A k^2 sin (kx) - B k^2 cos (kx).

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = -Ak^2\sin(kx) - Bk^2\cos(kx) + Ak^2\sin(kx) + Bk^2\cos(kx) = 0$$

γ)

Για να ελαχιστοποιήσουμε το ποσό του μετάλλου αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την επιφάνεια του κυλινδρικού δοχείου.
Έστω r, h, V, E η ακτίνα της βάσης, το ύψος, ο όγκος και το εμβαδό της επιφάνειας του δοχείου αντίστοιχα.
Έχουμε:

$$V = \pi r^2 h \Leftrightarrow \pi r^2 h = 64 \Leftrightarrow h = \frac{64}{\pi r^2}$$

$$E = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r\frac{64}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{128}{r} + 2\pi r^2, r > 0$$

Το κρίσιμο σημείο της συνάρτησης του εμβαδού είναι:

$$E^{/}(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{128}{r^2} + 4\pi r = 0 \Leftrightarrow \frac{-128+4\pi r^3}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4(\pi r^3 - 32) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Θα εξετάσουμε τώρα, μελετώντας την παράγωγο 2ης τάξης, αν το κρίσιμο σημείο που βρήκαμε είναι θέση ολικού ελαχίστου.

$$E^{//}(r) = (-128r^{-2})^{/} + (4\pi r)^{/} = 256r^{-3} + 4\pi > 0, \forall r > 0$$

Επομένως $r = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ είναι θέση ολικού ελαχίστου. Για την τιμή αυτή της ακτίνας το ύψος είναι

$$h = 64\pi^{-1}r^{-2} = 64\pi^{-1}(\frac{32}{\pi})^{\frac{1}{3}}]^{-2} = 2.32\pi^{-1}.32^{-\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}} = 2.32^{\frac{1}{3}}.\pi^{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{32}{\pi}} = 2r\ .$$

Άσκηση 8. (8 μον) Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ **ii)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3^n\, n!}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ **iv)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1}$ (για τις διαφορες τιμες του $x \in \mathbb{R}$)

Λύση

(i) Το κριτήριο του λόγου δίνει για $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$,

$$a_{n+1}/a_n = \frac{\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)(n+2)}{n!}} = \frac{n!(n+2)(n+3)}{(n+1)!(n+1)(n+2)} = \frac{n+3}{(n+1)(n+1)}.$$

Το όριο αυτού του λόγου είναι μηδέν άρα μικρότερο από την μονάδα και επομένως η σειρά συγκλίνει.

(ii) $a_n = \frac{(n+3)!}{3^n\, n!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^n}$. Με το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$a_{n+1}/a_n = \frac{\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{3^{n+1}}}{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^n}} = \frac{3^n(n+2)(n+3)(n+4)}{3^{n+1}(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+4)}{3(n+1)}.$$

Το όριο είναι 1/3, άρα η σειρά συγκλίνει.

(iii) Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$ και επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, το ίδιο θα ισχύει και για την υπό μελέτη $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

(iv) Για την $a_n = \frac{nx^n}{n^2+1}$ έχουμε:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\frac{nx^n}{n^2+1}}\right| = \left|\frac{(n+1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)n}\right||x| = \left|\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n}\right||x| \to |x|.$$

Επομένως:

Αν |x|<1, η σειρά συγκλίνει.

Αν |x|>1, η σειρά αποκλίνει,.

για x=1 η σύγκριση με την αρμονική σειρά δίνει:

$a_n = \frac{n}{n^2+1} > \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$. Έτσι, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+1} > \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ και αφού η αρμονική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει το ίδιο θα ισχύει και για την υπό μελέτη σειρά.

Τέλος για x = -1, η σειρά γίνεται εναλλάσσουσα: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}(-1)^n$, όπου η ακολουθία $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ είναι (προφανώς) μηδενική και φθίνουσα αφού:

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n^2+2n+2} < \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n$$

$$\Leftrightarrow 1 < n^2+n$$

το οποίο ισχύει.

Άρα σε αυτήν την περίπτωση η σειρά συγκλίνει (Κριτήριο Leibnitz – έχει δοθεί στην 3η εργασία).

Άσκηση 9. (12 μον) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{dx}{\cos x}$ (χρησιμοποιώντας αρχικά την αντικατάσταση y=sinx και στη συνέχεια ανάλυση σε απλά κλάσματα)

ii) $\int \frac{dx}{25-(x+3)^2}$

iii) $\int \frac{2x+6}{\sqrt[3]{x^2+6x}}dx$

__**Λύση**__

(i) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x}$. Με την αντικατάσταση $y = \sin x$ έχουμε $dy = \cos x dx$ και $\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dy}{1-y^2}$. Αναλύουμε το κλάσμα σε απλά κλάσματα λύνοντας την εξίσωση $\frac{1}{1-y^2} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y}$ και προσδιορίζοντας τα A, B. Οι τιμές που προκύπτουν είναι A=1/2, B=1/2. Εναλλακτικά

$$\frac{1}{1-y^2}=\frac{1}{(1-y)(1+y)}=\frac{2}{2(1-y)(1+y)}=\frac{1-y+1+y}{2(1-y)(1+y)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-y)}+\frac{1}{(1+y)}\right)$$.Το

ολοκλήρωμα γράφεται $\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(1-y)}+\frac{1}{(1+y)}\right)dy=\frac{1}{2}\left(-\ln|1-y|+\ln|1+y|\right)$.

Εκφράζοντας την παράσταση ώστε να εμφανίζεται μόνο το x έχουμε

$\int\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{2}\left(-\ln|1-\sin x|+\ln|1+\sin x|\right)$+c.

ii)

Το κλάσμα γράφεται $\frac{1}{25-(x+3)^2}=\frac{1}{\left(5+(x+3)\right)\left(5-(x+3)\right)}=\frac{-1}{(x+8)(x-2)}$. Αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$\frac{-1}{(x+8)(x-2)}=\frac{a}{(x+8)}+\frac{b}{(x-2)}=\frac{a(x-2)+b(x+8)}{(x+8)(x-2)}.$$

Δηλ. έχουμε $-1=a(x-2)+b(x+8)$. Λύση είναι $a=1/10$, $b=-1/10$. Δηλ. έχουμε $\frac{-1}{(x+8)(x-2)}=\frac{1}{10(x+8)}-\frac{1}{10(x-2)}$. Το ολοκλήρωμα επομένως γίνεται:

$\int\frac{dx}{25-(x+3)^2}=\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x+8}-\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{10}\left(\ln|x+8|-\ln|x-2|\right)+c.$

iii)

Με την αντικατάσταση $y=x^2+6x$ έχουμε $dy/dx=2x+6$, $dy=(2x+6)dx$. Το ολοκλήρωμα γίνεται $\int\frac{dy}{\sqrt[3]{y}}=$ $(3/2)\,y^{2/3}+c$. Εκφράζοντας την παράσταση αυτή ώστε να εμφανίζεται μόνο το x έχουμε $\int\frac{2x+6}{\sqrt[3]{x^2+6x}}dx$=3/2$\left(\sqrt[3]{x^2+6x}\right)^2$+c.

Άσκηση 10. (10 μον)

α) Αναπτύξτε σε σειρά Taylor κέντρου 1 την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x(x-2)}$, $|x-1|<1$, αναλύοντάς την πρώτα σε απλά κλάσματα και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας κατάλληλα τη γεωμετρική σειρά $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$, $|x|<1$.

β) Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την συνάρτηση f(x)=|x|, -π<x<π.

__**Λύση**__

α) Αναλύουμε το κλάσμα $\dfrac{1}{x(x-2)}$ σε απλά: $\dfrac{1}{x(x-2)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{(x-2)}$ $=$ $\dfrac{a(x-2)+bx}{x(x-2)}$.

Λύνουμε το σύστημα ως προς a, b και βρίσκουμε α = -1/2, β = 1/2.

Εναλλακτικά έχουμε $\dfrac{1}{x(x-2)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{x(x-2)}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Αναλύουμε τις παραστάσεις $\dfrac{1}{x}$ και $\dfrac{1}{x-2}$ σε δυναμοσειρές με κέντρο το 1.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+x-1}=\frac{1}{1-(-(x-1))}=\sum_{n=0}^{\infty}(-(x-1))^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n .$$

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{1-x+1}=-\frac{1}{1-(x-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n .$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε:

$$\frac{1}{x(x-2)}=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n\right)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2(x-1)^{2n}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n} .$$

2^{ος} τρόπος:

$$\frac{1}{x(x-2)}=\frac{1}{x^2-2x}=\frac{1}{x^2-2x+1-1}=-\frac{1}{1-(x-1)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left((x-1)^2\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n}$$

β) Επειδή $f(-x)=f(x)$ η συνάρτηση είναι άρτια και επομένως αναπτύσσεται μόνο μέσω των συνημιτονικών αρμονικών $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\cos nx$ (σελ.192).

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0}|x|dx + \int_{0}^{\pi}|x|dx) = \frac{1}{2\pi}.2\int_{0}^{\pi}|x|dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Για $n \geq 1$έχουμε:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|x|\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x(\frac{\sin nx}{n})^{/}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right) = \frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\sin n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0\,, \alpha\nu \quad n = 2k \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} = \dfrac{-4}{\pi(2k+1)^2}\,, \alpha\nu \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$k = 0,1,2,...$

Συνεπώς το ανάπτυγμα της f σε σειρά Fourier είναι $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$