ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

(Ημερομηνία αποστολής στον φοιτητή: 20 Νοεμβρίου 2004. Τελική ημερομηνία αποστολής από τον φοιτητή: 21 Δεκεμβρίου 2004)

Οι ασκήσεις 1- 4 αναφέρονται στο Κεφάλαιο 4: Διανυσματικοί Χώροι. Εδώ συναντάμε μερικές θεμελιώδεις έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας όπως είναι ο διανυσματικός χώρος, η γραμμική ανεξαρτησία, η βάση και η διάσταση.

Άσκηση 1 (9 μονάδες)

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και δικαιολογείστε την απάντησή σας.

1. $U = \{(x,y,z) | 3x+5y+z=1\}$
2. $V = \{(x,y,z) | 3x^2+5y+z=0\}$
3. $W = \{(x,y,z) | 3x+5y+z=0\}$.

Λύση

1. Το U δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί δεν περιέχει το $(0,0,0)$.
2. Το V δεν είναι υπόχωρος. Πράγματι, έχουμε για παράδειγμα $(1,0,-3)\in V$ αφού $3\cdot 1^2+5\cdot 0+(-3)=0$, αλλά $-(1,0,-3)=(-1,0,3)\notin V$ αφού $3\cdot(-1)^2+5\cdot 0+3=6\neq 0.$
3. Τα W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το κριτήριο στο πάνω μέρος της σελίδας 65 έχουμε : για κάθε $k,l\in\mathbb{R}$ και $(x,y,z),(x',y',z')\in W$,
$$k(x,y,z)+l(x',y',z')=(kx+lx',ky+ly',kz+lz')$$
και
$$5(kx+lx')+3(ky+ly')+(kz+lz')=$$
$$k(5x+3y+z)+l(5x'+3y'+z')=0+0=0.$$
Άρα $k(x,y,z)+l(x',y',z')\in W$.

Άσκηση 2 (12 μονάδες)

Έστω $a\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τα στοιχεία $u=(1,1,1), v=(2,1,1), w=(1,a,2)$ του $\mathbb{R}^3$.

1. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες τα u,v,w είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το $(0,1,1)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $u,v,w.$

Υπόδειξη: Για το 2. βλ Παράδειγμα 4.3 του βιβλίου.

Λύση

1. Έστω $\lambda u+\mu v+\nu w=0,\ \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$. Ζητάμε τα *a* για τα οποία η σχέση αυτή αληθεύει μόνο για $\lambda=\mu=\nu=0$. Έχουμε
$\lambda u+\mu v+\nu w=0 \Leftrightarrow \lambda(1,1,1)+\mu(2,1,1)+\nu(1,a,2)=(0,0,0)\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\lambda+2\mu+\nu=0\\ \lambda+\mu+\nu a=0\\ \lambda+\mu+2\nu=0.\end{cases}$$
Ζητάμε τα *a* για τα οποία το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Ο επαυξημένος πίνακας
$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&\alpha&0\\1&1&2&0\end{pmatrix}$$
του συστήματος μετά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1,\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1,\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2$ παίρνει τη μορφή
$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-1&a-1&0\\0&0&2-a&0\end{pmatrix}$$. Το αντίστοιχο σύστημα είναι το $\begin{cases}\lambda+2\mu\qquad+\nu=0\\ \quad-\mu+(a-1)\nu=0\\ \qquad(2-a)\nu=0\end{cases}$
Βλέπουμε ότι η μηδενική λύση είναι μοναδική αν και μόνο αν $a\neq 2$.
2. Ζητάμε τα *a* για τα οποία υπάρχουν $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε
$\lambda u+\mu v+\nu w=(0,1,1)$. Όπως πριν παίρνουμε το σύστημα
$$\begin{cases}\lambda+2\mu+\nu=0\\ \lambda+\mu+\nu a=1\\ \lambda+\mu+2\nu=1.\end{cases}$$
Ζητάμε τα *a* για τα οποία το σύστημα έχει λύση. Ο επαυξημένος πίνακας
$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&a&1\\1&1&2&1\end{pmatrix}$$
του συστήματος μετά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1,\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1,\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2$ παίρνει τη μορφή
$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-1&a-1&1\\0&0&2-a&0\end{pmatrix}$$. Το αντίστοιχο σύστημα είναι το $\begin{cases}\lambda+2\mu\qquad+\nu=0\\ \quad-\mu+(a-1)\nu=1\\ \qquad(2-a)\nu=0.\end{cases}$
Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό έχει λύση για κάθε *a*.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι $(0,1,1)=2u-v$.

Άσκηση 3 (15 μονάδες)

1. Έστω *V* ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,0,0),(1,0,1,0),(3,1,2,0),(0,0,1,1)$.
   i) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του *V*.
   ii) Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα που είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του *V*.

2. Να βρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας με 1η γραμμή τη $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Υπόδειξη: Για το 2. βλ. Παράδειγμα 4.21.

Λύση

1. i) Σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Άρα μια βάση του V είναι το σύνολο $\{(1,1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,1)\}$ που αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του τελευταίου πίνακα. Έχουμε $\dim V = 3$.

   Σημείωση. Είναι λάθος να πούμε ότι μια βάση του V είναι το $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(3,1,2,0)\}$ που αποτελείται από τα τρία πρώτα από τα δοσμένα διανύσματα της εκφώνησης μιας και οι τρεις πρώτες γραμμές της κλιμακωτής μορφής είναι μη μηδενικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στους παραπάνω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς είχαμε *εναλλαγή* γραμμών.

   ii) Έστω $(x,y,x,w)\in\mathbb{R}^4$. Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του V αν και μόνο αν είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα ενός συνόλου γεννητόρων του V. Ως τέτοιο σύνολο ας πάρουμε τη βάση $\{(1,1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,1)\}$ που είδαμε πριν. Το εσωτερικό γινόμενο του (x,y,z,w) με καθένα από τα διανύσματα της βάσης είναι αντίστοιχα $x+y, y-z, z+w$. Συνεπώς πρέπει να βρούμε μια μη μηδενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x+y \quad\quad &= 0 \\ y-z \quad &= 0 \\ z+w &= 0. \end{aligned}$$

   Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $(x,y,z,w)=(w,-w,-w,w),\ w\in\mathbb{R}$. Άρα ένα διάνυσμα κάθετο σε κάθε διάνυσμα του V είναι για παράδειγμα το $(1,-1,-1,1)$.

2. Έστω $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ x & y \end{bmatrix}$. Για να είναι ορθογώνιος θα πρέπει

   $A\cdot A^T = I$ ή $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ x & y \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & x \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Από το γινόμενο πινάκων

   έχουμε

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}+\frac{4}{5} & \frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}} \\ \frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2x}{\sqrt{5}} & x^2+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ Οπότε θα πρέπει

$$\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}=0 \Rightarrow x=-2y \quad (1)$$

Από την $x^2+y^2=1 \Rightarrow (-2y)^2+y^2=1 \underset{(1)}{\Rightarrow} y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Οπότε από την (1) έχουμε $x=\mp\frac{2}{\sqrt{5}}$

Έχουμε λοιπόν 2 πίνακες τον $A_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ και τον $A_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Άσκηση 4 (10 μονάδες)

Έστω $\mathbb{R}_3[x]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ 3.

1. Αποδείξτε ότι το σύνολο $B=\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Να παρασταθεί το x^3 σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης B.

Λύση

1. Επειδή $\dim \mathbb{R}_3[x]=4$, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο Β είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Τότε

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d=0 \Rightarrow$

$a(x^3-3x^2+3x-1)+b(x^2-2x+1)+c(x-1)+d=0 \Rightarrow$

$ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x+(-a+b-c+d)=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a=0 \\ -3a+b=0 \\ 3a-2b+c=0 \\ -a+b-c+d=0. \end{cases}$$

Το σύστημα είναι τριγωνικό και εύκολα βλέπουμε ότι η μηδενική λύση είναι η μοναδική.

Σημείωση. Ένας άλλος τρόπος επίλυσης είναι να θέσουμε $x=1$ στη σχέση $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d=0$ οπότε $d=0$. Τότε παίρνουμε

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)=0 \Rightarrow a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$, οπότε θέτοντας πάλι $x-1$ παίρνουμε $c=0$, κοκ.

2. Έστω $x^3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$. Όπως πριν, το ισοδύναμο

σύστημα είναι το $\begin{cases} a = 1 \\ -3a + b = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 0. \end{cases}$

Λύνοντάς το βρίσκουμε $a = 1, b = 3, c = 3, d = 1$.

Στις ασκήσεις 5 και 6 αναφερόμαστε στο Κεφάλαιο 5: Γραμμικοί Μετασχηματισμοί.

Άσκηση 5 (12 μονάδες)

Εξετάστε ποιες από τις επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές και δικαιολογείστε την απάντησή σας.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x+1, 3y, y-x)$

   $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad g(x,y,z) = (2x - 3y + 4z)$

   $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(x,y) = (2x + y,\ x + 2y)$

2. Στο χώρο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τη κανονική βάση $e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$ και τη νέα βάση $t_1 = (1,-1),\ t_2 = (2,1)$. Να βρεθεί ο αντίστοιχος πίνακας αλλαγής βάσης, καθώς και οι νέες συντεταγμένες του σημείου (x,y) στη βάση $t_1,\ t_2$.

Υπόδειξη: Για το 2. βλ. σελίδα 97.

Λύση

1) Έστω $v_1 = (x_1, y_1),\qquad v_2 = (x_2, y_2)$

$f(v_1) = f(x_1, y_1) = (x_1 + 1, 3y_1, y_1 - x_1)$

$f(v_2) = f(x_2, y_2) = (x_2 + 1, 3y_2, y_2 - x_2)$

$$f(v_1 + v_2) = f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$= (x_1 + x_2 + 1, 3(y_1 + y_2), (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)) \neq$$
$$\neq (x_1 + 1, 3y_1, y_1 - x_1) + (x_2 + 1, 3y_2, y_2 - x_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

Αφού λοιπόν

$f(v_1 + v_2) \neq f(v_1) + f(v_2)$ η f δεν είναι γραμμική

Έστω $v_1 = (x_1, y_1, z_1),\qquad v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$g(v_1) = g(x_1, y_1, z_1) = (2x_1 - 3y_1 + 4z_1)$

$g(v_2) = g(x_2, y_2, z_2) = (2x_2 - 3y_2 + 4z_2)$

$$g(v_1 + v_2) = g((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = g(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$= (2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + 4(z_1 + z_2)) =$$
$$= (2x_1 - 3y_1 + 4z_1) + (2x_2 - 3y_2 + 4z_2) = g(v_1) + g(v_2)$$

$$g(\lambda v_1) = g(\lambda(x_1, y_1, z_1)) = g(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) =$$
$$= (2\lambda x_1 - 3\lambda y_1 + 4\lambda z_1) =$$
$$= \lambda g(v_1)$$

Αφού λοιπόν
$g(v_1+v_2)=g(v_1)+g(v_2)$ και $g(\lambda v_1)=\lambda g(v_1)$ η g είναι γραμμική

Έστω $v_1=(x_1,y_1)$, $v_2=(x_2,y_2)$

$$h(v_1)=h(x_1,y_1,z_1)=(2x_1+y_1,x_1+2y_1)$$

$$h(v_1)=h(x_1,y_1,z_1)=(2x_2+y_2,x_2+2y_2)$$

$$h(v_1+v_2)=h((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2))=h(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

$$=(2(x_1+x_2)+(y_1+y_2),x_1+x_2+2(y_1+y_2))=$$

$$=(2x_1+y_1,x_1+2y_1)+(2x_2+y_2,x_2+2y_2)=h(v_1)+h(v_2)$$

$$h(\lambda v_1)=h(\lambda(x_1,y_1))=h(\lambda x_1,\lambda y_1)=$$

$$=(2\lambda x_1+\lambda y_1,\lambda x_1+2\lambda y_1)=$$

$$=\lambda h(v_1)$$

Αφού λοιπόν
$h(v_1+v_2)=h(v_1)+h(v_2)$ και $h(\lambda v_1)=\lambda h(v_1)$ η h είναι γραμμική.

2) Πρώτα γράφουμε τα στοιχεία της νέας βάσης σαν γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της παλαιάς. Έχουμε

$$t_1=(1,-1)=e_1+(-1)e_2$$

$$t_1=(2,1)=2e_1+e_2.$$

Ορίζεται ο πίνακας A: $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$. Παίρνουμε τον ανάστροφό του

$P=A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$. Αυτός είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης. Βρίσκω τον αντίστροφό

του(πχ με τη μέθοδο Gauss ή με αυτή της σελίδας 35), $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

Οπότε οι νέες συντεταγμένες του σημείου (x,y) θα είναι:

$$P^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{x-2y}{3}\\ \frac{x+y}{3}\end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6 (10 μονάδες)
Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z)$.

1. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του πυρήνα της f.
2. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση της εικόνας της f.

Λύση

Έχουμε

$$f(x,y,z) = (x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z)$$
$$= x(1,0,1) + y(2,1,1) + z(-1,1,-2)$$

Άρα η εικόνα παράγεται από τα διανύσματα

$(1,0,1),(2,1,1),(-1,1,-2)$. Για να βρούμε τη διάστασή της εικόνας (Imf) θα πάρουμε τον πίνακα με γραμμές τα διανύσματα αυτά και εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών να βρούμε τα γραμμικώς ανεξάρτητα. Τα γραμμικώς ανεξάρτητα αυτά διανύσματα θα μας δώσουν τη βάση του Im *f* (εικόνας).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Gamma_3 \to \Gamma_1 + \Gamma_3, \Gamma_2 \to (-2)\Gamma_1 + \Gamma_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Gamma_3 \to (-1)\Gamma_2 + \Gamma_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $\dim \operatorname{Im} f = 2$ Οπότε μια βάση της εικόνας της f είναι $\operatorname{Im} f = \{(1,0,1),(0,1,-1)\}$

Από τον τύπο σελ 91 $\dim \Delta = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(Kerf)$ έχουμε ότι

$\dim(\ker f) = 3 - 2 = 1$ διότι η διάσταση του χώρου είναι 3

Για να βρούμε μια βάση του $\ker f$ πρέπει να βρούμε τη λύση του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Από την 2^{η} $y = -z$ αν $z = t$ τότε $y = -t$ και από την 1^{η} $x = 3t$

Άρα μια βάση της $\ker f = \{(3t, -t, t)\} = t(3,-1,1)$ $\qquad \ker f = (3,-1,1)$

Οι επόμενες ασκήσεις αναφέρονται στο Κεφάλαιο 6: Χαρακτηριστικά Μεγέθη. Οι έννοιες της ιδιοτιμής, του ιδιοδιανύσματος και της διαγωνοποίησης πινάκων είναι θεμελιώδεις και έχουν πολλές εφαρμογές.

Άσκηση 7 (18 μονάδες)

Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

1. Δείξτε ότι ο πίνακας *A* διαγωνοποιείται και εκτελέστε την διαγωνοποίησή του.

2. Δείξτε ότι ο πίνακας *B* δεν διαγωνοποιείται.
3. Να υπολογιστεί ο A^n και με βάση το αποτέλεσμα αυτό να υπολογίστε το $I + A + A^2 + \ldots + A^{2004}$.

Λύση

Σύμφωνα με τη θεωρία και τα παραδείγματα της παραγράφου 6.3 σελ 115 έχουμε:

1. Για τον Α το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1) + 3\cdot 0 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

Οπότε έχουμε ιδιοτιμές 1 και -1. (Σημείωση: Επειδή ο πίνακας είναι τριγωνικός, θα μπορούσαμε να πούμε άμεσα ότι οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία).

Για $\lambda = 1$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$(1\cdot I - A)\cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0$ και το x_2 παίρνει αυθαίρετες τιμές οπότε για την ιδιοτιμή 1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα $\mu\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mu \neq 0.$

Για $\lambda = 1$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$(-1\cdot I - A)\cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{3}x_2$ και το x_2 παίρνει αυθαίρετες τιμές οπότε για την ιδιοτιμή -1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα $\mu\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \mu \neq 0.$

Η ορίζουσα του πίνακα $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι διαφορετική από το μηδέν (-2/3) οπότε οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα (δείτε σελίδα 108, ιδιότητα 4).

Η διαγωνοποίηση του *A* επιτυγχάνεται με τους πίνακες

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ όπου } P^{-1}AP = D.$$

2. Για τον Β το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1) + 3\cdot 0 = (\lambda-1)^2$$

Οπότε έχουμε ιδιοτιμή διπλή 1.

Για $\lambda = 1$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$(1\cdot I - B)\cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0$ και το x_2 παίρνει αυθαίρετες τιμές οπότε για την ιδιοτιμή -1 έχουμε ιδιοδιάνυσμα $\mu\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ οπότε ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται δεν διαγωνοποιείται γιατί η διάσταση του ιδιοχώρου της διπλής ιδιοτιμής είναι 1.

3. Έχουμε ότι (σελ 115) $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

όπου $D^k = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix}$ οπότε για n άρτιο $D^n = I$ και για n περιττό $D^n = D$

Συνεπώς

Για n άρτιο $A^n = PIP^{-1} = I$

Για n περιττό $A^n = PDP^{-1} = A$

Οπότε

$$I + A + A^2 + ... + A^{2004} = 1002A + 1003I$$

$$= 1002\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 1003I = \begin{pmatrix} -1002+1003 & 0 \\ 3\cdot 1002 & 1002+1003 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3006 & 2005 \end{pmatrix}$$

> *Σημείωση* Για τον υπολογισμό του A^n μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον εξής συλλογισμό. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $\lambda^2 - 1$. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε $A^2 - I = 0$, δηλαδή $A^2 = 1$.

Άσκηση 8 (14 μονάδες)

Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.
2. Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^T AP$ να είναι διαγώνιος.

Υπόδειξη: Για το 2. βλ Παράδειγμα 6.12.

Λύση

1. Σύμφωνα με τη θεωρία της παραγράφου 6.1 σελ 103 το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = ((\lambda-3)^2 - 2\cdot 2)(\lambda-5) =$$

$$(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4)(\lambda-5) = (\lambda^2 - 6\lambda + 5)(\lambda-5) = (\lambda-5)^2(\lambda-1)$$

Οπότε έχουμε δύο ιδιοτιμές την $\lambda = 1$ και τη διπλή $\lambda = 5$.

Για $\lambda = 1$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(1\cdot I - A)\cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 2 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσμτα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = 5$ τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(1 \cdot I - A) \cdot \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-3 & 2 & 0 \\ 2 & 5-3 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 \ \alpha\upsilon\theta\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\tau o \end{cases}$$

Οπότε τα ιδιοδιανύσμτα που αντιστοιχούν σε αυτήν την ιδιοτιμή ο ιδιοχώρος παράγεται από τα $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής είναι τα $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

2. Ο πίνακας A είναι συμμετρικός, σύμφωνα με το Φασματικό Θεώρημα σελ. 117 είναι ορθοκανονικά όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα. Θα ακολουθήσουμε την διαδικασία του παραδείγματος 6.12 σελίδα 117-118 στο οποίο θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt σελ. 78-79.

   Από το ερώτημα 1 έχουμε ότι $\eta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Σύμφωνα με το θεώρημα 4.4 σελ. 78 έχουμε ότι

   $\eta_1 = \xi_1$

   $\eta_2 \cdot \xi_1 = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \xi_1 \cdot \xi_1 = (-1)^2 + 1^2 + 0 = 2$ οπότε

   $$\xi_2 = \eta_2 - \frac{\eta_2 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 = \eta_2$$

   $\eta_3 \cdot \xi_1 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0, \xi_2 \cdot \xi_2 = 0^2 + 0^2 + 1 = 1, \eta_3 \cdot \xi_2 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ οπότε

   $$\xi_3 = \eta_3 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_1}{\xi_1 \cdot \xi_1} \xi_1 - \frac{\eta_3 \cdot \xi_2}{\xi_2 \cdot \xi_2} \xi_1 = \eta_3 .$$

   Συμπεραίνουμε ότι $\xi_1 = \eta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_3 = \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   Επίσης $\|\xi_1\| = \sqrt{\xi_1 \cdot \xi_1} = \sqrt{2}, \|\xi_2\| = \sqrt{\xi_2 \cdot \xi_2} = \sqrt{1} = 1, \|\xi_3\| = \sqrt{\xi_3 \cdot \xi_3} = \sqrt{2}$

   Ο πίνακας P έχει ως στήλες τα διανύσματα $\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}$.

Άρα $P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^T=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ και $D=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ώστε

$P^T AP = D.$

Άσκηση 9 (10 μονάδες επί πλέον)

Η άσκηση που ακολουθεί είναι προαιρετική και μπορεί να λυθεί στον υπολογιστή σας με τη βοήθεια του MATLAB ή του προγράμματος «κλώνου» του Octave. Η λύση της άσκησης μπορεί να γίνει με τις ίδιες εντολές και στα δύο προγράμματα.

Το MATLAB είναι εμπορικό προϊόν και δεν διατίθεται δωρεάν. Η Octave διατίθεται δωρεάν και μπορεί να κατέβει από το www.octave.org και στο link Downloads ή απευθείας από το www.octave.org/download.html Από εκεί μπορείτε να οδηγηθείτε εύκολα στην ιστοσελίδα από όπου μπορείτε να την κατεβάσετε. Η έκδοση που θα πρέπει να κατεβάσετε είναι binary για windows και το αρχείο octave-2.1.50a-inst.exe με μέγεθος περίπου 7.5 MB. Η εγκατάσταση γίνεται απλά με διπλό πάτημα του αρχείου.

Μπορείτε να συμβουλευθείτε το Κεφάλαιο 7 του βιβλίου της Γραμμικής Άλγεβρας. Επίσης, στην ιστοσελίδα της θεματικής μας ενότητας θα αναρτηθεί υλικό σχετικό με το MATLAB. Βοήθεια για τη χρήση μίας εντολής, π.χ. της inv( ) μπορεί να βρεθεί με τη χρήση της εντολής

    help inv

Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσετε MATLAB η μεταφορά των εντολών σας αλλά και των αποτελεσμάτων σε κειμενογράφο γίνεται εύκολα με αντιγραφή και επικόλληση. Για το Octave, που δεν είναι φτιαγμένο ειδικά για Microsoft Windows, προτείνουμε την εξής διαδικασία:

Δημιουργείστε ένα φάκελο στον σκληρό δίσκο του υπολογιστή σας με όνομα της επιλογής σας π.χ. workplace. Αν ο σκληρός σας δίσκος είναι ο C: εκτελέστε στην octave την εντολή

    cd c:\workplace

Μετά την εκτέλεση της εντολής

    diary namefile.txt

ότι πληκτρολογείτε και ότι εμφανίζεται στην Octave γράφεται στο αρχείο namefile.txt. Φυσικά μπορείτε να διαλέξετε ότι όνομα αρχείου θέλετε αλλά καλό είναι να βάλετε την επέκταση txt ώστε το αρχείο να μπορεί να ανοιχτεί με έναν editor όπως το notepad. Για να σταματήσει η καταγραφή των εντολών και των αποτελεσμάτων εκτελέστε την εντολή:

    diary off

Στη άσκηση που ακολουθεί θα παραδώσετε ως λύση τόσο τις εντολές που πληκτρολογήσατε όσο και τα αποτελέσματα που σας επέστρεψε το πρόγραμμα. ¨οπου χρειάζεται συμπληρώστε τα σχόλιά σας.

Ορίστε στο MATLAB ή στην Octave τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

1. Με τη χρήση της συνάρτησης poly( ) να βρεθούν οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα. Στη συνέχεια, με τη χρήση της εντολής roots( ) να υπολογιστούν οι ρίζες του δηλαδή, οι ιδιοτιμές του πίνακα.
2. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα με τη χρήση της συνάρτησης eig( ). Τι συμπέρασμα εξάγεται ως προς την διαγωνοποίηση του πίνακα;
3. Με βάση τα αποτελέσματα της eig( ) και τη χρήση της εντολής inv( ) που επιστρέφει τον αντίστροφο πίνακα, να υπολογιστεί ο πίνακας $B = \mathrm{A} - P \cdot D \cdot P^{-1}$. Είναι το αποτέλεσμα το αναμενόμενο;

Λύση

Στο MATLAB ή στην Octave ορίζω τον πίνακα της άσκησης πληκτρολογώντας την ακόλουθη εντολή.

Προσοχή, τόσο MATLAB όσο και το Octave είναι case sensitive και η μεταβλητή a είναι διαφορετική από τη μεταβλητή A. Επίσης δεν πληκτρολογούμε την προτροπή >> που εμφανίζει το περιβάλλον.

>> **a=[4 6 0;-3 -5 0;-3 -6 -5]**

Το περιβάλλον μας επιστρέφει

a =

```
   4    6    0
  -3   -5    0
  -3   -6   -5
```

Με τη χρήση της poly( ) μας δίνονται οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που στην περίπτωσή μας είναι το $p(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

>> **p=poly(a)**

p =

```
   1    6    3   -10
```

Η roots( ) μας επιστρέφει τις ρίζες του που είναι οι ιδιοτιμές του.

>> **roots(p)**

ans =

```
  -5.00000
  -2.00000
   1.00000
```

2. Η εντολή eig( ) μπορεί να υπολογίζει τόσο τις ιδιοτιμές αλλά και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Πληκτρολογώ την εντολή στην ακόλουθη μορφή:

>> **[p,d]=eig(a)**

p =

```
   0.00000   0.57735  -0.89443
   0.00000  -0.57735   0.44721
   1.00000   0.57735   0.00000
```

d =

-5	**0**	**0**
0	**-2**	**0**
0	**0**	**1**

Ο πίνακας d είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία την ιδιοτιμές του πίνακα. Ο πίνακας p περιέχει μία βάση του ιδιοχώρου. Κάθε στήλη του αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή της αντίστοιχης στήλης του d. Ο πίνακας έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές με ιδιοδιανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε διαγωνοποιείται. Η ορίζουσα του πίνακα p είναι διαφορετική από το μηδέν οπότε οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα (δείτε σελίδα 108, ιδιότητα 4). Η det( ) υπολογίζει την ορίζουσα ενός πίνακα.

>> **det(p)**

ans =

-0.25819888974716

Παρατήρηση: Η eig( ) υπολογίζει τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα με προσεγγιστικές μεθόδους. Για αυτό το λόγο μπορούμε να πάρουμε ως αποτελέσματα τιμές που προσεγγίζουν τις τιμές που υπολογίζουμε με το χέρι.

3. Ως b φυσικά είναι ο μηδενικός πίνακας ή λόγω σφαλμάτων της προσέγγισης και της αριθμητικής του υπολογιστή, ένας πίνακας τα στοιχεία του οποίου που προσεγγίζουν με μεγάλη ακρίβεια τα στοιχεία του μηδενικού πίνακα.

>> **b=a-p*d*inv(p)**

b =

0	**0**	**0**
0	**0**	**0**
0	**0**	**0**
