ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 5- ΛΥΣΕΙΣ

Οι ασκήσεις της Εργασίας αυτής βασίζονται στην ύλη των Ενοτήτων 9 – 12 του συγγράματος «Λογισμός Μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου. Όλα τα υποερωτήματα βαθμολογούνται το ίδιο.

Άσκηση 1 (12 μονάδες)

Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα α) και β) σύμφωνα με τις υποδείξεις.

α) $\int \frac{(x-1)dx}{x^3+1}$ Παραγοντοποιήστε πρώτα τον παρονομαστή και αναλύστε το κλάσμα μέσα στο ολοκλήρωμα σύμφωνα με τον αλγόριθμο: $\frac{\kappa x^2+\lambda x+\mu}{(x+a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$.

β) $\int \sin^3 x dx$, χρησιμοποιώντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση και την ταυτότητα $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$.

γ) Δείξτε ότι: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} = \ln 2$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y=e^x$ και την ανάλυση σε απλά κλάσματα, όπως στο α) πιο πάνω.

ΛΥΣΗ

α) Το κλάσμα αναλύεται ως εξής

$$\frac{x-1}{x^3+1} = \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Οι αριθμητές των κλασμάτων πρέπει να είναι ταυτοτικά ίσοι άρα θα έχω

$$A+B=0 \qquad (1)$$

$$-A+B+C=1 \qquad (2)$$

$$A+C=-1 \qquad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$A=-\frac{2}{3} \ , \ B=\frac{2}{3} \ , C=-\frac{1}{3}$$

οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται ως ακολούθως

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^3+1} = -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} = -\frac{2}{3}\int \frac{d(x+1)}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες του διαφορικού

$$dx = d(x+1) \quad \text{και} \quad (2x-1)dx = d(x^2-x+1)$$

επομένως το ολοκλήρωμα ισούται με

$$-\frac{2}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x^2-x+1) + C$$

(β) $$\int \sin^3(x)dx = \int \sin^2(x)\sin(x)dx = \int \sin^2(x)d(-\cos(x))$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\sin(x)dx = d(-\cos(x))$$

λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ και θέτοντας $u = \cos(x)$ το ολοκλήρωμα γίνεται

$$-\int (1-u^2)du = -\int du + \int u^2 du = -u + \frac{1}{3}u^3 + C = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + C$$

γ) Θα υπολογίσουμε κατ' αρχάς το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{e^x+1}$. Θέτουμε

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται**:**

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{du}{u(u+1)}$$

αυτό είναι ένα ρητό ολοκλήρωμα. Για να το υπολογίσουμε θα αναλύσουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων**:**

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+Bu}{u(u+1)} = \frac{(A+B)u+A}{u(u+1)} \quad \Rightarrow \quad A=1, B=-1$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} = \ln|u| - \ln|u+1| + C$$

και τελικά:

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \ln|e^x| - \ln|e^x+1| + C = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C$$

Το οορισμένο ολοκλήρωμα τώρα είναι:

$$\int_0^K \frac{dx}{e^x+1} = \ln\left(\frac{e^K}{e^K+1}\right) - \ln\left(\frac{e^0}{e^0+1}\right) = \ln\left(\frac{e^K}{e^K+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Και τελικά έχουμε:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{K\to+\infty} \int_0^K \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{K\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{e^K}{e^K+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

Με τον κανόνα L΄ Hopital υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{K\to+\infty} \ln\left(\frac{e^K}{e^K+1}\right) = \ln\left(\lim_{K\to+\infty} \frac{e^K}{e^K+1}\right)$$

αλλά

$$\lim_{K\to\infty} \frac{e^K}{e^K+1} = \lim_{K\to\infty} \frac{(e^K)'}{(e^K+1)'} = \lim_{K\to\infty} \frac{e^K}{e^K} = 1$$

και επομένως

$$\lim_{K\to+\infty} \ln\left(\frac{e^K}{e^K+1}\right) = \ln\left(\lim_{K\to+\infty} \frac{e^K}{e^K+1}\right) = \ln(1) = 0$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα τελικά γίνεται:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{K\to+\infty} \int_0^K \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{K\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{e^K}{e^K+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - [\ln(1) - \ln(2)] = \ln(2)$$

και η άσκηση αποδείχθηκε.

<u>Άσκηση 2</u> (10 μονάδες)

Η αξία μιας μετοχής στο Χρηματιστήριο είναι σήμερα 7*A*/8 ευρώ, όπου A θετική σταθερά, ενώ σε $t \geq 0$ μήνες από σήμερα η αξία της $P(t)$ μειώνεται με ρυθμό $P'(t) = -A/(t+1)^2$ ευρώ ανά μήνα.
Να βρείτε:
α) την αξία της μετοχής σε 6 μήνες από σήμερα,

β) σε πόσους μήνες(τουλάχιστον) η μετοχή δεν θα έχει καμία αξία.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $P^{/}(t)=\frac{-A}{(t+1)^{2}}$ έχουμε:

$$\int P^{/}(t)dt=\int \frac{-A}{(t+1)^{2}}dt=A\int\left(\frac{1}{t+1}\right)^{/}dt$$

$$P(t)=\frac{A}{t+1}+c,(c\in\mathbb{R})$$

Επειδή $P(0)=\frac{7A}{8}$ προκύπτει

$$P(0)=A+c$$

$$\frac{7A}{8}=A+c$$

$$c=-\frac{A}{8}$$

Άρα

$$P(t)=\frac{A}{t+1}-\frac{A}{8}$$

και επομένως η αξία της μετοχής μετά από έξι μήνες θα είναι

$$P(6)=\frac{A}{7}-\frac{A}{8}=\frac{A}{56}$$

β) $P^{/}(t)=\frac{-A}{(t+1)^{2}}<0$, άρα η συνάρτηση P είναι γνησίως φθίνουσα και επομένως έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού και επειδή $P(7)=0$ συμπεραίνουμε ότι η μετοχή δεν θα έχει καμία αξία σε 7 μήνες.

<u>**Άσκηση 3**</u> (12 μονάδες)

α) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f, με $f^{/}$ συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0,1]$ και $f(0)=0$. Υποθέτουμε ακόμη ότι: $\int_0^1 xf^{/}(x)dx=\int_0^1(1-x)f^{/}(x)dx=1$. Ολοκληρώνοντας την σχέση $(xf(x))^{/}=f(x)+xf(x)^{/}$, βρείτε το $f(1)$ και υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$

β) Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [0,1] για την οποία ισχύει $\int_0^1 f(x)dx$=1.

Εφαρμόστε το Θεώρημα της σελίδας 58 στη συνάρτηση $2xF(x)-1$, όπου $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ και

αποδείξτε ότι υπάρχει $a\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{2a}$.

ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^1 xf'(x)dx+\int_0^1(1-x)f'(x)dx=1+1$$
$$\int_0^1[xf'(x)+f'(x)-xf'(x)]dx=2$$
$$\int_0^1 f'(x)dx=2$$
$$f(1)-f(0)=2$$
$$f(1)=2$$

Όμοια βρίσκουμε:

$$\int_0^1 xf'(x)dx=1$$
$$\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1(x)'f(x)dx=1$$
$$f(1)-\int_0^1 f(x)dx=1$$
$$\int_0^1 f(x)dx=1$$

β)

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t)=2t\int_0^t f(x)dx-1, t\in[0,1]$$

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και

$$g(0)g(1)=-1(2\int_0^1 f(x)dx-1)=(-1).1=-1<0$$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $a\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$g(a)=0\Leftrightarrow 2a\int_0^a f(x)dx-1=0\Leftrightarrow\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{2a}$$

Άσκηση 4 (16 μονάδες)

Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού είναι: Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ έχει παράγωγο για $\forall x\in[a,b]$ και ισχύει:

$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα αυτό για να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις:

α) Έστω $y=\int_{1+3x^2}^{4}\frac{dt}{2+t^2}$. Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. (Υπόδειξη: Θέστε $u=x^2$). Κατόπιν, βρείτε την ίδια απάντηση, υπολογίζοντας κατ'ευθείαν το ολοκλήρωμα και μετά παραγωγίζοντας ως προς x.

β) Παρατηρείστε τώρα ότι η μέθοδος της απ'ευθείας ολοκλήρωσης δεν είναι πάντα εφαρμόσιμη. Θεωρείστε για παράδειγμα τη συνάρτηση $f(x)=\int_{x^2}^{2x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$, $x\geq 0$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, υπολογίσετε την $f'(x)$ και αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ΛΥΣΗ

α)

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης θα έχω

$$\frac{d}{dx}\int_{1+3x^2}^{4}\frac{dt}{2+t^2}=-\frac{d}{dx}\int_{4}^{1+3x^2}\frac{dt}{2+t^2}=-\frac{d}{du}\int_{4}^{u}\frac{dt}{2+t^2}\times\frac{du}{dx}$$

όπου

$$u=1+3x^2$$

και επομένως

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(1+3x^2)=6x$$

Άρα θα έχω εφαρμόζοντας το θεώρημα

$$\frac{d}{dx}\int_{1+3x^2}^{4}\frac{dt}{2+t^2}=-\frac{1}{2+u^2}\times\frac{du}{dx}=-\frac{6x}{2+(1+3x^2)^2}$$

Αν υπολογίσω απ'ευθείας το ολοκλήρωμα θα πάρω

$$\int_{1+3x^2}^{4}\frac{dt}{2+t^2}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{t}{\sqrt{2}})\right]_{1+3x^2}^{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\frac{4}{\sqrt{2}})-\arctan(\frac{1+3x^2}{\sqrt{2}})\right]$$

η παραγώγιση της τελευταίας έκφρασης μας δίνει μηδέν για τον πρώτο όρο και για τον δεύτερο

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\left[\arctan(\frac{1+3x^2}{\sqrt{2}})\right]=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{1+(\frac{1+3x^2}{\sqrt{2}})^2})\frac{d}{dx}(\frac{1+3x^2}{\sqrt{2}})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της σύνθετης παραγώγισης.Υπολογίζοντας λοιπόν την παράγωγο θα έχω

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{2+(1+3x^2)^2})\frac{1}{\sqrt{2}}(6x)=-\frac{6x}{2+(1+3x^2)^2}$$

που είναι η ίδια έκφραση που υπολογίσαμε και προηγουμένως.

β)

- Για κάθε $x\geq 0$

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_{x^2}^{0}\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt+\int_{0}^{2x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt\\ &=\int_{0}^{2x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt-\int_{0}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt \end{aligned}$$

που είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

$$f'(x)=\frac{4x}{\sqrt{1+4x^4+16x^8}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^4+x^8}}$$

- Για κάθε $t\neq 0$, $0\leq\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\leq\frac{1}{\sqrt{t^4}}=\frac{1}{t^2}$, επομένως

$$\forall x>0,$$

$$0\leq\int_{x^2}^{2x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt\leq\int_{x^2}^{2x^2}\frac{1}{t^2}dt$$

$$0\leq f(x)\leq\left[-\frac{1}{t}\right]_{x^2}^{2x^2}$$

$$0\leq f(x)\leq\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^2}$$

επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^2})=0$$

προκύπτει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Άσκηση 5 (14 μονάδες)

α) Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ) ανακάλυψε ότι το εμβαδόν κάτω από ένα παραβολικό τόξο ισούται με το γινόμενο των δύο τρίτων της βάσης επί το ύψος του τόξου. Χρησιμοποιώντας το κατάλληλο ολοκλήρωμα, βρείτε το εμβαδόν κάτω από το παραβολικό τόξο:

$y=6-x-x^2$ και πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα $-3\le x\le 2$ στον άξονα των x

και δείξτε ότι αυτό ισούται με το γινόμενο $\frac{2}{3}$ (βάση)*(ύψος) (Απάντηση: 125/6).

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$, $x>0$ και ο πραγματικός αριθμός λ με $0<\lambda<1$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του τόπου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\lambda, x=1$. Κατόπιν, υπολογίστε το όριο $\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hospital.

ΛΥΣΗ

α. Το εμβαδόν θα ισούται με

$$\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)dx=\left|6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_{-3}^{2}=[(6.2-\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3})-(6.(-3)-\frac{(-3)^2}{2}-\frac{(-3)^3}{3})]=125/6$$

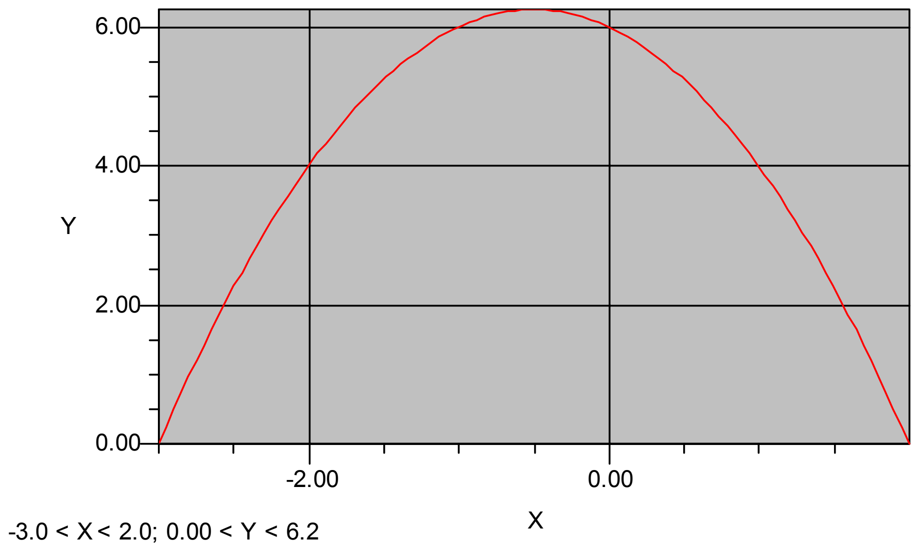
Η βάση αρχίζει από το -3 έως το 2 ,δηλαδή 5 μονάδες μήκους, το ύψος θα είναι η τεταγμένη του μεγίστου της $6-x-x^2$ η οποία βρίσκεται με την συμπλήρωση του τετραγώνου:

$$6-x-x^2=-[x^2+x-6]=-[(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2-6]=-[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}]$$

για $x=-\frac{1}{2}$ η μεγίστη τιμή της συνάρτησης είναι 25/4 άρα το εμβαδόν θα είναι

$$\frac{2}{3}\times 5\times\frac{25}{4}=\frac{125}{6}$$

(c1) plot(6-x-x^2,x,-3,2);



done

β)

- Αν $x>0$, τότε $0<\dfrac{x}{x+1}<1$, άρα $f(x)<0$ και επομένως

$$E(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}|f(x)|dx=\int_{\lambda}^{1}-f(x)dx=\int_{\lambda}^{1}-ln\frac{x}{x+1}dx=\int_{\lambda}^{1}(-x)'\,ln\frac{x}{x+1}dx$$

$$=\left[-x\,ln\frac{x}{x+1}\right]_{\lambda}^{1}-\int_{\lambda}^{1}-x\frac{x+1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\right)'dx$$

$$=\left[-x\,ln\frac{x}{x+1}\right]_{\lambda}^{1}+\int_{\lambda}^{1}(x+1)\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\left[-x\,ln\frac{x}{x+1}\right]_{\lambda}^{1}+\int_{\lambda}^{1}\frac{1}{x+1}dx$$

$$=ln\,2+\lambda\,ln\frac{\lambda}{\lambda+1}+\left[ln(x+1)\right]_{\lambda}^{1}$$

$$=ln\,2+\lambda\,ln\frac{\lambda}{\lambda+1}+ln\,2-ln(\lambda+1)$$

$$=2\,ln\,2+\lambda\,ln\frac{\lambda}{\lambda+1}-ln(\lambda+1)$$

$$=2\,ln\,2+\lambda\,ln\,\lambda-\lambda\,ln(\lambda+1)-ln(\lambda+1)$$

- Επειδή $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \lambda \ln\lambda = \lim\limits_{\lambda\to 0^+} \dfrac{\ln\lambda}{\dfrac{1}{\lambda}} = \lim\limits_{\lambda\to 0^+} \dfrac{(\ln\lambda)'}{\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)'} = \lim\limits_{\lambda\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{\lambda}}{-\dfrac{1}{\lambda^2}} = -\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \lambda = 0$

και ομοίως $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \lambda \ln(\lambda+1) = 0$, προκύπτει ότι

$$\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = 2\ln 2$$

Άσκηση 6. (20 μονάδες)

Έστω η ακολουθία I_n , $n = 0, 1, 2, \ldots.$, τέτοια ώστε για κάθε θετικό ακέραιο n

$I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$, όπου $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$, $0! = 1$, $1! = 1$.

α) Να υπολογίσετε τον πρώτο όρο I_1 της ακολουθίας.

β) Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, εκφράστε τον όρο I_n συναρτήσει του I_{n-1} , για $n \geq 2$.

γ) Αθροίζοντας κατά μέλη για $k = 2, \ldots., n$, δείξτε ότι $I_n = e - \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$

δ) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $0 < (1-x)^n < 1$, για $0 < x < 1$, δείξτε ότι οι αριθμοί 0 και $\dfrac{e-1}{n!}$ είναι ένα κάτω και ένα άνω φράγμα αντίστοιχα της ακολουθίας I_n , $n = 0, 1, 2, \ldots.$. Διαπιστώνοντας μάλιστα ότι η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα συμπεράνετε ότι συγκλίνει.

ε) Βρείτε το όριο $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ και δείξτε το πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

$e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$

ΛΥΣΗ

α)

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx = \Big[(1-x)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (1-x)' e^x dx = -1 - \int_0^1 -e^x dx$$
$$= -1 + \Big[e^x\Big]_0^1 = e - 2$$

β)

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx = \frac{1}{n!}\Big[(1-x)^n e^x\Big]_0^1 - \frac{1}{n!}\int_0^1 -n(1-x)^{n-1} e^x dx$$
$$= -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

Άρα

$$I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}, (n \geq 2)$$

γ) Για $n = 2,3,...$ προκύπτει:

$$I_2 = -\frac{1}{2!} + I_1$$

$$I_3 = -\frac{1}{3!} + I_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$I_{n-1} = -\frac{1}{(n-1)!} + I_{n-2}$$

$$I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$I_n = -\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - ... - \frac{1}{n!} + I_1 = -\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - ... - \frac{1}{n!} + e - 2$$

και επειδή

$$2 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}$$

προκύπτει

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$$

δ) Επειδή $0 \leq x \leq 1$ προκύπτει

$$\begin{aligned}
&0 \leq 1 - x \leq 1 \\
&0 \leq (1-x)^n \leq 1 \\
&0 \leq (1-x)^n e^x \leq e^x \\
&0 \leq \int_0^1 (1-x)^n e^x dx \leq \int_0^1 e^x dx \\
&0 \leq n! I_n \leq \left[e^x\right]_0^1 \\
&0 \leq I_n \leq \frac{e-1}{n!}
\end{aligned}$$

ε) Επειδή $\lim_{n \to +\infty} \frac{e-1}{n!} = 0$, από την προηγούμενη σχέση προκύπτει $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ και από την

$I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$ παίρνοντας τα όρια έχουμε $\lim_{n \to +\infty} I_n = e - \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$, δηλαδή

$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!})$

Άσκηση 7. (16 μονάδες)

Αναπτύξτε κατά Fourier τις συναρτήσεις

α) $f(x)=\begin{cases}1 & , \quad -\pi \le x \le 0 \\ x & , \quad 0 < x \le \pi\end{cases}$ β) $f(x)=sin\left(x/2\right)$, $-\pi \le x \le \pi$

ΛΥΣΗ

α) $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{n\pi x}{L})+b_n\sin(\frac{n\pi x}{L}))$$

Στη περίπτωση μας $L=\pi$ και επομένως

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=1+\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos(nx)dx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left|\sin(nx)\right|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}xd(\sin(nx))=\frac{1}{n\pi}[x\sin(nx)-\int\sin(nx)dx]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[\cos(nx)]_0^{\pi}=\frac{1}{n^2\pi}[\cos(n\pi)-1]=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin(nx)dx=$$

$$=\frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n\pi}.$$

β)

Δεδομένου ότι ισχύει $\sin(\frac{-x}{2})=-\sin(\frac{x}{2})$ η συνάρτηση $f(x)=\sin(x/2)$ είναι περιττή. Αρκεί να βρούμε τα β_n στην παράσταση:

$$\sin(x/2)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(nx)$$

Σύμφωνα με το βιβλίο κεφ. 12.2 :

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx\ .$$

Για να υπολογίσουμε το $I=\int\sin(x/2)\sin(nx)dx$ χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(ax)\sin(nx)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-n)x-\cos(a+n)x\right)$. Έχουμε

$$I=\int \sin(x/2)\sin(nx)dx=\int \frac{1}{2}\left[\cos(\frac{1}{2}-n)x-\cos(\frac{1}{2}+n)x\right]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1/2)-n}\sin(\frac{1}{2}-n)x-\frac{1}{(1/2)+n}\sin(\frac{1}{2}+n)x\right]+C.$$

Άρα

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1/2)-n}\sin(\frac{1}{2}-n)x-\frac{1}{(1/2)+n}\sin(\frac{1}{2}+n)x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{(1/2)-n}\sin(\frac{1}{2}-n)\pi-\frac{1}{(1/2)+n}\sin(\frac{1}{2}+n)\pi$$
$$=\frac{1}{(1/2)-n}\cos(n\pi)-\frac{1}{(1/2)+n}\cos(n\pi)$$
$$=\frac{2n}{(1/4)-n^2}\cos(n\pi)$$
$$=\frac{2n}{(1/4)-n^2}(-1)^n$$

<u>Άσκηση 8.</u> (Προαιρετική:10 μονάδες)

Σύμφωνα με τον λεγόμενο «κανόνα του τραπεζίου», μπορούμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ με την ποσότητα: $T=\frac{h}{2}\left(y_0+2y_1+2y_2+....+2y_{n-1}+y_n\right)$, όπου οι αριθμοί y_n είναι οι τιμές της $f(x)$ στα σημεία της διαμέρισης: $x_0=a, x_1=a+h, x_2=a+2h,...., x_{n-1}=a+(n-1)h$, $x_n=b$, όπου $h=\frac{b-a}{n}$. Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα της προσέγγισης αυτής δίνεται από τον τύπο

$$|E_T|\le\frac{b-a}{12}h^2M$$

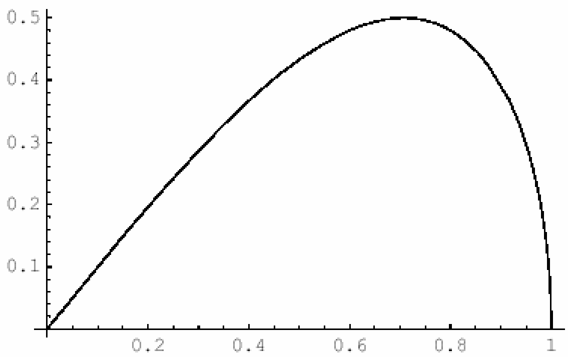
όπου θεωρούμε ότι η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ είναι συνεχής και Μ τυχόν άνω φράγμα των τιμών της $|f''(x)|$ στο $[a,b]$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$ με δύο τρόπους:

α) Αναλυτικά, δηλαδή ακριβώς (Η απάντηση είναι 1/3).

β) Αριθμητικά, δηλαδή προσεγγιστικά, με την μέθοδο του τραπεζίου, γράφοντας ένα απλό πρόγραμμα στον υπολογιστή σας. Χρησιμοποιώντας διαμερίσεις με $n=5, 10, 20, 50, 100,...$ επιβεβαιώστε την ως άνω εξάρτηση του σφάλματος από το n και στρογγυλοποιήστε τις απαντήσεις σας με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

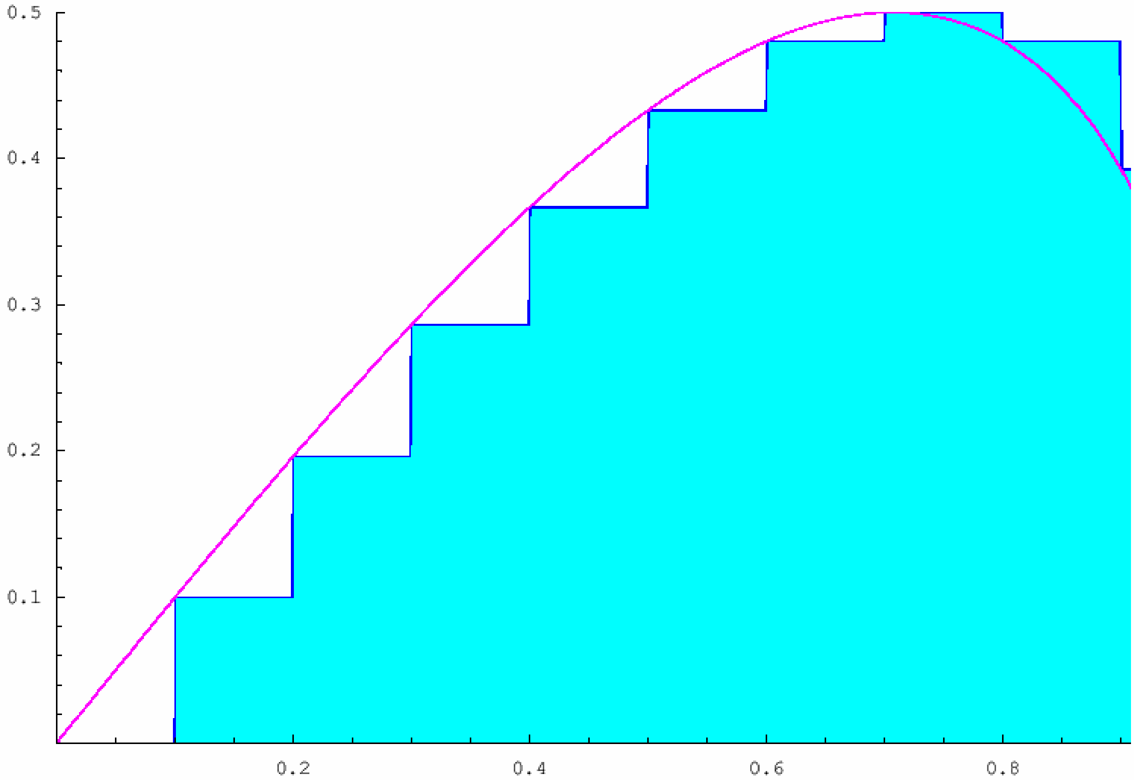
ΛΥΣΗ

```
In[1]:= f[x_] := x √(1 - x²);

In[2]:= Integrate[f[x], {x, 0, 1}]

Out[2]= 1/3

In[3]:= N[%]

Out[3]= 0.333333

In[4]:= LeftRiemannSum[a0_, b0_, n0_] :=
          Module[{a = a0, b = b0, ΔX, k, n = n0, X},
           ΔX = (b - a)/n;
           X_k_ = a + k ΔX;
           Return[ Sum[f[X_(k-1)] ΔX, {k, 1, n}]; ];

In[5]:= LeftRiemannSum[0, 1, 5] // N

Out[5]= 0.304513

In[6]:= Plot[x √(1 - x²), {x, 0, 1}]
```




```
Out[6]= - Graphics -
```

```
In[7]:= f[x_] := x √(1 - x²);
        a = 0;
        b = 1;
        n = 10;
        LeftSum = LeftRiemannSum[a, b, n];
        << Graphics`FilledPlot`;
        << Graphics`Colors`;
        gr1 = Plot[f[x], {x, 0, 1}, PlotPoints → 201,
           PlotStyle → Magenta, DisplayFunction → Identity];
        gr2 = FilledPlot[f[1 + Floor[n (x - 1)]/n], {x, 0, 1}, PlotRange → {{0, 1}, {0, 0.5}},
           PlotStyle → Blue, Fills → Cyan, DisplayFunction -> Identity];
        Show[{gr2, gr1}, DisplayFunction → $DisplayFunction, ImageSize → {640, Automatic}];
        Print["f[x]=", f[x], " over [", a, ",", b, "] using ", n, " subintervals."];
        Print["The left Riemman sum is :"];
        Print["∑_{"k=1"}^{n}", "f[x_{k-1}]Δx=", LeftSum, "=", N[LeftSum]];
```



f[x]=x $\sqrt{1-x^2}$ over [0,1] using 10 subintervals.

The left Riemman sum is :

$\sum_{k=1}^{10} f[x_{k-1}]\Delta x = \frac{12}{125} + \frac{\sqrt{3}}{40} + \frac{\sqrt{6}}{125} + \frac{3\sqrt{11}}{1000} + \frac{9\sqrt{19}}{1000} + \frac{\sqrt{21}}{125} + \frac{7\sqrt{51}}{1000} + \frac{3\sqrt{91}}{1000} = 0.323346$

In[20]:= RightRiemannSum[a0_, b0_, n0_] :=
Module[{a = a0, b = b0, ΔX, k, n = n0, X},
$\Delta X = \frac{b - a}{n}$;
$X_{k\_} = a + k\,\Delta X$;
Return[$\sum_{k=1}^{n} f[X_k]\,\Delta X$];];

In[21]:= RightRiemannSum[0, 1, 5]

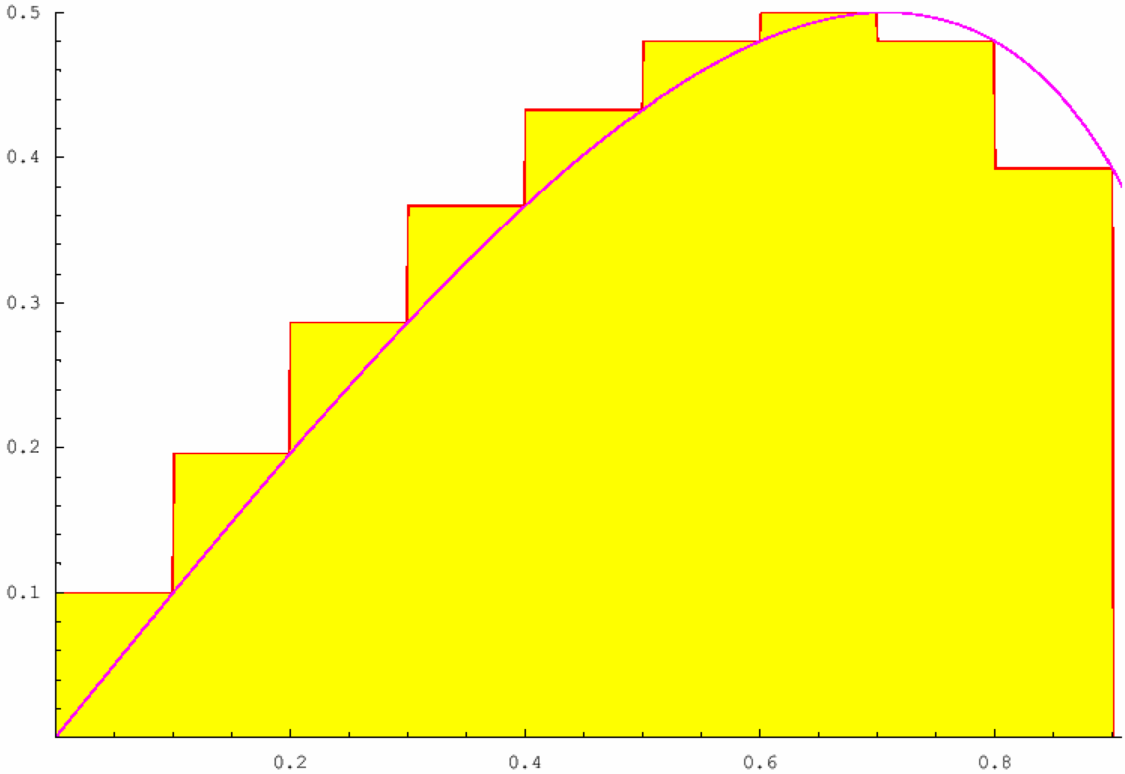
Out[21]= $\frac{24}{125} + \frac{2\sqrt{6}}{125} + \frac{2\sqrt{21}}{125}$

In[22]:= Table[{k, N[LeftRiemannSum[0, 1, k]], N[RightRiemannSum[0, 1, k]]}, {k, 2, 10}] //
TableForm

Out[22]//TableForm=

2	0.216506	0.216506
3	0.270391	0.270391
4	0.292788	0.292788
5	0.304513	0.304513
6	0.311527	0.311527
7	0.316107	0.316107
8	0.319288	0.319288
9	0.321602	0.321602
10	0.323346	0.323346

```
In[23]:= f[x_] := x √(1 - x²);
         a = 0;
         b = 1;
         n = 10;
         RightSum = RightRiemannSum[a, b, n];
         << Graphics`FilledPlot`;
         << Graphics`Colors`;
         gr1 = Plot[f[x], {x, 0, 1}, PlotPoints → 201,
            PlotStyle → Magenta, DisplayFunction → Identity];
         gr3 = FilledPlot[f[1 + Ceiling[n (x - 1)]/n], {x, 0, 1}, PlotRange → {{0, 1}, {0, 0.5}},
            PlotStyle → Red, Fills → Yellow, DisplayFunction -> Identity];
         Show[{gr3, gr1}, DisplayFunction → $DisplayFunction, ImageSize → {640, Automatic}];
         Print["f[x]=", f[x], " over [", a, ",", b, "] using ", n, " subintervals."];
         Print["The right Riemman sum is :"];
         Print["Σ_{"k=1"}^{n}", "f[x_{k-1}]Δx=", RightSum, "=", N[RightSum]];
```



f[x]=x $\sqrt{1-x^2}$ over [0,1] using 10 subintervals.

The right Riemman sum is :

$\sum_{k=1}^{10} f[x_{k-1}]\Delta x = \frac{12}{125} + \frac{\sqrt{3}}{40} + \frac{\sqrt{6}}{125} + \frac{3\sqrt{11}}{1000} + \frac{9\sqrt{19}}{1000} + \frac{\sqrt{21}}{125} + \frac{7\sqrt{51}}{1000} + \frac{3\sqrt{91}}{1000} = 0.323346$

```
In[36]:= f[x_] := x √(1 - x²);
```

```
In[37]:= TrapRule[a0_, b0_, m0_] :=
           Module[{a = N[a0], b = N[b0], k, m = m0, X},
            h = (b - a)/m;
            X_k_ = a + k h;
            Return[ h/2 (f[a] + f[b]) + h Sum[f[X_k], {k, 1, m-1}] ]; ];
```

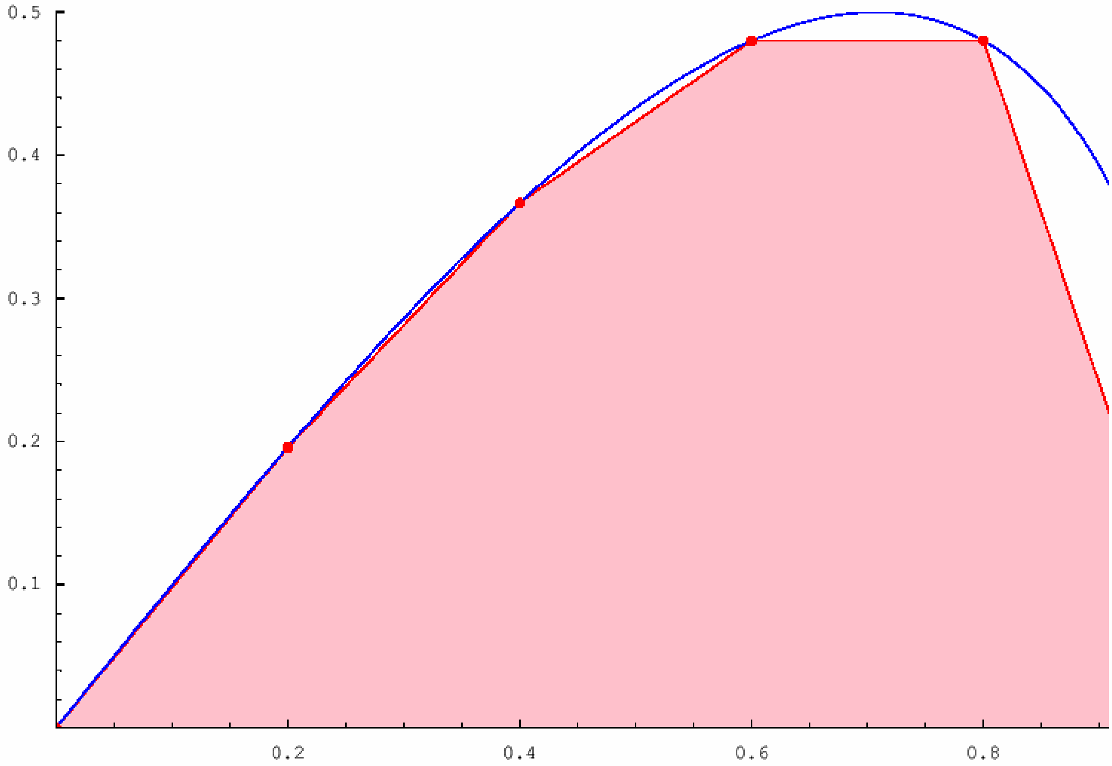
$$h = \frac{b-a}{m};\quad X_{k\_} = a + k\,h;\quad \text{Return}\left[\frac{h}{2}(f[a]+f[b]) + h\sum_{k=1}^{m-1} f[X_k]\right]$$

```
In[38]:= TrapRule[0, 1, 5] // Simplify

Out[38]= 0.304513

In[39]:= Table[{k, TrapRule[0, 1, k]}, {k, 5, 100, 5}] // TableForm
```

Out[39]//TableForm=

5	0.304513
10	0.323346
15	0.327954
20	0.329863
25	0.330862
30	0.331461
35	0.331852
40	0.332124
45	0.332322
50	0.332471
55	0.332587
60	0.332679
65	0.332754
70	0.332815
75	0.332867
80	0.33291
85	0.332947
90	0.332979
95	0.333007
100	0.333031

```
In[40]:= f[x_] := x √(1 - x²);
         a = 0;
         b = 1;
         n = 5;
         TrapezoidalSum = TrapRule[a, b, n];
         X_k_ = a + k (b - a)/n;
         << Graphics`FilledPlot`;
         << Graphics`Colors`;
         pts = Table[{X_k, f[X_k]}, {k, 0, n}];
         dots =
           ListPlot[pts, PlotStyle → {Red, PointSize[0.008]}, DisplayFunction → Identity];
         << Graphics`FilledPlot`;
         << Graphics`Colors`;
         gr1 = Plot[f[x], {x, 0, 1}, PlotPoints → 201,
            PlotStyle → Blue, DisplayFunction → Identity];
         gr5 = FilledListPlot[pts, PlotRange → {{0, 1}, {0, 0.5}},
            PlotStyle → {Red}, Fills → Pink, DisplayFunction -> Identity];
         Show[{gr5, gr1, dots}, DisplayFunction → $DisplayFunction,
           ImageSize → {640, Automatic}];
         Print["f[x]=", f[x], " over [", a, ",", b, "] using ", n, " subintervals."];
         Print["The trapezoidal sum is :"];
         Print["Σ_{"k=1"}^{n}", "f[x_{k-1}]Δx=", TrapezoidalSum, "=", N[TrapezoidalSum]];
```




```
f[x]=x √(1 - x²) over [0,1] using 5 subintervals.

The trapezoidal sum is :
```

$\sum_{k=1}^{5} f[x_{k-1}]\,\Delta x=0.304513=0.304513$
