ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

<u>ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ</u>

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Ημερομηνία αποστολής στον φοιτητή: 3 Ιανουαρίου 2005.
Τελική ημερομηνία αποστολής από τον φοιτητή: 8 Φεβρουαρίου 2005

Οι ασκήσεις της Εργασίας αυτής βασίζονται στην ύλη των Ενοτήτων 1 – 4 του συγγράμματος «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Άσκηση 1

i. Κάνετε πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις και γράψτε το αποτέλεσμα στη μορφή a + ib, όπου a, b πραγματικοί αριθμοί:

α. $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$ **β.** $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{32}$ (3 μονάδες)

ii. Βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $x^6+64i=0$, ως σημεία στο μιγαδικό επίπεδο. Τι σχήμα φτιάχνουν τα σημεία αυτά αν ενωθούν μεταξύ τους διαδοχικά με ευθύγραμμα τμήματα; (4 μονάδες)

iii. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z=x+iy$ που ικανοποιούν ταυτόχρονα:

$$\left|z-(1+i)\right|=2 \text{ και } \left|z-(1-i)\right|=2$$ (3 μονάδες)

και σχολιάστε την γεωμετρική ερμηνεία τους.

Απάντηση.

i. α. $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{2}{1-i^2}=\dfrac{2}{2}=1$

β. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{32}=\left(\dfrac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^{32}=i^{32}=\left(i^4\right)^8=1$

ii. $x^6+64i=0 \;\Rightarrow\; x^6+2^6 i=0 \;\Rightarrow\; x^6=2^6(-i)=2^6 e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$$\Rightarrow\; x_k=2e^{i\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)/6}=2e^{i(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{4})} \quad \text{για} \quad k=0,1,2,3,4,5,$$

δηλαδή,

$$x_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 1.4142 + 1.4142i$$

$$x_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -0.5176 + 1.9318i$$

$$x_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -1.9318 + 0.5176i$$

$$x_3 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -1.4142 - 1.4142i$$

$$x_4 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 0.5176 - 1.9318i$$

$$x_5 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1.9318 - 0.5176i$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τις ταυτότητες:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos A - \sin A \sin B \quad , \quad \sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

Αν αναπαραστήσουμε τα σημεία αυτά, x_0 , ..., x_5 στο μιγαδικό επίπεδο θα έχουμε το σχήμα ενός κανονικού εξαγώνου.

iii. Έστω $z = x + iy$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε θα έχουμε :

$$\left|z - (1+i)\right| = 2 \Rightarrow \left|(x-1) + i(y-1)\right| = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \qquad (1)$$

Όμοια

$$\left|z - (1-i)\right| = 2 \Rightarrow \left|(x-1) + i(y+1)\right| = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \qquad (2)$$

Αν αφαιρέσουμε από την (2) την (1) θα έχουμε

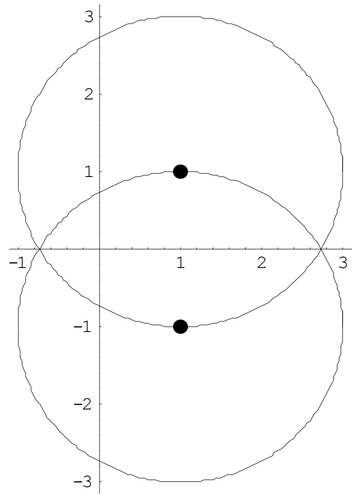
$$(y+1)^2 - (y-1)^2 = 0 \Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow y = 0$$

(3)

Αντικαθιστώντας την (3) στην εξίσωση (1) έχουμε :

$$(x-1)^2 + (0-1)^2 = 4 \Rightarrow (x-1)^2 = 3 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

Η εξίσωση (1) παριστάνει τα σημεία περιφέρειας κύκλου με κέντρο το σημείο (1,1) και ακτίνα μήκους 2, στη δε εξίσωση (2) ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο (1,-1) και ακτίνα 2. Τα σημεία τομής των παραπάνω κύκλων είναι η κοινή λύση των (1) και (2).



Άσκηση 2

i. Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών :

α. $x_n = \dfrac{2^n + 3^n}{4^n + 2^n}$ **β.** $y_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2 + n - 1}}{n - \sqrt{n^2 - n + 1}}$, $n > 1$ **γ.** $z_n = \dfrac{n}{2^n}$ (9 μονάδες)

(Υπόδειξη: Για το **β.** βλ. Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2β, σελ. 26 και για το **γ.** , βλ. και το Παράδειγμα στη σελ. 25).

ii. Ένας ορισμός συγκλίνουσας ακολουθίας είναι και ο εξής: Μία ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε ένα πεπερασμένο όριο, α, αν, για κάθε ε > 0, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n > n_0$, ισχύει $|\, \alpha_n - \alpha \,| < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό αυτό εξετάστε αν οι κάτωθι ακολουθίες συγκλίνουν και αν ναι σε ποιο όριο:

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \quad , \quad b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$ (4 μονάδες)

Απάντηση.

i. α. $$x_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n + 2^n} = \frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{4}\right)^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{4}\right)^n} = \frac{0+0}{1+0} = 0,$$

διότι για $|\alpha| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

β. Επειδή

$$y_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + n - 1}}{n - \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{\dfrac{n^2 - (n^2 + n - 1)}{n + \sqrt{n^2 + n - 1}}}{\dfrac{n^2 - (n^2 - n + 1)}{n + \sqrt{n^2 - n + 1}}} = -\frac{n + \sqrt{n^2 - n + 1}}{n + \sqrt{n^2 + n - 1}} = -\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}$$

είναι $\lim_{n\to\infty} y_n = -\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} = -\dfrac{2}{2} = -1$.

γ. Παρατηρούμε πρώτα ότι $n < \left(3/2\right)^n$, όπως αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή: Η ανισότητα ισχύει για n = 1, 2. Με την υπόθεση ότι ισχύει για n = k, δηλαδή $k < \left(3/2\right)^k$, τότε έχουμε $(3/2)k < \left(3/2\right)^{k+1}$ και επειδή $k+1 \le (3/2)k$, $k \ge 2$, έχουμε ότι η ανισότητα ισχύει για n = k+1, και άρα για κάθε n. Αυτό σημαίνει ότι

$\dfrac{(3/2)^n}{2^n} > \dfrac{n}{2^n} > 0$. Όμως η ακολουθία $\lim_{n\to\infty}(3/4)^n = 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι και

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0$.

ii. Επειδή $\left|a_n - 1\right| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, καθόσον $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ έχουμε :

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, ώστε $\forall\ n > n_0 \Rightarrow \left|a_n - 1\right| < \varepsilon$.

Η b_n έχει δύο υπακολουθίες, για n = 2k και n = 2k+1, που σύμφωνα με τον ορισμό, συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια. Συγκεκριμένα $\lim_{k\to\infty} b_{2k} = 1$, $\lim_{k\to\infty} b_{2k-1} = -1$. Επειδή όμως το όριο πρέπει να είναι μοναδικό, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία b_n **δεν** συγκλίνει.

Άσκηση 3

i. Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές :

α. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{n^2+1}$ **β.** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$ **γ.** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi\alpha)}{n^2+b^2}$ (9 μονάδες)

ii. Δεχόμαστε το ακόλουθο **Θεώρημα (Κριτήριο Leibniz):** *Αν η ακολουθία των θετικών όρων* a_n *έχει όριο το μηδέν και είναι φθίνουσα , τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.*

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών

α. $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ **β.** $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(n^2+1)}{3n^2+2}$ (6 μονάδες)

Απάντηση.

i. α. Σύμφωνα με το κριτήριο της σελ. 36 του βιβλίου, παρατηρούμε ότι ισχύει η ανισότητα: $\frac{1}{2n} < \frac{n-1}{n^2+1}$ για $n \geq 3$.Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1}$ αποκλίνει.

β. Εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου έχουμε: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty > 1$

Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ αποκλίνει.

γ. Επειδή $\left|\frac{\cos(n\pi\alpha)}{n^2+b^2}\right| \leq \frac{1}{n^2+b^2}$, η δε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+b^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης συμπεραίνουμε, ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi\alpha)}{n^2+b^2}$ συγκλίνει.

ii. α. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ και $\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow n^2+n \geq 1$, η οποία είναι αληθής για όλες τις τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$, ισχύουν οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibniz, και συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$ συγκλίνει.

β. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2} = \frac{1}{3} \neq 0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n^2+1)}{3n^2+2}$ **δεν** συγκλίνει.

Άσκηση 4

i. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α. Είναι δυνατόν να συγκλίνουν ταυτόχρονα οι αριθμητικές σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$, όπου α_n μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί; (2 μονάδες)

β. Αν οι αριθμητικές σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ συγκλίνουν, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ συγκλίνει; (2 μονάδες)

ii. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα :

α. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ **β.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 2^{n-1}+2\cdot 3^{n+1}}{5^n}$ (6 μονάδες)

Απάντηση.

i. **α.** Δεν είναι δυνατόν οι σειρές να συγκλίνουν ταυτόχρονα διότι αν $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ οπότε $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ αποκλίνει.

Όμοια, αν $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$, άρα $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει.

β. Επειδή $|a_n\beta_n|\le\frac{1}{2}\alpha_n^2+\frac{1}{2}\beta_n^2$ και οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$ συγκλίνουν, συμπεραίνουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\beta_n$ συγκλίνει απολύτως άρα και απλώς.

ii. **α.** Επειδή $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}$, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$. Τότε $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}$, δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}.$$

β. Έχουμε :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 2^{n-1}+2\cdot 3^{n+1}}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n+6\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+6\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{2/5}{1-2/5}+6\cdot\frac{3/5}{1-3/5}=1+9=10$$

καθόσον οι σειρές είναι γεωμετρικές.

Άσκηση 5

i. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x)=\sqrt{1-x} \qquad \text{και} \qquad g(x)=2x-x^2$$

Προσδιορίστε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών τους. Ελέγξετε ως προς τη μονοτονία τις παραπάνω συναρτήσεις και βρείτε τις αντιστρόφους τους όπου ορίζονται. Υπολογίστε τη σύνθεση των συναρτήσεων $f\circ g$ και $g\circ f$, όπου αυτή ορίζεται. (8 μονάδες)

ii. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, στην περίπτωση που αυτά υπάρχουν:

α. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-x+1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-x|}{-5x^2+4x+1}$ **γ.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\sin(\dfrac{2}{x})$ (6 μονάδες)

Απάντηση

i. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού $\{x\in\mathbb{R}:\ x\le 1\}$. Αν $y=\sqrt{1-x}\ \Rightarrow\ x=1-y^2\le 1\ \Rightarrow\ -y^2\le 0\ \Rightarrow\ y\in\mathbb{R}$ και επειδή $y=\sqrt{1-x}\ge 0$, το πεδίο τιμών είναι το διάστημα $[0,\infty)$.

Για $x_1<x_2\le 1\ \Rightarrow\ -x_1>-x_2\ \Rightarrow\ \sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}\ \Rightarrow\ f(x_1)>f(x_2)$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, στο $(-\infty,1]$. Επειδή είναι γνήσια μονότονη, υπάρχει η $f^{-1}(x)$, η οποία είναι $f^{-1}(x)=1-x^2$.

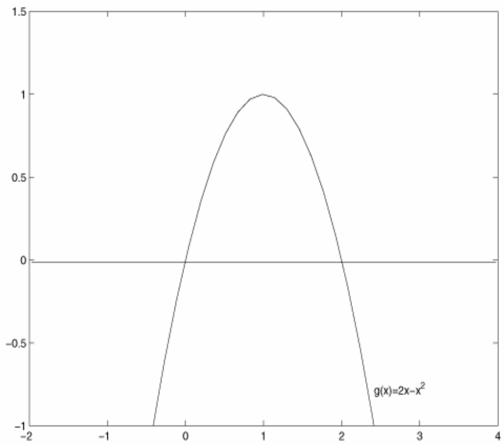
Το πεδίο ορισμού της $g(x)=2x-x^2$ είναι το $\mathbb{R}$, και από

$y=2x-x^2\Rightarrow x^2-2x+y=0\quad (1)$,

βρίσκουμε από τη σχέση

$$\Delta\ge 0\Rightarrow 1-y\ge 0\Rightarrow y\le 1,$$

συνεπώς πεδίο τιμών της $g(x)$ είναι το $(-\infty,1]$, (βλέπε διπλανό σχήμα).



Για $x_1<x_2\le 1$ έχουμε

$$g(x_1)-g(x_2)=\left(2x_1-x_1^2\right)-\left(2x_2-x_2^2\right)=(x_1-x_2)(-x_1-x_2+2)<0,$$

δηλαδή η $g(x)$ είναι γνήσια αύξουσα, ενώ για $1\le x_1<x_2$, επειδή $g(x_1)-g(x_2)=(x_1-x_2)(-x_1-x_2+2)>0$, η $g(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα. Επιπλέον οι ρίζες της (1) είναι $x=1\pm\sqrt{1-y}$, οπότε έχουμε για τον περιορισμό της $g(x)$ στο διάστημα $(-\infty,1]$, η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $g^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x}$ ενώ για τον περιορισμό της $g(x)$ στο διάστημα $[1,\infty)$ η αντίστροφη συνάρτηση είναι $g^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}$.

Σημειώστε ότι

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\sqrt{1-2x+x^2}=|x-1|$$

και

$$\left(g\circ f\right)\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)=2\sqrt{1-x}-(1-x)=x-1+2\sqrt{1-x}.$$

ii. **α.** Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή, έχουμε

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-x+1}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+x-1)}{-x(x-3)}=-\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+x-1}{x}=-\frac{4}{3}$$

β. $$\lim_{x\to 1}\frac{\left|x^3-x\right|}{-5x^2+4x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x|\cdot\left|x^2-1\right|}{-(5x+1)(x-1)}\quad=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+1)}{-(5x+1)}\cdot\frac{|x-1|}{x-1}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ δεν υπάρχει καθώς τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}=-1\neq\lim\limits_{x\to 1^{+-}}\dfrac{|x-1|}{x-1}=1$

δηλαδή δεν υπάρχει το όριο, αφού αυτό δεν είναι μοναδικό.

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\sin(\dfrac{2}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cdot\dfrac{\sin(\frac{2}{x})}{\frac{2}{x}}=2$, καθόσον $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\sin\omega}{\omega}=1$.

Άσκηση 6

i. Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών a,b ώστε :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b\right)=2$$ (7 μονάδες)

ii. Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{ax+b\sqrt{x}-2}{x-1} & x>1\\[2ex] -\sqrt{x^2+3}+x-1 & x\leq 1\end{cases}$$

Για ποιες τιμές των a,b η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x=1$; (7 μονάδες)

Απάντηση.

i. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2-\left(ax+b\right)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+ax+b}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-a^2\right)+2x\left(1-ab\right)+2-b^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+ax+b}=2$$

Επειδή για $x\to\infty$, το παραπάνω όριο είναι πεπερασμένος αριθμός, πρέπει

$a^2=1$ και $\dfrac{2(1-ab)}{1+a}=2$, όπου $a+1\neq 0$. Για $a=1 \Rightarrow b=-1$.

Η $a=-1$ απορρίπτεται.

ii. Από τον ορισμό της συνάρτησης είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\sqrt{x^2+3}+x-1\right)=-2$. Για να είναι συνεχής στο $x=1$, πρέπει επιπλέον $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b\sqrt{x}-2}{x-1}=-2$.

Επειδή το όριο είναι πεπερασμένος αριθμός, ο αριθμητής θα πρέπει να μηδενίζεται για $x=1$, δηλαδή, $a+b=2 \quad (1)$. Τότε

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+(2-a)\sqrt{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(a\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(a\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+1}=\frac{a+2}{2}=-2$$

Συνεπώς $a=-6$, και από την (1) έχουμε $b=8$.

Άσκηση 7

i. Έστω A πίνακας 2×2, τέτοιος ώστε το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του να ισούται με 1. Αν I ο μοναδιαίος πίνακας, αποδείξτε ότι ο πίνακας A **δεν είναι** αντιστρέψιμος, όταν $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\det[xA+(1-x)I]}{1-x}$ είναι πραγματικός αριθμός. (7 μονάδες)

ii. Έστω A πίνακας 3×3, τέτοιος ώστε $A^2-5A+4I=0$ και η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\det[x(A-2I)]-x^3-8}{x-2} &, \quad x\neq 2\\ a &, \quad x=2\end{cases}.$$

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=2$, να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα A και την τιμή της συνάρτησης $f(2)=a$. (7 μονάδες)

Απάντηση.

i. Για να δείξουμε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, αρκεί να δείξουμε ότι detA = 0. Επειδή ο A είναι 2×2 πίνακας, έχουμε

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^2-(trA)\lambda+\det A=\lambda^2-\lambda+\det A\ ,$$

αφού το άθροισμα των διαγωνίων όρων είναι 1, δηλαδή trA = 1 (Γραμμική Άλγεβρα, σελ. 132, άσκ. 1.6(1)). Τότε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\det\left(xA+(1-x)I\right)}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\det\left(A+\frac{1-x}{x}I\right)}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(-1)^2x^2\det\left(\frac{x-1}{x}I-A\right)}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left[\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-\frac{x-1}{x}+\det A\right]}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\det A-x(x-1)+(x-1)^2}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\det A-x+1}{1-x}$$

Αν $\det A\neq 0$, τότε το όριο αυτό είναι - ∞. Για να είναι επομένως πραγματικός αριθμός πρέπει $\det A=0$.

ii. Για την συνάρτηση $f(x)$ έχουμε

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\det[x(A-2I)]-x^3-8}{x-2}\ , & x\neq 2\\ a\ , & x=2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x^3\left(\det(A-2I)-1\right)-2^3}{x-2}\ , & x\neq 2\\ a\ , & x=2\end{cases}$$

Επομένως, για να είναι συνεχής στο σημείο $x=2$, θα πρέπει ο αριθμητής του ως άνω κλάσματος να δέχεται το x – 2 ως παράγοντα. Αυτό όμως συμβαίνει μόνον όταν $\det(A-2I)-1=1$. Στην περίπτωση αυτή $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$, δηλαδή $a=12$. Επιπλέον, από την ισότητα $A^2-5A+4I=0$ έχουμε

$$\left(A-2I\right)^2=A\ \Rightarrow\left[\det\left(A-2I\right)\right]^2=\det A\ \Rightarrow\ \det A=2^2=4\,.$$

Άσκηση 8

i. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου, να βρεθούν όλες οι τιμές του *x* για τις οποίες συγκλίνουν οι σειρές:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{n-1}}{n\cdot 6^n}\qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}n^2\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^n$$ (5 μονάδες)

ii. Έστω η πραγματική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε πρώτα ότι $f(nx)=nf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και n **φυσικό αριθμό**. Κατόπιν δείξτε ότι $f(0)=0$ και εξηγείστε γιατί $f(nx)=nf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και n **ακέραιο αριθμό**. (5 μονάδες)

Απάντηση.

i. **α.** Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+1)^n}{6^{n+1}\cdot(n+1)}}{\dfrac{(x+1)^{n-1}}{6^n\cdot n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{6^n\cdot n\cdot(x+1)^n}{6^{n+1}\cdot(n+1)\cdot(x+1)^{n-1}}=|x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6\cdot(n+1)}=\frac{|x+1|}{6}.$$

Άρα, αν $\frac{|x+1|}{6}<1 \Rightarrow |x+1|<6 \Rightarrow -7<x<5$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{n-1}}{n\cdot 6^n}$ συγκλίνει.

Για $x=5$, προκύπτει η αριθμητική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6n}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει, όπως η αντίστοιχη αρμονική.

Για $x=-7$, έχουμε $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-6)^{n-1}}{n\cdot 6^n}=-\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει, γιατί είναι η εναλλάσσουσα αρμονική, (ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου Leibniz).

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει όταν $x\in[-7,5)$.

β. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\left|\frac{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{n}}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

.

Άρα, αν $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1 \Rightarrow -1<\frac{1-x}{1+x}<1 \Rightarrow 0<\frac{2}{x+1}<2 \Rightarrow x>0$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^n$ συγκλίνει.

Για $x=0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2$ αποκλίνει, όπως η αντίστοιχη p-σειρά ($p=-2$).

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει όταν $x\in(0,\infty)$.

ii. Για $x=y$ έχουμε

$$f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x),$$

$$f(3x)=f(2x+x)=f(2x)+f(x)=3f(x),$$

και γενικά $f(nx)=nf(x)$, όπου n φυσικός αριθμός (ευκολη απόδειξη με επαγωγή).

Επειδή $f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$, έχουμε $f(0)=0$.

Επιπλέον $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$, δηλαδή, $f(-x)=-f(x)$.

Συνεπώς $f(-2x) = f\left((-x)+(-x)\right) = f(-x)+f(-x) = 2f(-x) = -2f(x)$,

$f(-3x) = f\left(-2x+(-x)\right) = f(-2x)+f(-x) = -3f(x)$ και γενικά $f(nx) = nf(x)$

για κάθε n ακέραιο αριθμό.

Άσκηση 9

i. Με τη βοήθεια του προγράμματος *του MATLAB ή της Octave*, υπολογίστε τους 20 πρώτους όρους της ακολουθίας $a_{n+1} = \dfrac{2a_n+3}{a_n+4}$ με $a_0 = 5$. Τι συμπεραίνετε για τη σύγκλιση της ακολουθίας καθώς n → ∞; Στη συνέχεια σχεδιάστε τη γραφική παράσταση των σημείων αυτών. (5 μονάδες)

Υπόδειξη: Για να υπολογίσετε τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας, ορίστε πρώτα ένα διάνυσμα με ένα στοιχείο το $a_0 = 2$, ως εξής:

>>akol=[2]

Στη συνέχεια με τη χρήση της εντολής επανάληψης, for ,δημιουργείστε τους επόμενους όρους της ακολουθίας και προσθέστε τους στο τέλος του διανύσματος akol. Αυτό μπορεί να γίνει με την εντολή

>> for n=2:20,akol=[akol;(2*akol(n-1)+3)/(akol(n-1)+4)];end

Μετά, δείτε τους όρους της ακολουθίας με την εντολή

>>akol

αφού πρώτα εκτελέσετε την εντολή

>> format long

ώστε να βλέπετε τα στοιχεία με δεκαέξι ψηφία.

Στη συνέχεια με την εντολή plot κάντε το γράφημα των όρων.

>> plot(akol)

Για να αντιγράψετε το γράφημα από την Octave στο Word, στο παράθυρο με το γράφημα κάνετε δεξί κλικ στη λωρίδα τίτλου και από την επιλογή Options επιλέγετε Copy to Clipboard. Στη συνέχεια κάνετε Paste στο Word. Στο *MATLAB* είναι πιο απλό μιας και υπάρχει διαθέσιμη επιλογή στα μενού του παράθυρου του γραφήματος.

Απάντηση.

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω οδηγίες :

α) Δημιουργούμε τον πρώτο όρο της ακολουθίας :

>> akol=[5];

β) Δημιουργούμε τους υπόλοιπους 19 όρους της ακολουθίας (χωρίς να τους εκτυπώσουμε) :

>>for n=2:20,akol=[akol;(2*akol(n-1)+3)/(akol(n-1)+4)];end

γ) Εκτελούμε την εντολή format long για να δούμε τους όρους που θα ακολουθήσουν με 16 δεκαδικά ψηφία.

>> format long

δ) Εμφανίζω τους όρους της ακολουθίας :

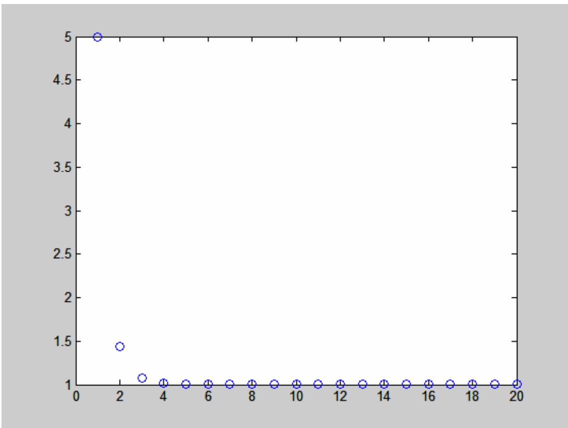
>> akol

akol =

5.00000000000000
1.44444444444444
1.08163265306122
1.01606425702811
1.00320256204964
1.00064010241639
1.00012800409613
1.00002560016384
1.00000512000655
1.00000102400026
1.00000020480001
1.00000004096000
1.00000000819200
1.00000000163840
1.00000000032768
1.00000000006554
1.00000000001311
1.00000000000262
1.00000000000052
1.00000000000010

Παρατηρείστε ότι οι όροι της ακολουθίας συγκλίνουν στο 1.

ε) Σχεδιάζω τους όρους της ακολουθίας με την plot()
```
>> plot(akol,'o')
```



ii. Με τη βοήθεια *του MATLAB ή της Octave* , υπολογίστε τους 20 πρώτους όρους της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων

$$s_1 = \frac{1}{1^2}\ ,\quad s_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2},\quad s_3 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\quad \ldots\ldots,\quad s_{20} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{20^2}$$

και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση των όρων αυτών. Τι συμπεραίνετε για την σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; Εργασθείτε όμοια για τα μερικά αθροίσματα

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ..., 20$ και γράψτε τις παρατηρήσεις σας για την σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. (5 μονάδες)

Υπόδειξη: Δημιουργείστε ένα διάνυσμα με όρους τους 20 πρώτους όρους της ακολουθίας $\frac{1}{n^2}$.
Για να το κάνετε αυτό χρησιμοποιείστε τις διανυσματικές πράξεις (vectorized) ./ και .^ οι οποίες εφαρμόζονται ανάμεσα σε διανύσματα, ή διανύσματα και αριθμούς, στοιχείο προς στοιχείο διανύσματος. Για παράδειγμα για να ορίσω τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας μπορώ να πληκτρολογήσω

```
>> a=1./([1:10].^2)
```

Στη συνέχεια εφαρμόστε στο διάνυσμα την εντολή cumsum

```
>> b=cumsum(a)
```

η οποία επιστρέφει διάνυσμα που περιέχει στην κ θέση τα αθροίσματα των κ πρώτων στοιχείων του a (cumulative sum). Στη συνέχεια με την plot κάνετε το γράφημα που σας ζητείται:

```
>> plot(b)
```

Επαναλάβατε τα ίδια για τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ..., 20$.

Για να αντιγράψετε το γράφημα από την Octave στο Word, στο παράθυρο με το γράφημα κάνετε δεξί κλικ στη λωρίδα τίτλου και από την επιλογή Options επιλέγετε Copy to Clipboard. Στη συνέχεια κάνετε Paste στο Word. Στο *MATLAB* είναι πιο απλό μιας και υπάρχει διαθέσιμη επιλογή στα μενού του παράθυρου του γραφήματος.

Απάντηση

Η εντολή [1:20].^2 υψώνει τα στοιχεία του πίνακα [1 2 3 ... 20] στο τετράγωνο. Όμοια η εντολή a=1./([1:10].^2) στην θέση των στοιχείων του πίνακα [1:20].^2 τοποθετεί τις αντίστροφες τιμές τους π.χ.

```
>> a=1./([1:20].^2)


a =

  Columns 1 through 5


  1.00000000000000    0.25000000000000    0.11111111111111    0.06250000000000
0.04000000000000


  Columns 6 through 10


  0.02777777777778    0.02040816326531    0.01562500000000    0.01234567901235
0.01000000000000


  Columns 11 through 15
```

0.00826446280992 0.00694444444444 0.00591715976331 0.00510204081633 0.00444444444444

Columns 16 through 20

0.00390625000000 0.00346020761246 0.00308641975309 0.00277008310249 0.00250000000000

Εφαρμόζοντας την εντολή cumsum στον προηγούμενο πίνακα θα πάρουμε τον πίνακα των μερικών αθροισμάτων :

```
>> b=cumsum(a)
```

b =

Columns 1 through 5

1.00000000000000 1.25000000000000 1.36111111111111 1.42361111111111 1.46361111111111

Columns 6 through 10

1.49138888888889 1.51179705215420 1.52742205215420 1.53976773116654 1.54976773116654

Columns 11 through 15

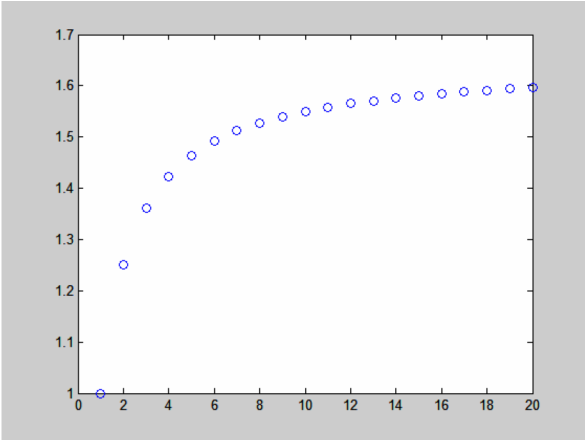
1.55803219397646 1.56497663842090 1.57089379818422 1.57599583900054 1.58044028344499

Columns 16 through 20

1.58434653344499 1.58780674105744 1.59089316081053 1.59366324391302 1.59616324391302

τα στοιχεία του οποίου μπορούμε να αναπαραστήσουμε με την εντολή plot()

```
>> plot(b,'o')
```



Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σύγκλιση των τιμών στο 1.59... Η ακριβής τιμή του αθροίσματος δίνεται από την εντολή symsum(f(n),n0,nk) :

>> syms n

>> symsum(1/n^2,1,inf)

ans = 1/6*pi^2 = 1.644934…

όπου pi=3.14159.

Αν εφαρμόσουμε τις παραπάνω εντολές για το άθροισμα $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}, k=1,2,...,20$ θα έχουμε :

>> a=1./([1:20])

a =

Columns 1 through 5

1.00000000000000 0.50000000000000 0.33333333333333 0.25000000000000 0.20000000000000

Columns 6 through 10

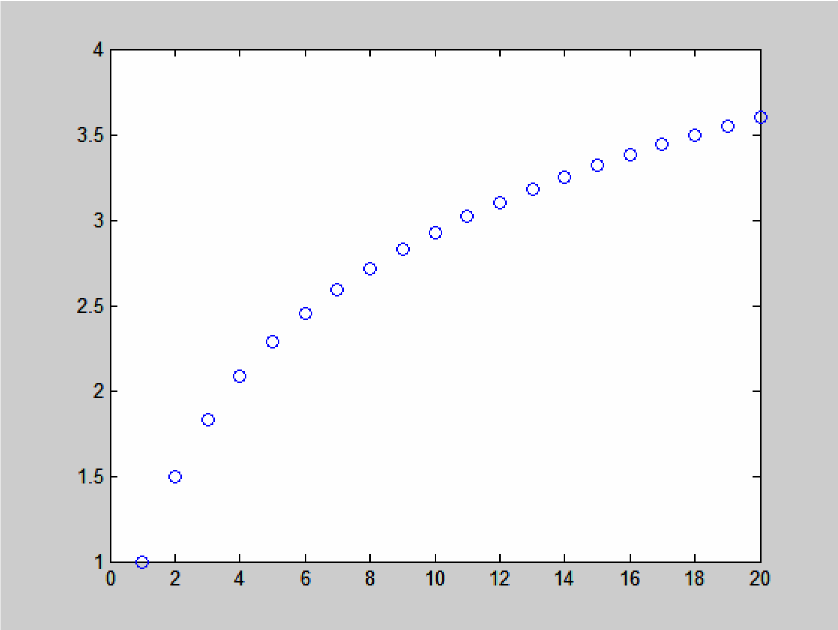
0.16666666666667 0.14285714285714 0.12500000000000 0.11111111111111 0.10000000000000

Columns 11 through 15

0.09090909090909 0.08333333333333 0.07692307692308 0.07142857142857 0.06666666666667

Columns 16 through 20

```
   0.06250000000000   0.05882352941176   0.05555555555556   0.05263157894737
0.05000000000000

>> b=cumsum(a)

b =

  Columns 1 through 5

   1.00000000000000   1.50000000000000   1.83333333333333   2.08333333333333
2.28333333333333

  Columns 6 through 10

   2.45000000000000   2.59285714285714   2.71785714285714   2.82896825396825
2.92896825396825

  Columns 11 through 15

   3.01987734487734   3.10321067821068   3.18013375513376   3.25156232656233
3.31822899322899

  Columns 16 through 20

   3.38072899322899   3.43955252264076   3.49510807819631   3.54773965714368
3.59773965714368

>> plot(b,'o')
```



Παρατηρείστε ότι η γραφική αυτή παράσταση παρέχει απλώς μια **ένδειξη** ότι η σειρά δεν συγκλίνει. Στην πραγματικότητα, όσους όρους και να συμπεριλάβουμε, ποτέ δεν θα μπορέσουμε να αποφανθούμε με σιγουριά για την απόκλιση της σειράς, με αυτόν τον τρόπο. Η απόκλιση της αρμονικής σειράς είναι ένα κλασικό παράδειγμα αποτελέσματος για το οποίο η αναλυτική μαθηματική σκέψη δεν μπορεί να αντικατασταθεί από μια απλή υπολογιστική διαδικασία.
