ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

(Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 17 Οκτωβρίου 2004)

Η Εργασία χωρίζεται σε 2 μέρη: Το πρώτο, Ασκήσεις 1 - 4, περιλαμβάνει μια επανάληψη βασικών γνώσεων του Λυκείου και το δεύτερο, Ασκ. 5 – 10, αναφέρεται στα Κεφάλαια 1, 2 και 3 του συγγράμματος «Γραμμική Άλγεβρα». Η **τελική ημερομηνία** αποστολής της Εργασίας είναι η 16 Νοεμβρίου 2004.

Άσκηση 1 (6 μονάδες) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

(i) $\dfrac{2x^2-xy-3y^2}{y^2+3xy+2x^2}$, **(ii)** $\dfrac{2a^2+ab-b^2}{a^2-b^2}$ και **(iii)** $\dfrac{(a^2-b^2)^2(x^3-y^3)}{(a^3+b^3)(x^2-xy+y^2)}$.

Εξηγείστε υπό ποίες συνθήκες είναι δυνατή η απλοποίηση αυτή.

Λύση: (i) Έχουμε: $2x^2-xy-3y^2=2x^2+2xy-3xy-3y^2=2x(x+y)-3y(x+y)=$
$=(x+y)(2x-3y)$.

Ένας άλλος τρόπος να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $2x^2-xy-3y^2$, το οποίο είναι δευτέρου βαθμού ως προς x, είναι να βρούμε πρώτα τις ρίζες:

$$\frac{y\pm\sqrt{y^2+24y^2}}{4}=\frac{y\pm 5y}{4}=\begin{cases}\dfrac{y+5y}{4}=\dfrac{3y}{2}\\ \text{ή}\\ \dfrac{y-5y}{4}=-y\end{cases}$$

και στη συνέχεια να το γράψουμε στη μορφή:

$$2x^2-xy-3y^2=2\left(x-\frac{3y}{2}\right)(x+y)=(2x-3y)(x+y).$$

Παρόμοια,

$$y^2+3xy+2x^2=y^2+xy+2xy+2x^2=y(y+x)+2x(y+x)=(x+y)(y+2x)\ .$$

Επομένως, $\dfrac{2x^2-xy-3y^2}{y^2+3xy+2x^2}=\dfrac{\cancel{(x+y)}(2x-3y)}{\cancel{(x+y)}(2x+y)}=\dfrac{2x-3y}{2x+y}$.

(ii) $\dfrac{2a^2+ab-b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{2a^2+2ab-ab-b^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{2a(a+b)-b(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{\cancel{(a+b)}(2a-b)}{(a-b)\cancel{(a+b)}}=$

$=\dfrac{2a-b}{a-b}$.

(iii) $\dfrac{(a^2-b^2)^2(x^3-y^3)}{(a^3+b^3)(x^2+xy+y^2)}=\dfrac{(a-b)^2(a+b)^{\cancel{2}}(x-y)(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(a+b)}(a^2-ab+b^2)(x^2-xy+y^2)}=$

$$=\frac{(a-b)^2(a+b)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(a^2-ab+b^2)(x^2-xy+y^2)}.$$

Άσκηση 2 (9 μον.) Να ευρεθούν όλα τα x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

(i) $x^3+x^2-8x-6=0$ (Δείξτε πρώτα ότι μία λύση είναι το x = -3)

(ii) $x^2+2x=|x+1|+5$ (Εξετάστε χωριστά τις περιπτώσεις x < -1 και $x \geq$ -1)

(iii) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

Λύση: (i) Με βάση το σχήμα Horner

1	1	-8	-6	-3
	-3	6	6	
1	-2	-2	**0**	

παίρνουμε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3+x^2-8x-6):(x+3)$ που είναι το x^2-2x-2. Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2-2x-2=0$ και παίρνουμε τις ρίζες $x_2=\frac{2+\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2+\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$ και $x_3=\frac{2-\sqrt{4+8}}{2}=1-\sqrt{3}$.

(ii) (α΄ τρόπος) Έστω $x<-1$. Τότε $x+1<0$ και επομένως, $|x+1|=-x-1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $x^2+2x=|x+1|+5 \Leftrightarrow x^2+2x=-x-1+5 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0$, με ρίζες $\frac{-3\pm\sqrt{3^2+16}}{2}=\begin{cases}\frac{-3+5}{2}=1\\ \text{ή}\\ \frac{-3-5}{2}=-4\end{cases}$ Ο αριθμός 1 δεν μπορεί να είναι ρίζα γιατί υποθέσαμε ότι $x<-1$. Επομένως, $x=-4$.

Έστω $x\geq -1$. Τότε $x+1\geq 0$ και επομένως, $|x+1|=x+1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $x^2+2x=|x+1|+5 \Leftrightarrow x^2+2x=x+1+5 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$, με ρίζες $\frac{-1\pm\sqrt{1^2+24}}{2}=\begin{cases}\frac{-1+5}{2}=2\\ \text{ή}\\ \frac{-1-5}{2}=-3\end{cases}$ Ο αριθμός -3 δεν μπορεί να είναι ρίζα γιατί υποθέσαμε ότι $x\geq -1$. Επομένως, $x=2$. Τελικά οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+2x=|x+1|+5$ είναι οι αριθμοί -4 και 2.

(β΄ τρόπος) $x^2+2x=|x+1|+5 \Leftrightarrow x^2+2x+1=|x+1|+6 \Leftrightarrow |x+1|^2-|x+1|-6=0$.

Θέτουμε $t=|x+1|$ και παίρνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση $t^2-t-6=0$ με ρίζες $t_1=-2$ και $t_2=3$. Επειδή $|x+1|\geq 0$, η t_1 απορρίπτεται.

Άρα $|x+1|=3 \Leftrightarrow (x+1=3 \text{ ή } x+1=-3) \Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=-4)$.

(iii) Κατ' αρχάς οι υπόρριζες ποσότητες θα πρέπει να είναι μη αρνητικές. Έτσι,

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ \text{και} \\ x-6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ \text{και} \\ x\geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 6.$$

Τώρα, υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$ στο τετράγωνο:

$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2 \Rightarrow \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}\right)^2=4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}\right)^2+\left(\sqrt{x-6}\right)^2-$

$-2\sqrt{(x+2)(x-6)}=4 \Leftrightarrow x+2+x-6-2\sqrt{x^2-4x-12}=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-4=\sqrt{x^2-4x-12}$ και ξανά στο τετράγωνο,

$(x-4)^2=x^2-4x-12 \Leftrightarrow x^2+16-8x=x^2-4x-12 \Leftrightarrow -4x=-28 \Leftrightarrow x=7$, που είναι μεγαλύτερος του 6 (σύμφωνα με τον περιορισμό που βάλαμε).

Επαλήθευση: $\sqrt{7+2}-\sqrt{7-6}=\sqrt{9}-\sqrt{1}=3-1=2$.

Άσκηση 3 (10 μον.) Να βρεθούν όλα τα x για τα οποία **συναληθεύουν** (δηλαδή ισχύουν ταυτοχρόνως) οι ανισότητες:

$$\begin{cases} x^2-4x+2\leq |x-2| & (a) \\ x^2+6\geq 5x & (b) \end{cases}$$

(Στην περίπτωση (α) εξετάστε χωριστά τις περιπτώσεις $x<2$ και $x\geq 2$).

Λύση: Έστω $x<2$. Τότε $x-2<0$ και επομένως $|x-2|=-x+2$. Η ανίσωση $x^2-4x+2\leq |x-2|$ γίνεται $x^2-4x+2\leq -x+2 \Leftrightarrow x^2-3x\leq 0 \Leftrightarrow x(x-3)\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\leq x\leq 3$. Επειδή υποθέσαμε ότι $x<2$, παίρνουμε $0\leq x<2$.

Έστω $x\geq 2$. Τότε $x-2\geq 0$ και επομένως $|x-2|=x-2$. Η ανίσωση $x^2-4x+2\leq |x-2|$ γίνεται $x^2-4x+2\leq x-2 \Leftrightarrow x^2-5x+4\leq 0$.

Το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases} \dfrac{5+3}{2}=4 \\ \text{ή} \\ \dfrac{5-3}{2}=1 \end{cases}$

Επομένως, $1 \le x \le 4$. Επειδή υποθέσαμε ότι $x \ge 2$, παίρνουμε $2 \le x \le 4$.

Συνδυάζοντας τις λύσεις $0 \le x < 2$ και $2 \le x \le 4$ παίρνουμε τις λύσεις $0 \le x \le 4$ για την πρώτη ανίσωση.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να τη λύσουμε ως εξής:

$x^2 - 4x + 2 \le |x-2| \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \le |x-2| + 2 \Leftrightarrow |x-2|^2 - |x-2| - 2 \le 0$. Θέτουμε $t = |x-2|$. Επομένως, $t^2 - t - 2 \le 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου $t^2 - t - 2$ είναι οι αριθμοί -1 και 2. Επομένως, $-1 \le t = |x-2| \le 2$. Επειδή $|x-2| \ge 0$, παίρνουμε $0 \le |x-2| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x - 2 \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4$.

Από τη δεύτερη ανίσωση παίρνουμε

$x^2 - 5x + 6 \ge 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \ge 0 \Leftrightarrow (x \ge 3 \text{ ή } x \le 2)$. Συνδυάζοντας τις λύσεις αυτές με εκείνες της πρώτης ανίσωσης, παίρνουμε: $0 \le x \le 2$ ή $3 \le x \le 4$.

.

Άσκηση 4 (10 μον.) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

(i) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ **(ii)** $g(x) = \sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x}}$

(Παρατηρείστε ότι μια συνάρτηση δεν ορίζεται όταν παίρνει άπειρες τιμές και όταν οι υπόριζες παραστάσεις που περιέχει είναι αρνητικές). Μπορείτε να απλοποιήσετε τους τύπους των ως άνω $f(x), g(x)$;

Λύση: (i) Για να ορίζεται το κλάσμα $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ θα πρέπει ο παρονομαστής $x^2 - 3x + 2$ να μην είναι μηδέν. Οι ρίζες του παρονομαστή είναι οι αριθμοί 1 και 2. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f* είναι το σύνολο

$$\mathbb{R} \setminus \{1,\ 2\} = (-\infty,\ 1) \cup (1,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$$

Ο τύπος της *f* απλοποιείται ως εξής:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2x^2 - 4x - x + 2}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x(x-2) - (x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\cancel{(x-2)}(2x-1)}{(x-1)\cancel{(x-2)}} = \frac{2x-1}{x-1}.$$

(ii) Για να ορίζεται το $\sqrt{x}$ θα πρέπει $x \ge 0$. Στην περίπτωση αυτή η υπόρριζη ποσότητα $x + 1 - 2\sqrt{x}$ γίνεται μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός ως τέλειο τετράγωνο: $x + 1 - 2\sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1^2 - 2\sqrt{x} \cdot 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *g* είναι το σύνολο $[0,\ +\infty)$. Ο τύπος της απλοποιείται ως εξής:

$g(x) = \sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x}} = \sqrt{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{x} - 1\right|$.

Άσκηση 5 (15 μον.) Να λυθούν με γραμμοπράξεις τα συστήματα:

$$\textbf{(i)}\ \begin{cases} -x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 2 \\ -3x_1 & -7x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -5 \\ 5x_1 & +5x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & 3 \end{cases} \qquad \textbf{(ii)}\ \begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 5 \end{cases}$$

$$\textbf{(iii)}\ \begin{cases} -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 4 \\ -3x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -2 \end{cases}$$

(Υπόδειξη: Πολλαπλασιάζοντας πρώτα με τον κατάλληλο αριθμό, προσθέστε ή αφαιρέστε τις σειρές ανά δύο ώστε να απαλείφονται οι άγνωστοι κλιμακωτά και να καταλήγετε σε μια εξίσωση με έναν άγνωστο, αν γίνεται αυτό. Διαβάστε καλά τις παραγρ. 3.1, 3.2, 3.3 και τα Παραδείγματα 3.6, 3.7, 3.8 και 3.9 του βιβλίου).

Λύση: **(i)** Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -7 & -1 & 1 & -5 \\ 5 & 5 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

Προσπαθούμε με γραμμοπράξεις να τον φέρουμε σε άνω τριγωνική μορφή.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -7 & -1 & 1 & -5 \\ 5 & 5 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4+5\Gamma_1]{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2+2\Gamma_1 \\ \Gamma_3\to\Gamma_3-3\Gamma_1}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -10 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 10 & -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_3\to\Gamma_3+2\Gamma_2 \\ \Gamma_4\to\Gamma_4-2\Gamma_2}}$$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Οι δύο πρώτες γραμμές δίνουν

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & 5x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 = 4 - 5x_2 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 4 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 = 4 - 5x_2 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_2 + 3 \\ x_4 = 4 - 5x_2 + x_3 \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι οι άπειρες τετράδες $(-4x_2 + 3, x_2, x_3, 4 - 5x_2 + x_3)$, όπου $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(ii) Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_2}$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1]{\Gamma_1 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 6 & 2 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η τελευταία γραμμή του πίνακα $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ δίνει την εξίσωση $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$, η οποία είναι αδύνατη. Άρα το σύστημα δεν έχει λύσεις.

(iii) Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 3\Gamma_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to -\frac{1}{18}\Gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to 4\Gamma_3}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2 - 3\Gamma_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to -\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας μας δίνει $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Άσκηση 6 (10 μον.) Να επιλυθεί για τις διάφορες τιμές του a το σύστημα:

$$\begin{cases} (a+1)x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & +2ax_2 & +x_3 & = & 4 \\ (4a+2)x_1 & +2(3-a)x_2 & +(a+3)x_3 & = & -2 \end{cases}$$

Εξετάστε για ποια a το σύστημα έχει μία μόνο λύση, καμία λύση ή άπειρες λύσεις.

Λύση: Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $\begin{bmatrix} a+1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2a & 1 & 4 \\ 4a+2 & 2(3-a) & a+3 & -2 \end{bmatrix}$.

Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} a+1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2a & 1 & 4 \\ 4a+2 & 2(3-a) & a+3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1\to 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} 2a+2 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 2a & 1 & 4 \\ 4a+2 & 6-2a & a+3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2} \begin{bmatrix} 2a & 4-2a & 1 & 4 \\ 2 & 2a & 1 & 4 \\ 4a & 6-4a & a+2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1\to\Gamma_1-a\Gamma_1]{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4-2a-2a^2 & 1-a & 4-4a \\ 2 & 2a & 1 & 4 \\ 0 & -2 & a & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_2} \begin{bmatrix} 2 & 2a & 1 & 4 \\ 0 & 2(1-a)(a+2) & 1-a & 4-4a \\ 0 & -2 & a & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2+(1-a)(a+2)\Gamma_3} \begin{bmatrix} 2 & 2a & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1-a+a(1-a)(a+2) & 4-4a-14(1-a)(a+2) \\ 0 & -2 & a & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3} \begin{bmatrix} 2 & 2a & 1 & 4 \\ 0 & -2 & a & -14 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+1)^2 & -2(1-a)(7a+12) \end{bmatrix}$$

Αν $a \neq \pm 1$, τότε η τελευταία εξίσωση θα μας δώσει

$x_3 = \dfrac{-2(7a+12)}{(a+1)^2}$ και με αντικατάσταση στη δεύτερη, $-2x_2 + a\dfrac{-2(7a+12)}{(a+1)^2} = -14$,

απ' όπου $x_2 = 7 - \dfrac{a(7a+12)}{(a+1)^2} = \dfrac{7+2a}{(a+1)^2}$. Με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση

παίρνουμε $2x_1 + \dfrac{2a(7+2a)}{(a+1)^2} - \dfrac{2(7a+12)}{(a+1)^2} = 4 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{2(2a+7)}{(a+1)^2}$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ορίζουσες:

Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} a+1 & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 1 \\ 4a+2 & 2(3-a) & a+3 \end{vmatrix} = 2a^3 + 2a^2 - 2a - 2 = 2a^2(a+1) - 2(a+1) =$$

$$= 2(a+1)(a^2-1) = 2(a+1)^2(a-1)$$

Αν λοιπόν $a \neq \pm 1$ παίρνουμε μοναδική λύση: $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{D_{x_1}}{D}, \dfrac{D_{x_2}}{D}, \dfrac{D_{x_3}}{D} \right)$, όπου

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \\ -2 & 2(3-a) & a+3 \end{vmatrix} = 8a^2 + 20a - 28 = 4(a-1)(2a+7),$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a+1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4a+2 & -2 & a+3 \end{vmatrix} = 4a^2 + 10a - 14 = 2(a-1)(2a+7) \text{ και}$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} a+1 & 2 & 4 \\ 2 & 2a & 4 \\ 4a+2 & 2(3-a) & -2 \end{vmatrix} = -28a^2 - 20a + 48 = 4(1-a)(7a+12).$$

Επομένως, $x_1 = \dfrac{4(a-1)(2a+7)}{2(a+1)^2(a-1)} = \dfrac{2(2a+7)}{(a+1)^2}$, $x_2 = \dfrac{2(a-1)(2a+7)}{2(a+1)^2(a-1)} = \dfrac{2a+7}{(a+1)^2}$ και

$x_3 = \dfrac{4(1-a)(7a+12)}{2(a+1)^2(a-1)} = -\dfrac{2(7a+12)}{(a+1)^2}$.

Αν $a=1$, τότε παίρνουμε $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Η τελευταία γραμμή μας δίνει την εξίσωση $-2x_2 + x_3 = -14 \Leftrightarrow x_3 = -14 + 2x_2$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε $2x_1 + 2x_2 - 14 + 2x_2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 + 9$. Οι λύσεις του συστήματος είναι όλες οι τριάδες της μορφής $(-2x_2 + 9, x_2, -14 + 2x_2)$, όπου $x_2 \in \mathbb{R}$.

Αν $a=-1$, τότε παίρνουμε $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$. Η τελευταία γραμμή μας δίνει την εξίσωση $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -20$, που είναι αδύνατη και επομένως το σύστημα δεν έχει, στην περίπτωση, αυτή λύσεις.

Άσκηση 7 (10 μον.) **(i)** Δίνεται ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Δείξτε ότι $A^{n+2} - A^n = A^2 - I$, για κάθε $n = 0,1,2,\ldots$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Επαγωγής: Δείξτε πρώτα ότι ο τύπος ισχύει για n = 0, 1. Κατόπιν δεχθείτε ότι ισχύει για n = k και δείξτε ότι ισχύει για n = k+1.

(ii) Υπολογίστε τον πίνακα A^{2004}.

(Υπόδειξη: $A^{2004} = (A^{2004} - A^{2002}) + (A^{2002} - A^{2000}) + \cdots + (A^2 - I) + I$).

Λύση: (i) $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Επομένως, $A^2 - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ακόμη, $A^3 - A = A(A^2 - I) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^2 - I$.

Υποθέτουμε ότι $A^{n+2} - A^n = A^2 - I$.

Τότε $A^{n+3} - A^{n+1} = A(A^{n+2} - A^n) = A(A^2 - I) = A^2 - I$. Επομένως, $A^{n+2} - A^n = A^2 - I$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

(ii) $A^{2004} = \overbrace{(\underbrace{A^{2004} - A^{2002}}_{A^2 - I}) + (\underbrace{A^{2002} - A^{2000}}_{A^2 - I}) + \cdots + (A^2 - I)}^{1002 \text{ προσθεταίοι}} + I = 1002 \cdot (A^2 - I) + I =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1002 & 0 & -1002 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1002 & 1 & -1002 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 8 (10 μον.) Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ και $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Να εξεταστεί αν ορίζονται και να υπολογιστούν (στην περίπτωση που ορίζονται) οι πίνακες: **(i)** AB^2 **(ii)** B^2A **(iii)** CD και **(iv)** DC. (Διαβάστε καλά την παράγρ. 1.2, σελ. 3 του βιβλίου).

Λύση: (i) Ο πίνακας B^2, όπως και ο B, είναι 2×2. Ο πίνακας A είναι 2×3. Άρα δεν ορίζεται το γινόμενο AB^2 και επομένως και το άθροισμα $AB^2 + B$.

(ii) Ο πίνακας B^2 είναι 2×2 και ο πίνακας A είναι 2×3. Επομένως ο πίνακας B^2A είναι 2×3. Έχουμε $B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$ και άρα

$$B^2A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 5 \\ 25 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

(iii) Ο πίνακας C είναι 1×3 και ο πίνακας D είναι 3×1. Άρα ο πίνακας CD είναι 1×1, δηλαδή αριθμός. Έχουμε $CD = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [1]$.

(iv) Ο πίνακας D είναι 3×1 και ο πίνακας είναι C 1×3. Άρα ο πίνακας DC είναι 3×3. Έχουμε $DC = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 9 (10 μον.) Δείξτε ότι $D_n = (n+1)\cdot 6^n$, όπου D_n είναι η ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

με $n \geq 2$, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Επαγωγής.

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο τύπος $D_n = (n+1)\cdot 6^n$ επαληθεύεται για $n = 2$, 3 και ότι ικανοποιεί την σχέση $D_n = 12D_{n-1} - 36D_{n-2}$. Κατόπιν δεχθείτε ότι ισχύει αυτή η σχέση και δείξτε ότι $D_{n+1} = 12D_n - 36D_{n-1}$).

Λύση: Παρατηρούμε ότι, αν $n \geq 4$, τότε, αναπτύσσοντας ως προς την 1η γραμμή, παίρνουμε:

$$D_n = \begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 12 \end{vmatrix} = 12\underbrace{\begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} - 9\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 9 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 12 & 9 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

Αν αναπτύξουμε τη δεύτερη ορίζουσα ως προς την 1η στήλη θα πάρουμε

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 9 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 12 & 9 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} = 4\underbrace{\begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)}.$$ Επομένως

$$D_n = \begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 12 \end{vmatrix} = 12\underbrace{\begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} - 36\underbrace{\begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)} =$$

$$= 12D_{n-1} - 36D_{n-2}$$

Αποδεικνύουμε τη σχέση $D_n = (n+1)\cdot 6^n$ επαγωγικά:

Για $n=2$ παίρνουμε $D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 108 = (2+1)\cdot 6^2$ και η σχέση ισχύει στην περίπτωση αυτή.

Για $n=3$ παίρνουμε $D_3 = \begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 4 & 12 & 9 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 864 = (3+1)\cdot 6^3$ και η σχέση ισχύει στην περίπτωση αυτή.

Υποθέτουμε ότι $n \geq 4$ και $D_{n-2} = (n-1)\cdot 6^{n-2}$ και $D_{n-1} = n\cdot 6^{n-1}$.

Τότε $D_n = 12D_{n-1} - 36D_{n-2} = 12n\cdot 6^{n-1} - 36(n-1)\cdot 6^{n-2} = 2n\cdot 6^n - (n-1)\cdot 6^n = (n+1)\cdot 6^n$

Άσκηση 10 (10 μον.). Να λύσετε το σύστημα $AX = b$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, αφού βρείτε πρώτα τον αντίστροφο του πίνακα A, χρησιμοποιώντας την θεωρία της παραγρ. 2.3, σελ. 34 του βιβλίου. Θεωρείτε αυτή τη διαδικασία επίλυσης περισσότερο ή λιγότερο επίπονη από πλευράς αριθμού πράξεων, σε σύγκριση με την επίλυση μέσω γραμμοπράξεων όπως στην Άσκηση 5;

Λύση: Έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2(-3) - 1 = 4,$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3,\ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Επομένως, $\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ και $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Τώρα, $AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλαδή $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$.
