ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΘΕ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 26 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

Συνοπτικές Ενδεικτικές Λύσεις

Άσκηση 1. (14 μον.) Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 5y & + & 5z & = & 4 \\ 2x & - & 6y & + & \lambda z & = & \mu \end{array}$$

(α) (6 μον.) Θέσατε $\lambda = 2$ και $\mu = 4$ και λύστε το σύστημα.

(β) (8 μον.) Βρείτε τιμές των λ και μ ώστε το σύστημα αυτό: (i) Να μην έχει **καμία λύση** και (ii) να έχει **άπειρες λύσεις**

Λύση

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2, \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2$, βρίσκουμε ότι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει τη μορφή $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & \mu \end{pmatrix}$. Από αυτή συμπεραίνουμε τα εξής.

(α) Έστω $\lambda = 2, \mu = 4$. Τότε λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα βρίσκουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση, $x = -2$, $y = -1$, $z = 1$.

(β)

(ι) Παρατηρούμε από την τελευταία γραμμή ότι αν $\lambda = -2$ και $\mu \neq 0$, τότε δεν υπάρχουν λύσεις.

(ιι) Αν $\lambda = -2$ και $\mu = 0$, τότε λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα βλέπουμε ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Για να είμαστε βέβαιοι ότι οι παραπάνω απαντήσεις στις περιπτώσεις (ι) και (ιι) είναι πλήρεις πρέπει να εξετάσουμε την περίπτωση $\lambda \neq -2$. Για τις τιμές αυτές λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα, βλέπουμε ότι αυτό έχει μοναδική λύση (για κάθε μ). (Σημείωση. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι μη μηδενική)

Άσκηση 2. (16 μον)

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

(α) (6 μον.) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Α

(β) (4 μον.) Να βρεθεί, αν υπάρχει, αντιστρέψιμος πίνακας Ρ τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος.

(γ) (4 μον.) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cayley-Hamilton, να υπολογιστεί ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} συναρτήσει των Α και A^2.

Λύση

(α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\det\begin{pmatrix}x-1 & -1 & 0\\ -3 & x+1 & 0\\ 0 & 0 & x-2\end{pmatrix}=(x-2)\big((x-1)(x+1)-3\big)=(x-2)^2(x+2).$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι 2 (διπλή) και –2.

Για την ιδιοτιμή 2 τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $\left(A-2I\right)X=0$. Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε $X=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}$.

Για την άλλη ιδιοτιμή, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $\left(A+2I\right)X=0$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $X=a\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}.$

(β) Τα στοιχεία $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (αφού για παράδειγμα η αντίστοιχη ορίζουσα είναι μη μηδενική) και άρα αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. O A διαγωνοποιείται γιατί υπάρχει μια βάση του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Ο πίνακας $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, του οποίου οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα , έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

(γ) Από το ερώτημα (α) και το Θεώρημα Cayley Hamilton παίρνουμε $(A-2I)^2(A+2I)=0$, δηλαδή $A^3 - 2A^2 - 4A + 8I = 0$. Πολλαπλασιάζοντας με A^{-1} βρίσκουμε $A^{-1} = \frac{1}{8}(-A^2+2A+4I)$.

Άσκηση 3. (10 μον): Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ (β) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ (γ) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ (δ) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Λύση

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})=2\sqrt{2}.$$

Στα επόμενα δυο ερωτήματα χρησιμοποιούμε τον κανόνα του $L'Hospital$

$$(b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))^{/}}{\left(x^2\right)^{/}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

$$(c)\ \lim_{x\to\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{/}}{\left(e^x\right)^{/}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

$$(d)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$$

Άσκηση 4. (14 μον)

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(α) (4 μον.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$ (β) (6 μον.) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$, (Για ποια $x\in\mathbb{R}$ συγκλίνει;)

(γ) (4 μον.) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$

Λύση

(α) Σύμφωνα με το Κριτήριο του Λόγου, αυτή αποκλίνει αφού $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right|=\infty>1$

(β) Παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n^2}{x^n(n+1)^2}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|=|x|$. Σύμφωνα με το Κριτήριο του Λόγου, έχουμε σύγκλιση για $|x|<1$ και απόκλιση για $|x|>1$. Για $x=1$ η σειρά συγκλίνει ως p – σειρά με p = 2 >1 και για x = - 1, επίσης συγκλίνει ως απολύτως συγκλίνουσα.

(γ) Έχουμε $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}\geq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$. Άρα η αρχική σειρά αποκλίνει λόγω σύγκρισης με την αρμονική.

Άσκηση 5. (10 μον)

Να βρεθούν τα διαστήματα των τιμών του x για τις οποίες η καμπύλη

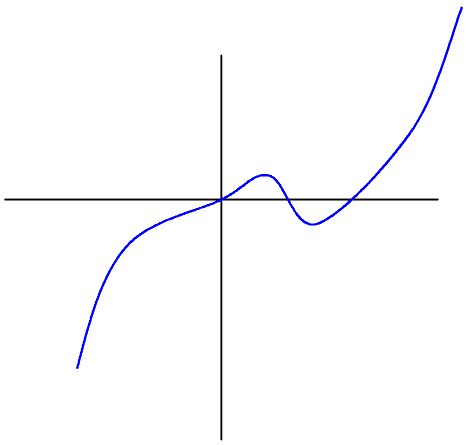
$$y = \frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}$$

ανέρχεται, κατέρχεται, είναι κοίλη προς τα κάτω, ή προς τα πάνω. Σχεδιάστε την καμπύλη και προσδιορίστε τα σημεία όπου η συνάρτηση έχει τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα και σημεία καμπής.

Λύση

Έχουμε $y' = x^4 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x-1)(x-2)$. Θεωρώντας τα πρόσημα των τιμών της πρώτης παραγώγου βλέπουμε ότι τα διαστήματα όπου η y είναι μονότονη είναι: στο $(-\infty,1)$ και στο $(2,\infty)$ είναι αύξουσα και στο $(1,2)$ είναι φθίνουσα. Άρα στο $x=1$ υπάρχει τοπικό μέγιστο και στο $x=2$ τοπικό ελάχιστο. (Στο 0 **δεν** υπάρχει ακρότατο).

Έχουμε $y'' = 4x^3 - 9x^2 + 4x = x(4x^2 - 9x + 4)$. Θεωρώντας τα πρόσημα των τιμών της δεύτερης παραγώγου, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν 3 σημεία καμπής: x = 0, και $x = \frac{1}{8}(9 \pm \sqrt{17})$. Η y είναι κοίλη προς τα κάτω στα διαστήματα $(-\infty,0), (\frac{1}{8}(9-\sqrt{17}), \frac{1}{8}(9+\sqrt{17}))$ και κοίλη προς τα πάνω στα διαστήματα $(0, \frac{1}{8}(9-\sqrt{17})), (\frac{1}{8}(9+\sqrt{17}), \infty)$.



Άσκηση 6. (14 μον.)

(α) (9 μον.) Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

(i) $f(x) = e^{x^2}\cos(2x)$ (ii) $g(x) = 3\tan(\sqrt{x^2-1})$ (iii) $h(x) = \frac{x^{2/3}+1}{x^{3/2}}$

(β) (5 μον.) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2\ln(x) - \alpha x^2, & x > 1 \\ 1 + \beta x + x^3, & x \le 1 \end{cases}$. Να εξετασθεί για ποιες τιμές των α και β είναι παραγωγίσιμη στο x = 1.

Λύση

(α) $f(x)' = 2xe^{x^2}\cos(2x) - 2e^{x^2}\sin(2x)$ (γινόμενο και σύνθεση)

$g(x)' = 3\sec^2(\sqrt{x^2-1})\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{-1/2}(2x)$ (σύνθεση)

$h(x)' = \frac{2/3x^{-1/3}x^{3/2} - \left(x^{2/3}+1\right)3/2x^{1/2}}{x^3}$ (πηλίκο και σύνθεση) (β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 αν και μόνο αν τα όρια $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}, \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

υπάρχουν και να είναι ίσα.

Για το πρώτο όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1+\beta x+x^2-1-\beta-1}{x-1}=$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\beta(x-1)+x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(\beta+(x+1))=$$
$$=\beta+2.$$

Για το δεύτερο όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln x-\alpha x^2-1-\beta-1}{x-1}.$$

Παρατηρούμε ότι για να υπάρχει το τελευταίο όριο πρέπει

$$2\ln 1-\alpha-1-\beta-1=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+2=0.$$

Στην περίπτωση αυτή, το υπολογίζουμε με τον κανόνα του L'Hospital,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln x-\alpha x^2-1-\beta-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\frac{1}{x}-2\alpha x}{1}=2-2\alpha.$$

Άρα $2-2a=\beta+2 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=0$.

Τελικά από τις σχέσεις $\alpha+\beta+2=0, 2\alpha+\beta=0$ παίρνουμε $\alpha=2, \beta=-4$.

Άσκηση 7. (10)μον)

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου μεταξύ των καμπυλών $y=\sqrt{x}$ και $y=x/2$ στο διάστημα μεταξύ των σημείων τομής τους.

Λύση

Για να βρούμε τα σημεία τομής των δυο καμπύλων έχουμε $\sqrt{x}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0,4$.

Όταν $0\le x\le 4$ τότε $\sqrt{x}\ge\frac{x}{2}$. Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E=\int_0^4(\sqrt{x}-\frac{x}{2})dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4-\frac{x^2}{4}\Big|_0^4=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$$

Άσκηση 8. (12 μον.) Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα

(i) $\int\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}dx$ (ii) $\int\frac{\sqrt{x+2}+1}{x+2+\sqrt{x+2}}dx$ (iii) $\int x^2\sin x dx$

Υπόδειξη: Για το (i) χρησιμοποιείστε τη μέθοδο χωρισμού της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης στα επί μέρους κλάσματα $\dfrac{A}{x+1}$, $\dfrac{B}{x-1}$. Για το (ii) χρησιμοποιείστε τη μέθοδο της αντικατάστασης (π.χ. θέστε $\sqrt{x+2}=u$) και για το (iii) της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Λύση

(i) Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη βρίσκουμε

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow x+2=A(x-1)+B(x+1)\Rightarrow (\text{για } x=\pm 1)\ A=-1/2, B=3/2.$$

Επομένως $\dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x-1}$. Άρα

$$\int\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}dx=\frac{-1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}dx=\frac{-1}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+C$$

(ii) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+2}+1}{x+2+\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{u+1}{u^2+u}2udu=2\int du=2u+C=2\sqrt{x+2}+C$, όπου θέσαμε $u=\sqrt{x+2}$, αρα $2udu=dx$.

(iii) Εφαρμόζουμε δυο φορές την παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int x^2\sin xdx=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx=-x^2\cos x+2\left(x\sin x-\int\sin xdx\right)$$

$$=\ -x^2\cos x+2\left(x\sin x+\cos x\right)+C$$