ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Ημερομηνία αποστολής στον φοιτητή: 19 Φεβρουαρίου 2005.
Τελική ημερομηνία αποστολής από τον φοιτητή: 22 Μαρτίου 2005.

Οι ασκήσεις της Εργασίας αυτής βασίζονται στην ύλη των Ενοτήτων 5 – 8 (Παράγωγος, Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού, Ακρότατα, Θεώρημα Taylor) του συγγράμματος «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Άσκηση 1 (18 μον.)

(α) (8 μον.) Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να προσδιορίσετε για ποιές τιμές του x παραγωγίζεται και να υπολογίστε την παράγωγό της ως προς x:

i. $y = x^2 \cos(kx)$ **ii.** $y = x^k (\ln x)^m \ln(\ln x)$ **iii.** $y = \sqrt{\dfrac{3-x^2}{x^2+1}}$ **iv.** $y = \dfrac{x \cdot e^x}{\ln x}$

(k, m φυσικοί αριθμοί)**.**

(β) (10 μον.) Βρείτε τις παραμέτρους a, b, c έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Rolle στο διάστημα [-1, 1] για τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x(x+b) + (x+c), & x \in [-1,0) \\ (a-1)x^2 + 2(x+1) - c, & x \in [0,1] \end{cases}$$

Στη συνέχεια επαληθεύστε το θεώρημα.

Λύση

(α) **i** $y' = 2x\cos(kx) - kx^2 \sin(kx)$, $x \in \mathbb{R}$

ii. $$y' = kx^{k-1}(\ln x)^m \ln(\ln x) + x^k \left[m(\ln x)^{m-1} \frac{\ln(\ln x)}{x} + (\ln x)^m \frac{1}{x \ln x} \right]$$

$$= kx^{k-1}(\ln x)^m \ln(\ln x) + x^{k-1}\left[m(\ln x)^{m-1} \ln(\ln x) + (\ln x)^{m-1} \right]$$

$$= x^{k-1}(\ln x)^{m-1}\left[k \ln x \ln(\ln x) + m \ln(\ln x) + 1 \right],$$

Για το πεδίο ορισμού της, πρέπει x>0 και lnx>0, ώστε να ορίζονται τα lnx, ln(lnx) αντίστοιχα, οπότε: $x > 1$

iii $$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{3-x^2}{x^2+1}\right)^{\frac{-1}{2}} \frac{(x^2+1)(-2x) - (3-x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{1/2}}{(3-x^2)^{1/2}} \frac{-2x^3 - 2x - 6x + 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{1/2}}{(3-x^2)^{1/2}} \frac{-8x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-4x}{(3-x^2)^{1/2}(x^2+1)^{3/2}}, \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

iv $$y' = \frac{\ln x\left(e^x + xe^x\right) - xe^x \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{e^x(\ln x + x \cdot \ln x - 1)}{(\ln x)^2}, \quad x > 0,\ x \neq 1$$

(β) Για να μπορεί να εφαρμοστεί το Θ. Rolle στο διάστημα [-1,1] θα πρέπει κατ' αρχάς να είναι η f συνεχής. Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια στο μηδέν:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \big(x(x+b) + (x+c) \big) = c$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \big((a-1)x^2 + 2(x+1) - c \big) = 2 - c$$

Επομένως, θα πρέπει c=2-c ⇔ **<u>c=1</u>** και f(0)=2-c=1

Από την άλλη μεριά, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι και παραγωγίσιμη στο μηδέν. Όμως:

$$f_-'(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x(x+b) + (x+1) - 1}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{x(x+b) + x}{x} = \lim_{x\to 0-} (x + b + 1)$$
$$= b + 1$$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{(a-1)x^2 + 2(x+1) - 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{(a-1)x^2 + 2x}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \big((a-1)x + 2 \big) = 2$$

Άρα, πρέπει b+1=2 ή, ισοδύναμα, **<u>b=1</u>**

Θα πρέπει, τέλος, οι τιμές της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος να συμπίπτουν:

f(-1) = f(1) ⇔ -(-1+b)+(-1+c) = (a-1)+2(1+1)-c ⇔ 0 = a+2 ⇔ **<u>a = -2</u>**.

Για τις τιμές των παραμέτρων που βρήκαμε η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x \in [-1,0) \\ -3x^2 + 2x + 1, & x \in [0,1] \end{cases},$$

με παράγωγο :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \in [-1,0) \\ -6x + 2, & x \in [0,1] \end{cases}$$

η οποία μηδενίζεται στο ξ=1/3 ∈ (-1,1), γεγονός που επαληθεύει το Θεώρημα Rolle.

Άσκηση 2 (12 μον.)

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L' Hospital, υπολογίστε τα επόμενα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1+3x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{1-\cos x}$

Υπόδειξη: Στο ii., ονομάστε το όριο L, πάρτε λογάριθμους με βάση το e και θεωρείστε την εξίσωση $\lim\limits_{x\to\infty}2x\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=\ln L$, όπου έχουμε κάνει την αντιμετάθεση λογαρίθμου και ορίου (που επιτρέπεται). Ονομάστε τώρα $y = 1/x$ και εφαρμόστε τον κανόνα L' Hospital για $y \to 0$.

Λύση

i Όταν το $x\to 0^+$ τότε το $\dfrac{1+3x}{\sin x}\to+\infty$ και το $\dfrac{1}{x}\to+\infty$. Γράφοντας όμως το όριο διαφορετικά έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+3x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2+x-\sin x}{x\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{6x+1-\cos x}{x\cos x+\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{6+\sin x}{-x\sin x+2\cos x}=\frac{6}{2}=3\,.$$

ii. Έστω $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$. Ακολουθώντας την υπόδειξη έχουμε :

$$\ln L=\lim_{x\to\infty}2x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2\frac{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\infty}2\frac{\frac{3/x^2}{1-(3/x)}}{-1/x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{1-3/x}=-6\,.$$

Επομένως, L=e^{-6}.

iii.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\cos x\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2\sin x}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}+2\sin x\right)'}{\left(\sin x\right)'}==\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{\cos x}=\frac{4}{1}=4$$

Άσκηση 3 (20 μον.)

(α) (15 μον.) Δίνεται η εξίσωση

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

i. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (Bolzano), σύμφωνα με το οποίο ***αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και f(α)f(β)<0, τότε η f έχει ρίζα στο διάστημα (α,β)*** [Δείτε και το βιβλίο σας σελ. 58] αποδείξτε ότι η ως άνω εξίσωση έχει ρίζες στο διάστημα (2,3).

ii. Δείξτε ότι, στο ίδιο διάστημα, η συνάρτηση $g(x) = x^3 - 2x - 5$ είναι μονότονη και άρα η ρίζα είναι **μοναδική**.

iii. Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στις σελίδες 91-95 του βιβλίου σας, προσδιορίστε τη ρίζα αυτή με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων

Λύση

i. Θεωρώντας τη συνεχή πραγματική συνάρτηση $g(x) = x^3 - 2x - 5$, παρατηρούμε ότι g(2) = -1, g(3) = 16. Δηλαδή, g(2)g(3)<0, και η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (2,3)

ii. Παραγωγίζοντας την g στο ίδιο διάστημα έχουμε : $g'(x) = 3x^2 - 2$, η οποία είναι πάντα θετική για x>2. Επομένως, στο (2,3) η g είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα που εξασφαλίσαμε από το προηγούμενο υποερώτημα θα είναι μοναδική.

iii. Η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται ισοδύναμα σε :

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 2x^3 + 2x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\cdot x + \frac{2}{3x} + \frac{5}{3x^2} \Leftrightarrow x = f(x),$$

όπου $f(x) = \frac{2}{3}\cdot x + \frac{2}{3x} + \frac{5}{3x^2}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα [2,3].

Παρατηρούμε επιπλέον ότι: $f'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3x^2} - \frac{10}{3x^3}$, η οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι στο διάστημα [2,3] είναι αύξουσα (αφού, για παράδειγμα έχει θετική παράγωγο: $f''(x) = \frac{4}{3x^3} + \frac{10}{x^4}$) και άρα παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο x=3

$$|f'(x)| \le |f'(3)| = \frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 3^2} - \frac{10}{3\cdot 3^3} \cong 0.469 < 1$$

Επομένως, πληρούνται όλα τα κριτήρια για τη σύγκλιση του αλγορίθμου

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots$$

στην ρίζα της εξίσωσης.

Θεωρώντας ως αρχική τιμή x_0=2, ο προηγούμενος τύπος δίνει:

x_n	$f(x_{n-1})$
2	2.083333
2.083333	2.092889
2.092889	2.094300
2.094300	2.094513
2.094513	2.094546
2.094546	2.094551
2.094551	2.094551
2.094551	2.094551

Βλέπουμε λοιπόν ότι πολύ γρήγορα – από το τρίτο βήμα – έχουμε τη προσέγγιση της ρίζας με τη ζητούμενη ακρίβεια των 2 δεκαδικών ψηφίων αφού δύο διαδοχικές προσεγγίσεις συμπίπτουν μέχρι αυτό το όριο.

(β) (προαιρετική) (5 μον.) Να δοθεί προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων με χρήση του Matlab/Octave.

Η μεταβλητή **xold** αντιστοιχεί στο x_{n-1} και παίρνει αρχική τιμή ίση με άπειρο ώστε να μπορέσει να ξεκινήσει η δομή επανάληψης while και να εκτελεστεί τουλάχιστον μία φορά, η μεταβλητή **xnew** αντιστοιχεί στο x_n και παίρνει αρχική τιμή 2. Το διάνυσμα x έχει ως στοιχεία τα σημεία της προσέγγισης.
Η δομή επανάληψης **while** εκτελείται όσο η απόλυτη διαφορά του δύο διαδοχικών προσεγγίσεων είναι μεγαλύτερη του 10^{-9}. Μόλις ικανοποιηθεί τι κριτήριο η επαναληπτική διαδικασία σταματά. Μέσα στο while η xold παίρνει την τιμή της τελευταίας προσέγγισης η xnew παίρνει την τιμή της νέας προσέγγισης και τοποθετείται ως τελευταίο στοιχείο στο διάνυσμα των προσεγγίσεων.

```
>> format long
>> xold=inf;
>> xnew=2;
>> x=[xnew];
>> while abs(xold-xnew)>1e-09,
xold=xnew;
xnew=2/3*xold+2/(3*xold)+5/(3*xold^2);
x=[x;xnew];
end
>> x
x =

  2.000000000000000
  2.083333333333333
  2.092888888888889
  2.094299755039108
  2.094513250475558
  2.094545672470250
  2.094550598812279
  2.094551347403737
  2.094551461158756
  2.094551478444858
  2.094551481071638
  2.094551481470801
```
Παρατηρούμε ότι μετά από δώδεκα επαναλήψεις οι δύο τελευταίες επαναλήψεις συμπίπτουν σε 9 δεκαδικά ψηφία.

Άσκηση 4 (15 μον.)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2$. Να προσδιορίσετε :

i. Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία α) είναι αύξουσα , β) είναι φθίνουσα,
ii. Τα ακρότατα της συνάρτησης.
iii. Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι α) κοίλη προς τα πάνω, β) κοίλη προς τα κάτω.
iv. Τα σημεία καμπής
v. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τους άξονες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία δώστε μία γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

$f(x) = x^4 - 2x^2 = x^2\left(x^2 - 2\right)$, $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 4x\left(x-1\right)\left(x+1\right)$ και

$f''(x) = 12x^2 - 4$

Η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\left(0,0\right)$ και $\left(\sqrt{2},0\right)$ και τον άξονα των y στο σημείο $\left(0,0\right)$.

Η $f'(x) > 0$ αν $-1 < x < 0$ ή $x > 1$ και $f'(x) < 0$ αν $x < -1$ και $0 < x < 1$. Επομένως, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-1,0\right)$ και $\left(1,+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,1\right)$ και $\left(0,1\right)$.

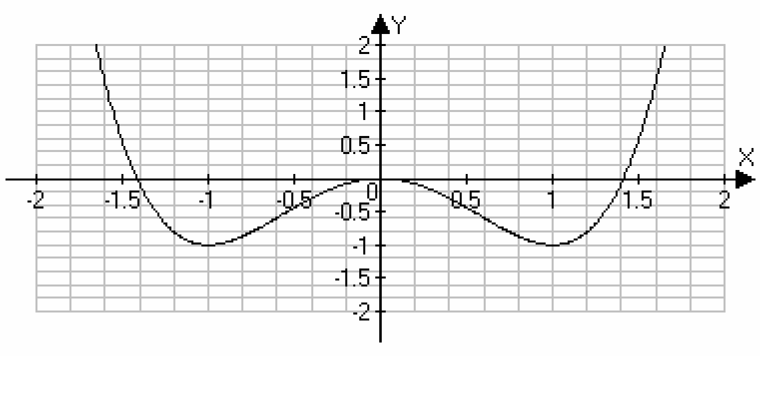
Για τα ακρότατα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 1$ ή $x = -1$.

Για $x = 0$ η $f''(x) = -4 < 0$ άρα το σημείο $\left(0,0\right)$ είναι τοπικό μέγιστο.
Για $x = 1$ η $f''(x) = 8 > 0$ άρα το σημείο $\left(1,-1\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.
Για $x = -1$ η $f''(x) = 8 > 0$ άρα το σημείο $\left(-1,-1\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Για τα σημεία καμπής $f''(x) = 0$. Επομένως τα σημεία $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{5}{9}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{5}{9}\right)$ είναι σημεία καμπής.

Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, όπου $f'' < 0$, και τα κοίλα προς τα πάνω στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$, όπου $f'' > 0$.

Τέλος η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 5 (10 μον.)

(α) (5 μον.) Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερό εμβαδόν Ε=c^2, όπου c>0, να βρεθεί αυτό που έχει την ελάχιστη υποτείνουσα και στην συνέχεια να υπολογισθούν και οι άλλες πλευρές του.

(β) (5 μον.) Σε ένα σφαιρικό μπαλόνι διοχετεύεται αέριο με ρυθμό εισροής 20 κυβικά εκατοστά ανά λεπτό $\left(20cm^3/min\right)$. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας του, την χρονική στιγμή που η ακτίνα είναι ίση με $3cm$;

Λύση

(α) Αν x, y συμβολίζουν τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών του τριγώνου, το εμβαδόν είναι $E=\dfrac{xy}{2}=c^2$, και η υποτείνουσα είναι $h=\sqrt{x^2+y^2}$. Λύνοντας την σχέση που δίνει το εμβαδόν ως προς y έχουμε $y=\dfrac{2c^2}{x}$. Αντικαθιστώντας στην σχέση για την υποτείνουσα έχουμε $h(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{4c^4}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{x^4+4c^4}}{x}$, αφού οι ποσότητες x, y είναι θετικές. Για να ελαχιστοποιήσουμε την υποτείνουσα αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $h'(x)=0$ αφού έχουμε παραγωγίσιμη συνάρτηση. Είναι

$$h'(x)=-\frac{\sqrt{x^4+4c^4}}{x^2}+\frac{\left(x^4+4c^4\right)'}{2x\sqrt{x^4+4c^4}}=-\frac{\sqrt{x^4+4c^4}}{x^2}+\frac{4x^3}{2x\sqrt{x^4+4c^4}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{x^4+4c^4}}{x^2}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^4+4c^4}}=\frac{-\left(x^4+4c^4\right)+2x^4}{x^2\sqrt{x^4+4c^4}}=\frac{+x^4-4c^4}{x^2\sqrt{x^4+4c^4}}$$

Ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι οι $x=\pm\sqrt{2}c$, δεκτή γίνεται η θετική. Αντίστοιχη τιμή για το y είναι η $\sqrt{2}c$. Για να εξασφαλίσουμε ελάχιστη τιμή εξετάζουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου. $h''(x)=\dfrac{4x^3x^2\sqrt{x^4+4c^4}-\left(x^4-4c^4\right)\left(x^2\sqrt{x^4+4c^4}\right)'}{x^4\left(x^4+4c^4\right)}$. Η παράσταση $\left(x^4-4c^4\right)\left(x^2\sqrt{x^4+4c^4}\right)'$ μηδενίζεται για $x=\sqrt{2}c$ και η παράσταση $h''(x)$ είναι θετική, οπότε για $x=\sqrt{2}c$, $y=\sqrt{2}c$ έχουμε την ελάχιστη τιμή της υποτείνουσας $h=\sqrt{2c^2+2c^2}=2c$.

β) Ο όγκος της σφαίρας δίνεται από τον τύπο $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ οπού *r* είναι η ακτίνα της.

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο,*t*, έχουμε

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right)=4\pi r^2\frac{dr}{dt}.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\dfrac{dV}{dt}=20$. Επομένως $20=4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$. Άρα $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{5}{\pi r^2}$. Όταν η ακτίνα είναι ίση με 3 *cm* τότε

$$\frac{dr}{dt}=\frac{5}{\pi 3^2}=\frac{5}{9\pi}\ cm/min.$$

<u>Άσκηση 6 (15 μον.)</u>

(α) (5 μον.) (<u>Μελετήστε την Ασκηση Αυτοαξιολόγησης 1β) σελίδα 96</u>)

i) Αν η συνάρτηση *f* ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και επιπλέον $0 \le m < |f'(x)| < M$ για $a < x < b$, δείξτε ότι

$$m(b-a) \le |f(b)-f(a)| < M(b-a).$$

ii) Με κατάλληλη χρήση του i) δείξτε ότι

$$1+\frac{h}{2\sqrt{1+h}} < \sqrt{1+h} < 1+\frac{h}{2}, \quad h>0$$

(β) (4 μον.) Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα της εκθετικής και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε σειρές Taylor, αποδείξτε τη σχέση:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(γ) (6 μον.) Αναπτύσσοντας κατάλληλα τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις σε σειρές Taylor, υπολογίστε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - x^2\cdot\ln(1+\frac{1}{x})\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

<u>Λύση</u>

(α)

i) Από το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει σημείο $k \in [a,b]$ ώστε $f'(k) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow |f'(k)| = \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$. Γνωρίζοντας ότι $m < |f'(k)| < M$ για κάθε $k \in [a,b]$ έχουμε $m < \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| < M$. Αφού $a<b$ η προηγούμενη σχέση γράφεται $m < \frac{|f(b)-f(a)|}{b-a} < M \Rightarrow m(b-a) < |f(b)-f(a)| < (b-a)M$.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1+x}$ είναι ορισμένη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,h]$ με $h>0$. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι

$f'(k) = \frac{f(h)-f(0)}{h-0} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+k}} = \left|\frac{\sqrt{1+h}-1}{h-0}\right| = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ για $0<k<h$. Από την σχέση αυτή έχουμε $\frac{1}{2\sqrt{1+k}} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \Rightarrow \frac{h}{2\sqrt{1+k}} = \sqrt{1+h}-1$, με $0<k<h$. Επειδή $0<k<h$, έχουμε $1<1+k<1+h \Rightarrow 1<\sqrt{1+k}<\sqrt{1+h} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+h}} < \frac{1}{\sqrt{1+k}}$.

Πολλαπλασιάζοντας με h>0 έχουμε $\frac{h}{\sqrt{1+h}} < \frac{h}{\sqrt{1+k}}$. Καταλήγουμε έτσι στη σχέση

$$\frac{h}{2\sqrt{1+h}} < \frac{h}{2\sqrt{1+k}} = \sqrt{1+h}-1 \Rightarrow 1+\frac{h}{2\sqrt{1+h}} < \sqrt{1+h}.$$

Για το άλλο σκέλος της ανισότητας, για $0<k<h$ έχουμε ήδη αποδείξει ότι

$$\frac{1}{2\sqrt{1+k}} = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} < \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1+h} < 1+\frac{h}{2}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα σε σειρά κέντρου μηδέν της εκθετικής συνάρτησης (βλ. σχέση 8.34, σελ. 127 του βιβλίου σας) έχουμε:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!}.$$

Όμως, για τις δυνάμεις του i γνωρίζουμε ότι:

$$i^n = \begin{cases} i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1, & \alpha\nu\ n=4k \\ i^{4k+1} = (i^4)^k \cdot i = i, & \alpha\nu\ n=4k+1 \\ i^{4k+2} = (i^4)^k \cdot i^2 = -1, & \alpha\nu\ n=4k+2 \\ i^{4k+3} = (i^4)^k \cdot i^3 = -i, & \alpha\nu\ n=4k+3 \end{cases} = \begin{cases} (-1)^m, & n=2m \\ (-1)^m \cdot i, & n=2m+1 \end{cases}$$

Επομένως, μπορούμε να χωρίσουμε τη σειρά της εκθετικής συνάρτησης ως εξής:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{i^{2m} x^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{i^{2m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + i \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} =$$
$$= \cos x + i \sin x$$

(γ)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - x^2 \cdot \ln(1+\frac{1}{x})\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - x^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{x})^{n+1}}{n+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)x^{n-1}}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - (x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{4x^2} + ...)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x^2} + ...\right) = \frac{1}{2} - 0 + 0 + ... = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x + 2\frac{x^3}{3!} + ...}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2 + 2\frac{x^2}{3!} + ...\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ...\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + 2\frac{x^2}{3!} + ...}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ...} = \frac{2 + 0 + ...}{1 - 0 + 0 - ...} = 2$$

Άσκηση 7 (15 μον.)

Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους τη χρονική στιγμή t δίνεται από την τιμή μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης π(t). Γνωρίζουμε ότι:

- Την χρονική στιγμή που αρχίζουμε να μελετάμε την εξέλιξή του ο πληθυσμός είναι ίσος με π_0 και
- Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ανά πληθυσμιακή μονάδα, δηλαδή το πηλίκο $\dfrac{\pi'(t)}{\pi(t)}$, είναι σταθερός και ίσος με -1/3.

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξέλιξη του πληθυσμού στο χρόνο περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση :

$$\pi'(t) = -\frac{1}{3}\pi(t), \qquad \pi(t_0) = \pi_0,$$

(α) (3 μον.) Δείξτε ότι η λύση της εξίσωσης αυτής είναι μία εκθετική συνάρτηση της μορφής $\pi(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$, όπου c σταθερά που εξαρτάται από την αρχική συνθήκη του προβλήματος (προσδιορίστε την εξάρτηση αυτή).

(β) (12 μον.) Αν δίνεται ότι την χρονική στιγμή t_0=0 ο πληθυσμός είχε την τιμή $\pi(t_0)$=10, δώστε μια προσέγγιση ακρίβειας 3 δεκαδικών ψηφίων για την τιμή του πληθυσμού την χρονική στιγμή t = 6.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης σε σειρά Taylor καθώς επίσης και το γεγονός ότι: *Αν σε μία εναλλάσσουσα σειρά,* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$, *χρησιμοποιήσουμε το μερικό άθροισμα* $\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$, *το σφάλμα που προκύπτει δεν υπερβαίνει (κατ' απόλυτη τιμή) τον πρώτο όρο που αγνοούμε, δηλαδή τον όρο* a_{k+1}.

Λύση

(α) Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $\pi(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$ στην αρχική εξίσωση εύκολα διαπιστώνουμε ότι την επαληθεύει:

$$\pi'(t) = \left(c \cdot e^{-\frac{1}{3}t}\right)' = c \cdot (\frac{-1}{3}) \cdot e^{-\frac{1}{3}t} = \frac{-1}{3} \cdot \left(c \cdot e^{-\frac{1}{3}t}\right) = \frac{-1}{3} \cdot \pi(t)$$

Για να επαληθεύετε τώρα η αρχική συνθήκη $\pi(t_0) = \pi_0$ πρέπει

$$c \cdot e^{-\frac{1}{3}t_0} = \pi_0 \Leftrightarrow c = \pi_0 \cdot e^{\frac{1}{3}t_0}$$

(β) Ισχύει ότι π(0)=10. Επομένως, $c = 10 \cdot e^0 = 10$ και η συνάρτηση που περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού είναι $\pi(t) = 10 \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$. Την χρονική στιγμή t=6 θα έχουμε

$$\pi(6) = 10 \cdot e^{-\frac{6}{3}} = 10 \cdot e^{-2}.$$

Αρκεί επομένως να προσδιορίσουμε την τιμή του e^{-2} με ακρίβεια των 4 δεκαδικών ψηφίων.

Από το ανάπτυγμα της εκθετικής σε σειρά Taylor κέντρου 0 έχουμε:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}.$$

Σύμφωνα με την υπόδειξη αν κρατήσουμε n-όρους σε αυτό το ανάπτυγμα θα έχουμε σφάλμα κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο του $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Αν λοιπόν θέλουμε ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-4}$ το οποίο επιτυγχάνεται για n≥10.

Κρατώντας έτσι 10 όρους έχουμε:

$$1 - \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^9}{9!} + \frac{2^{10}}{10!} = 0.1353791$$

έχοντας πράγματι προσεγγίσει το e^{-2} με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων αφού $e^{-2} \cong 0.1353352$.

Επομένως η ζητούμενη τιμή είναι $\pi(6) = 10 \cdot e^{-2} = 1.353$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.