ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 9 Ιουλίου 2005

Από τα κάτωθι Θέματα καλείσθε να λύσετε το 1ο που περιλαμβάνει ερωτήματα από όλη την ύλη του μαθήματος, ενώ από τα Θέματα 2, 3, 4 και 5 μπορείτε να επιλέξετε **το πολύ τρία**. **Προσοχή:** Αν προσπαθήσετε να επιλύσετε και τα τέσσερα Θέματα 2, 3, 4 και 5 πρέπει να μας υποδείξετε ποια τρία από αυτά θέλετε να βαθμολογήσουμε.

Θέμα 1. (40 μονάδες)

α) (6 μονάδες) Να βρεθεί ο 2x2 πίνακας X που ικανοποιεί τη σχέση:

$$X\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

β) (6 μονάδες) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y &= 2\\ ax+2y &= \beta \end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές των α και β, δηλ. να βρεθεί πότε έχει μοναδική λύση (και ποια είναι αυτή), πότε έχει άπειρες (και ποιες είναι αυτές) και πότε καμία λύση.

γ) (6 μονάδες) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$.

Αληθεύει ότι ο Α διαγωνοποιείται;

δ) (6 μονάδες)

Υπολογίστε την ορίζουσα $\det\begin{bmatrix}0 & 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12 & 14\\ 16 & 18 & 20 & 22\\ 24 & 26 & 28 & 30\end{bmatrix}$. Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιείστε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ή στηλών.

ε) (5 μονάδες) Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=x^2e^x$, με $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της $f(x)$ και χαρακτηρίστε τα ως τοπικά μέγιστα ή τοπικά ελάχιστα. Αληθεύει ότι για κάθε πραγματικό y, υπάρχει x τέτοιο ώστε $f(x)=y$;

στ) (6 μονάδες) Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=(2x+1)^x$. Υπόδειξη: Παραγωγίστε πρώτα την συνάρτηση $y(x)=\ln f(x)$ ως προς x.

η) (5 μονάδες) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\frac{x^2}{2x^3-1}dx$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κατάλληλη αντικατάσταση.

Θέμα 2. (20 μονάδες)
Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$, $U = span\{(1,1,0),(2,0,3)\}$ και $V = span\{(3,1,3),(1,1,1)\}$.

Βρείτε τη διάσταση και μια βάση για καθέναν από τους υπόχωρους $U+V$, $U \cap V$.

Θέμα 3. (20 μονάδες)
(α) (10 μονάδες) Να υπολογιστούν τα όρια

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{4x^2 - x + 1} - 2x\right)$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$

(β) (5 μονάδες) Να εξεταστεί για ποια x συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου.

(γ) (5 μονάδες) Να υπολογιστεί τα άθροισμα $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

Θέμα 4. (20 μονάδες)

(α) (10 μονάδες) Βρείτε τα κ, λ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \lambda \sin 2x & x < 0 \\ \kappa & x = 0 \\ x^2 + x + \kappa & x > 0 \end{cases}$ να είναι

συνεχής στο x = 0 και παραγωγίσιμη στο x = 0 .

(β) (10 μονάδες) Μια βιομηχανία ελαιοχρωμάτων κατασκευάζει μεταλλικά κυλινδρικά κουτιά όγκου *V*= 250π cm^3 (κυβ. εκ.) από φύλλα δεδομένης λαμαρίνας. Να βρεθεί το ύψος, y, του κυλίνδρου και η ακτίνα της βάσης, x, ώστε το εμβαδόν *E* της χρησιμοποιούμενης λαμαρίνας να είναι ελάχιστο (Δίνονται οι τύποι: $V = \pi x^2 y$, $E = 2\pi x^2 + 2\pi xy$) . Απάντηση: x = 5 cm.

Θέμα 5. (20 μονάδες)

(α) (10 μονάδες) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x \ln x$, και τον άξονα των x για $1 \le x \le e$. Υπόδειξη: Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μπορείτε να χρησιμοποιείστε παραγοντική ολοκλήρωση.

(β) (10 μονάδες) Υπολογίστε ακριβώς το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$ (μέθοδος αντικατάστασης).

Στη συνέχεια, αναπτύξτε τη συνάρτηση e^{-x^2} σε σειρά Taylor, γύρω από το x = 0, κρατώντας σε αυτήν μέχρι όρους τάξης x^4 και προσεγγίστε την τιμή του I ολοκληρώνοντας το άθροισμα που προκύπτει. Αν $e^{-1} = 0.368$, ποιο είναι το σφάλμα της προσέγγισης που βρήκατε;

----------------------------- ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !-------------------------------