ΛΥΣΕΙΣ 6ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ - ΠΛΗ 12, 2004-2005

Οι παρακάτω λύσεις των ασκήσεων της 6ης εργασίας (που καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος της ύλης της θεματικής ενότητας ΠΛΗ12) είναι αρκετά εκτεταμένες καθώς έχει δοθεί αρκετή έμφαση στην υπενθύμιση μεθοδολογικών στοιχείων από την θεωρία.

Άσκηση 1. (12 μονάδες)

α) (4 μονάδες) Δίνεται ο (3×3) πίνακας $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ όπου *a, b, c, d, e, f* είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν γνωρίζουμε ότι :

(i) ο πίνακας *A* απεικονίζει το σημείο $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ στο σημείο $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και το σημείο $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ στο $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ του τρισδιάστατου χώρου R^3 και ότι (ii) *det A* = 8, να βρείτε τον πίνακα *A*.

β) (8 μονάδες) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ και στη συνέχεια με την βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων του *A* να διαγωνοποιήσετε τον πίνακα *A*, (δηλαδή να βρείτε πίνακα *P* έτσι ώστε $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ και να βρείτε τις τιμές των *α, β, γ*).

Παρατηρείτε κάποια ιδιότητα του πίνακα *A*; Τι συνέπειες έχει για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του;

ΛΥΣΗ

1α) Από την i) έχουμε ότι $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} \alpha & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό των πινάκων οι προηγούμενες σχέσεις δίνουν αντίστοιχα $\begin{pmatrix} a+c \\ e \\ f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 2a+b+c \\ d+e \\ f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ οι οποίες καταλήγουν στο σύστημα των εξισώσεων

$\{2a+b+c=1,\ a+c=2,\ d+e=-1,\ e=3,\ f=4\}$ που ισοδυναμεί με το

$\{2a+b+c=1,\ a+c=2,\ d=-4,\ e=3,\ f=4\}$.

Από τη ii) όμως *det(A)*=8 και επειδή ο Α είναι **άνω τριγωνικός** έχουμε ότι *det(A)=a d f* (=το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του) οπότε *a d f* =8 και λόγω του ότι *d* = - 4 και *f* = 4 έχουμε *a*(-4) 4 =8 δηλαδή *a*= -1/2. Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή στο σύστημα, από την δεύτερη εξίσωση έχουμε $a+c=2$, άρα *c*=5/2 και με αντικατάσταση των τιμών του *a* και *c* στην *a*+*b*+*c*=2 έχουμε *b=-1/2.*

Αρα $A=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1β) Οι ιδιοτιμές του πίνακα *A* είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα *A που δίδεται από τον τύπο* $|A-\lambda I|$ (το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα *A* ορίζεται επίσης ως $|\lambda I-A|$, το οποίο διαφέρει το πολύ ως προς το πρόσημο από το $|A-\lambda I|$ και προφανώς οι ρίζες παραμένουν οι ίδιες):

$$|A-\lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} 1\text{-}\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3\text{-}\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1\text{-}\lambda \end{vmatrix} =$$ (αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή)

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 1\text{-}\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1\text{-}\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\ [(3\text{-}\lambda)(1\text{-}\lambda)\text{-}4]\ +\ 2(-2)(1\text{-}\lambda) =$$ (κοινός παράγων)

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5)$, με ρίζες $\lambda = 1, -1, 5$.

Στην συνέχεια βρίσκουμε μία βάση για τον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή λ.Τα διανύσματα για την βάση βρίσκονται λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών τον A-λI.

Αρκεί να κάνουμε πράξεις στις γραμμές του A-λI (καθώς ο επαυξημένος πίνακας για το ομογενές γραμμικό σύστημα έχει την τελευταία στήλη μηδενική που παραμένει αμετάβλητη από τις πράξεις στις γραμμές).

Καταλήγουμε σε κλιμακωτή μορφή απ’ όπου είναι εύκολο να βρούμε την γενική λύση του ομογενούς συστήματος και να γράψουμε την ζητούμενη **βάση** ιδιοδιανυσμάτων:

Για λ= -1,

$$A\text{-}(\text{-}1)I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Λύσεις } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ άρα } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Για λ= 1,

$$A\text{-}(1)I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Λύσεις } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ άρα } e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Για λ=5,

$$A\text{-}5\,I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Λύσεις } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{άρα } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Οπότε } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ και ισχύει } PDP^{-1} = A$$

δηλαδή $P^{-1}AP = D$.

Παρατηρούμε τέλος ότι επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός πραγματικός, από το φασματικό θεώρημα (σελ. 117) προκύπτει ότι έχει ιδιοδιανύσματα τα οποία είναι ανα δύο ορθογώνια μεταξύ τους (εφ' όσον αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές), δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο ανά 2 των διανυσμάτων που αποτελούν τις στήλες του P είναι μηδέν, όπως φαίνεται και από το ως άνω αποτέλεσμα. Από τον P προκύπτει ορθογώνιος πίνακας Q που διαγωνοποιεί τον A κανονικοποιώντας τις στήλες του P γράφοντας τον δηλαδή σαν

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$ οπότε ικανοποιείται η σχέση $Q\,Q^T = I$, η οποία ορίζει ένα ορθογώνιο πίνακα ως αυτόν που έχει ως αντίστροφο τον ανάστροφό του.

Άσκηση 2. (8 μονάδες) Δίνεται η απεικόνιση:

$$f : R^3 \to R^3 : (x, y, z) \to (3x - 2y + 4z, x - 3y + 5z, 2x + y - z)$$

α)(2 μονάδες) Αποδείξτε ότι είναι γραμμική και βρείτε τον πίνακά της ως προς τις κανονικές βάσεις του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών της.

β) (6 μονάδες) Βρείτε βάσεις του πυρήνα *Kerf* και της εικόνας *Imf* της *f*.

Λύση 2

2α) Σύμφωνα με τον ορισμό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$,

$(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε:

$f(\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)) = \lambda f((x_1, y_1, z_1)) + \mu f((x_2, y_2, z_2))$.

Οντως

$f(\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)) = f((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2))$ (πράξεις στον $\mathbb{R}^3$)

$=$

$$\begin{aligned}
&(3(\lambda x_1 + \mu x_2) - 2(\lambda y_1 + \mu y_2) + 4(\lambda z_1 + \mu z_2),\\
&\quad (\lambda x_1 + \mu x_2) - 3(\lambda y_1 + \mu y_2) + 5(\lambda z_1 + \mu z_2), \qquad \text{(από τον ορισμό της } f\text{)}\\
&\qquad 2(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2))
\end{aligned}$$

$=$

$$\begin{aligned}
&(\lambda[3x_1 - 2y_1 + 4z_1] + \mu[3x_2 - 2y_2 + 4z_2],\\
&\quad \lambda[x_1 - 3y_1 + 5z_1] + \mu[x_2 - 3y_2 + 5z_2], \qquad \text{(πράξεις στις συνιστώσες)}\\
&\qquad \lambda[2x_1 + y_1 - z_1] + \mu[2x_2 + y_2 - z_2])
\end{aligned}$$

$=$

$$\begin{aligned}
&\lambda(3x_1 - 2y_1 + 4z_1, x_1 - 3y_1 + 5z_1, 2x_1 + y_1 - z_1) +\\
&\quad + \mu(3x_2 - 2y_2 + 4z_2, x_2 - 3y_2 + 5z_2, 2x_2 + y_2 - z_2) \qquad \text{(πράξεις στον } \mathbb{R}^3\text{)}
\end{aligned}$$

$= \lambda f((x_1, y_1, z_1)) + \mu f((x_1, y_1, z_1))$. (από τον ορισμό της f)

Το πεδίο ορισμού είναι ο $\mathbb{R}^3$ με την συνήθη (κανονική διατεταγμένη) βάση $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ όπου $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ και το πεδίο τιμών ο ίδιος χώρος $\mathbb{R}^3$ (με την ίδια βάση). Χρησιμοποιώντας την συνήθη βάση, έχουμε την ευκολία να βρίσκουμε τον πίνακα στήλη των συντελεστών του διανύσματος $u = (x\ , y\ , z\ ) \in \mathbb{R}^3$, ως προς αυτήν, άμεσα: $[u]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας της f ως προς τις συνήθεις (κανονικές) βάσεις του πεδίου ορισμού ($\mathbb{R}^3$) και του πεδίου τιμών της (επίσης $\mathbb{R}^3$) είναι ο πίνακας με στήλες $[f(e_1)]_B$, $[f(e_2)]_B$, $[f(e_3)]_B$.

Υπολογίζουμε: $[f(e_1)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[f(e_2)]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $[f(e_3)]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, οπότε ο πίνακας της f ως προς τις συνήθεις βάσεις είναι ο $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ και

έχει την ιδιότητα να ικανοποιεί την σχέση $\left[f(x,y,z)\right]_B = A\left[u\right]_B$ που επαληθεύουμε άμεσα

από την $\begin{pmatrix} 3x-2y+4z \\ x-3y+5z \\ 2x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2β) Λόγω της προηγούμενης ιδιότητας του πίνακα της f για να βρούμε μία βάση του πυρήνα *Kerf* και μία βάση της εικόνας *Imf* αρκεί να μετασχηματίσουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή χρησιμοποιώντας πράξεις στις γραμμές:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 7 & -11 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -11/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2/7 \\ 0 & \boxed{1} & -11/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ετσι αφού ο πυρήνας της f είναι $Kerf = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}$ αρκεί να λύσουμε το γραμμικό ομογενές σύστημα $AX = 0_{3\times 1}$.

Από την παραπάνω κλιμακωτή μορφή του Α έχουμε ότι όλες οι λύσεις δίνονται από

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a/7 \\ 11a/7 \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2/7 \\ 11/7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Συνεπώς μία βάση του *Kerf* είναι {(-2/7,11/7,1)}.

Σημείωση:Το διάνυσμα της βάσης (-2/7,11/7,1) μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε **μη μηδενικό** πολλαπλάσιό του, π.χ. το (-2,11,7).

Για την εικόνα *Imf*:

Επειδή $f(x,y,z) = f(x e_1 + y e_2 + z e_3) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$, έπεται ότι *Imf* παράγεται από τα $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$. Συνεπώς για να βρούμε μία βάση της *Imf* αρκεί να βρούμε μία βάση του χώρου στηλών του πίνακα A. Αυτό όμως είναι φανερό από την κλιμακωτή μορφή του πίνακα A: οι πρώτες δυο στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η τρίτη είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων στηλών (τρίτη = (-2/7) πρώτη + (11/7) δεύτερη).

Το ίδιο ισχύει και για τον πίνακα Α: οι δύο πρώτες στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η τρίτη έχει την ίδια ακριβώς εξάρτηση από τις δύο πρώτες όπως και η αντίστοιχη της κλιμακωτής μορφής! Ετσι μία βάση της *Imf* δίνεται από το σύνολο $\{f(e_1), f(e_2)\}$ δηλαδή {(3,1,2), (-2, -3, 1)}.

Σημείωση: στην προκειμένη περίπτωση που ο πίνακας έχει μικρή διάσταση και έχουμε υπολογίσει την διάσταση του πυρήνα, μπορούμε να βρούμε πιο σύντομα μία βάση της εικόνας έχοντας υπ' όψιν ότι αφού dim *Imf* = dim $\mathbb{R}^3$ - dim *Kerf* =3-1=2 και ελέγχοντας ότι τα δύο διανύσματα $f(e_1)$, $f(e_2)$ δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους.

<u>Άσκηση 3.</u> (12 μονάδες)

Θεωρείστε το παρακάτω σύστημα:.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x & - & 12y & + & 6z & = & 6 \\ 3x & - & 5y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & - & 6y & + & \alpha z & = & \beta \end{array}$$

Βρείτε τις τιμές των α και β ώστε το σύστημα αυτό: (ι) Να μην έχει λύση (ιι) Να έχει άπειρες λύσεις και ιιι) Να έχει μοναδική λύση.

ΛΥΣΗ

Το σύστημα έχει την μορφή $A.\underline{x} = \underline{b}$

1^{ος} τρόπος: <u>Απαλοιφή Gauss</u>

$$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & | & 6 \\ 3 & -5 & 5 & | & 13 \\ 2 & -6 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 3 & -5 & 5 & | & 13 \\ 2 & -6 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix} \to \begin{array}{r} \\ \Gamma_2' = \Gamma_2 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma_3' = \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & -2 & \alpha - 2 & | & \beta - 2 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \Gamma_3' = \Gamma_3 + 2\Gamma_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 10 \\ 0 & 0 & \alpha + 2 & | & \beta + 18 \end{bmatrix}.$$

1) Αν $a + 2 \neq 0$, δηλαδή $a \neq -2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση.

2) Αν $a + 2 = 0$, δηλαδή $a = -2$, τότε

2$_\alpha$) αν $\beta \neq -18$, το σύστημα δεν θα έχει καμία λύση είναι αδύνατο.

2$_\beta$)Για $\alpha =$ -2 **και** για $\beta =$ -18 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Ετσι:

(ι) το συστημα δεν έχει λύση όταν $a = -2$ και $\beta \neq -18$

(ιι) έχει άπειρες λύσεις όταν $a = -2$ και $\beta = -18$ και

(ιιι) έχει μοναδική λύση όταν $a \neq -2$

Σημείωση:

Με χρήση οριζουσών έχουμε τα ακόλουθα:

Βρίσκουμε τις ορίζουσες D, D_x,D_y, D_z.

Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $x = \dfrac{D_x}{D}, y = \dfrac{D_y}{D}, z = \dfrac{D_z}{D}$

Αν $D = 0$ τότε:

Αν $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ ή $D_z \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο

Αν $D_x = 0$ και $D_y = 0$ και $D_z = 0$, αυτό αποτελεί **αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη** για να είναι το σύστημα αόριστο. Πρέπει να ελεγχθεί τι ακριβώς συμβαίνει σε κάθε περίπτωση. Στη δική μας περίπτωση, όπου α = -2 σημαίνει $D = 0$, $D_x = D_y = D_z = 0$ ικανοποιούνται για β = -18 και το σύστημα είναι πράγματι αόριστο, όπως προκύπτει και από την ως άνω απαλοιφή κατά Gauss.

<u>**Άσκηση 4.**</u> (10 μονάδες)
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{2^n}$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}$, (δ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+1}$ (ε) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

ΛΥΣΗ

4α) Ισχύει ότι $0<\frac{2^n}{3^n+1}<\frac{2^n}{3^n}$, για κάθε $n\geq 1$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$ συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά (σελ. 34) με λόγο 2/3, απολύτως μικρότερο της μονάδος. Αρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$ συγκλίνει (σύμφωνα με το κριτήριο σύγκ**ρ**ισης,σελ. 36).

4β) Η σειρά είναι θετικών όρων.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^2+n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n^2+n}{2^n}}=\frac{(n+1)^2+n+1}{2(n^2+n)}=\frac{1}{2}\frac{n^2+3n+2}{n^2+n}=\frac{1}{2}\frac{1+3\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}<1$$

Αρα σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει.

4γ) Η σειρά είναι θετικών όρων και σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{1}{\sqrt{n!}}}=\frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}}=\sqrt{\frac{1}{n+1}}\to 0$$. Αρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}$ συγκλίνει.

4δ) Επειδή $\frac{n^3}{n^4+1}>\frac{n^3}{n^4+n^4}=\frac{1}{2n}$, από το κριτήριο σύγκ**ρ**ισης (σελ. 36) προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+1}$ αποκλίνει, καθώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει (αρμονική σειρά σελ. 40).

4ε) Παρατηρούμε ότι $0<\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}<\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}$.

Άρα από το κριτήριο της σύγκ**ρ**ισης με p -σειρά όπου $p>1$ (σελ.40) προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$ συγκλίνει.

Άσκηση 5. (10 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (2x-1)^2(x+1)$$

(i) (2 μονάδες) Να βρεθούν τα σημεία όπου η συνάρτηση τέμνει τους άξονες X, Y.

(ii) (8 μονάδες) Να βρεθούν και χαρακτηρισθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ΛΥΣΗ

i) Για $x = 0$ η τιμή της f, y = $f(0) = 1$. Η f παίρνει την τιμή y = 0, όταν x = - 1 ή x = ½.

Υπολογίζουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{df(x)}{dx} = 4(2x-1)(x+1) + (2x-1)^2 = 3(2x-1)(2x+1)$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 3[2(2x+1) + 2(2x-1)] = 24x\,.$$

Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται για τις τιμές $x = \pm\frac{1}{2}$.

Επειδή για x = ½ , $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 12 > 0$, το σημείο (½ , 0) είναι **τοπικό** ελάχιστο.

Επειδή για x = - ½ , $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -12 < 0$, το σημείο (-½ , 2) είναι **τοπικό** μέγιστο.

Για τα σημεία καμπής: οι τιμές του x όπου μηδενίζεται η δευτερη παράγωγος $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0$. είναι $x = 0$ και επειδή το πρόσημο της $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ αλλάζει εκατέρωθεν του $x = 0$ το σημείο (0, 1) είναι σημείο καμπής.

x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
f'	+		-		-		+
f''	-		-		+		+
f	↗		↘		↘		↗
		Τ.Μ $\left(-\frac{1}{2},2\right)$		Σ.Κ $(0,1)$		Τ.Ε $\left(\frac{1}{2},0\right)$	

Επιπλέον $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης μπορεί τώρα να γίνει εύκολα.

Άσκηση 6. (8 μονάδες)

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

(i) (4 μονάδες) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin^2 t}{t^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x-1)}{\sin x - x}$

(ii) (4 μονάδες) Βρείτε τις τιμές των λ και μ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda x}{x+1}+1 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \dfrac{e^{\mu x}-1}{x} & x>0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

ΛΥΣΗ

(i)

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin^2 t)'}{(t^2)'}=\lim_{t\to 0}\frac{2.\sin t.(\sin t)'}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{2.\sin t.\cos t}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin 2t)'}{(2t)'}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos 2t}{2}=\lim_{t\to 0}\cos 2t=\cos 0=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\cos x-1)}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x)'-x'}{(\sin x)'-x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-1}{\cos x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\sin x-x\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-x\sin x}{\cos x}=3$$

(ii) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 θα πρέπει να είναι και συνεχής στο 0. Συνεπώς:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ Δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\mu x}-1}{x}\underset{L'Hospital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\mu e^{\mu x}}{1}=\mu.e^0=\mu.1=\mu\\
&\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\lambda x}{x+1}+1\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\lambda x+x+1}{x+1}\right)=1\\
&f(0)=1
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mu=1$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 0 θα πρέπει οι πλευρικές παράγωγοι στο 0 να είναι ίσες.
Δηλαδή $f'(0+)=f'(0-)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\\ \quad\underset{L'Hospital}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{2x}\underset{L'Hospital}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{2}\underset{\mu=1}{=}\dfrac{1}{2}\\ \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{\lambda x}{x+1}+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\lambda x}{x.(x+1)}=\\ \quad=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\lambda}{(x+1)}=\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow f'(0)=\lambda=\frac{1}{2}$$

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε να λύσουμε την άσκηση χωρίς την εμπλοκή της συνέχειας απαιτώντας μόνο να ορίζονται οι πλευρικές παράγωγοι στο μηδέν, δηλαδή να είναι πεπερασμένοι αριθμοί και ίσες μεταξύ τους:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{e^{\mu x}-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\mu x}-1-x}{x^2}\underset{L'Hospital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\mu e^{\mu x}-1}{2x}.$$

Για να είναι το προηγούμενο όριο πραγματικός αριθμός πρέπει και αρκεί μ=1. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{2x}\underset{L'Hospital}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$. Δηλαδή για μ=1, η από δεξιά παράγωγος στο 0 υπάρχει και ισούται προς ½. Συνεχίζοντας έχουμε ότι η από αριστερά παράγωγος ισούται προς λ οπότε λ=1/2.

Μία παρατήρηση ακόμη:
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor για να βρούμε την συνθήκη ώστε το όριο να υπάρχει και να το υπολογίσουμε:

$e^{\mu x}=1+\dfrac{\mu x}{1!}+\dfrac{(\mu x)^2}{2!}+o(x^3)$. Αρα $\dfrac{e^{\mu x}-1-x}{x^2}=\dfrac{(\mu-1)}{x}+\dfrac{\mu^2}{2}+o(x)$, οπότε το όριο, όταν $x\to 0$, υπάρχει αν και μόνο αν μ=1 και ισούται προς $\dfrac{\mu^2}{2}=\dfrac{1}{2}$.

<u>Άσκηση 7.</u> (6 μονάδες)
Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx \qquad I_2 = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$$

$I_3 = \int \sqrt{4-x^2}\,dx$ (Χρησιμοποιείστε την αντικατάσταση $x = 2\cos\theta$)

ΛΥΣΗ

- $I_1 = \int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$

Πριν από όλα παρατηρούμε ότι ο αριθμητής του κλάσματος διαιρείται ακριβώς με το (x-1) οπότε γράφουμε $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x-1)(x^2 + 6x + 9) = (x-1)(x + 3)^2$.

$$\frac{x^3+5x^2+3x-9}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{(x-1)(x+3)^2}{(x-1)(x^2-2x-5)} = \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+5}\ , \quad x \neq 1$$

και επομένως

$$I_1 = \int \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{x^2-2x+5+8x+4}{x^2-2x+5}dx = \int \left(1+\frac{8x+4}{x^2-2x+5}\right)dx = x + \int \frac{8x+4}{x^2-2x+5}dx$$

$$I_1 = x + 4\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}dx = x + 4\int \frac{2x-2+3}{x^2-2x+5}dx$$

$$= x + 4\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2+4}dx$$

$$= x + 4\ln(x^2-2x+5) + 6\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

Η παραπάνω ανάλυση του κλάσματος έγινε επειδή μπορούσαμε να πάρουμε ένα ολοκλήρωμα του οποίου ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή (οπότε παίρνουμε λογάριθμο, ενώ το δεύτερο είναι γνωστό από τους πίνακες.

- $I_2 = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$\sqrt{x^2+2x+2} = \sqrt{(x+1)^2+1}$

Θέτουμε $u = x+1 \Rightarrow du = dx$

Έχουμε, $I_2 = \int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}du = \int \frac{d}{du}(\sqrt{u^2+1})du = \sqrt{u^2+1} + c = \sqrt{x^2+2x+2} + c$

Θέτουμε $u^2 + 1 = w$, οπότε $dw=2udu$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I_2 = \int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}du = \int \frac{d}{du}(\sqrt{u^2+1})du = \sqrt{u^2+1} + c = \sqrt{x^2+2x+2} + c$$

Παρατήρηση: Το ίδιο θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε και για το αρχικό κλάσμα ως προς *x*: δηλαδή με την αντικατάσταση $x^2 + 2x + 2 = w$, έχουμε *dw=2(x+1)dx κλπ.*

- $I_3 = \int \sqrt{4-x^2}\,dx$

Για $-2 \le x \le 2$ θέτουμε $x = 2\cos\theta$, οπότε $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ με $0 \le \theta \le \pi$. Διαφορίζοντας έχουμε $dx = -2\sin\theta\, d\theta$. Η ολοκληρωτέα ποσότητα γίνεται

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\cos^2\theta} = 2\sqrt{1-\cos^2\theta} = 2|\sin\theta| = 2\sin\theta$ (επειδή για $0 \le \theta \le \pi$, $\sin\theta \ge 0$).

Αρα $I_3 = \int 2\sin\theta \cdot (-2\sin\theta) d\theta = -4\int \sin^2\theta d\theta$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ έχουμε

$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, οπότε

$$I_3 = -4\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = -2\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c = -2\theta + \sin 2\theta + c = -2\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta + c =$$

$$-2\theta + (2\cos\theta)\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta} + c = -2\cdot\cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + c\,.$$

Άσκηση 8. (10 μονάδες)

(i) (3 μονάδες) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I_0 = \int_1^2 x dx \quad \text{και} \quad I_1 = \int_1^2 x \cdot \ln x dx$$

(ii) (5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης να αποδείξετε τον τύπο:

$$2I_n = 4(\ln 2)^n - nI_{n-1}\ , \quad \forall n \geq 1 \quad \text{όπου } I_n = \int_1^2 x \cdot (\ln x)^n dx$$

(iii) (2 μονάδες) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_3

ΛΥΣΗ

(i) $I_0 = \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

$$I_1 = \int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}.\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \left[2.\ln 2 - \frac{1}{2}.\ln 1\right] - \frac{1}{2}\int_1^2 x.dx =$$

$$= 2.\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2.\ln 2 - \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{4} = 2.\ln 2 - \frac{3}{4}$$

(ii)

$$I_n = \int_1^2 x \cdot (\ln x)^n dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot (\ln x)^n dx = \left[(\ln x)^n \frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \frac{n}{2}\int_1^2 x(\ln x)^{n-1} dx =$$

$$= 2(\ln 2)^n - \frac{n}{2}I_{n-1}.\ \text{ Αρα } 2I_n = 4(\ln 2)^n - nI_{n-1},\ \forall n \geq 1.$$

(iii)

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αναδρομικό τύπο παίρνουμε:

Για $n=3$ $\quad 2I_3 = 4(\ln 2)^3 - 3I_2$

Για $n=2$ $\quad 2I_2 = 4(\ln 2)^2 - 2I_1$

Για $n=1$ $\quad 2I_1 = 4\ln 2 - I_0$

$$2I_3 = 4(\ln 2)^3 - 3[2(\ln 2)^2 - I_1] = 4(\ln 2)^3 - 3[2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 + \frac{3}{4}] = 4(\ln 2)^3 - 6(\ln 2)^2 + 6\ln 2 - \frac{9}{4}$$

Αρα $I_3 = 2(\ln 2)^3 - 3(\ln 2)^2 + 3\ln 2 - \frac{9}{8}.$

Άσκηση 9. (14 μονάδες)

α) (7 μονάδες) Αναπτύξτε σε σειρά Taylor κέντρου 0 την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης; (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\quad |x|<1$).

β) (7 μονάδες) Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την συνάρτηση $f(x) = x^2,\ -\pi<x<\pi$.

ΛΥΣΗ

9α) Θεωρούμε γνωστό ότι η σειρά Taylor κέντρου 0 για την συνάρτηση $\dfrac{1}{1-x}$, δίδεται από την σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ που συγκλίνει για $|x|<1$, και αποκλίνει παντού αλλού και ότι

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\quad |x|<1.$$

Στον προηγούμενο τύπο θέτουμε όπου x το $-x^2$ και έχουμε:

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

τότε και μόνον τότε όταν $|x^2|<1$,δηλαδή $|x|^2<1$**,** δηλαδή $|x|<1$. Αρα, λόγω μοναδικότητας, η σειρά Taylor κέντρου 0 για την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ έχει ακτίνα σύγκλισης ίση προς 1 και δίδεται από την

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ .$$

9β) Η λύση βρίσκεται στην σελ 197 βιβλίου «Λογισμός μίας μεταβλητής» **με μία επιπλέον παρατήρηση που διευκολύνει τους υπολογισμούς:**
Ο υπολογισμός των συντελεστών β_n είναι άμεσος καθώς η συνάρτηση που έχουμε να αναπτύξουμε είναι άρτια αφού για x στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, $(-x)^2= x^2$. Ετσι έχουμε ότι $\beta_n=0$, $n=1,2,3,\ldots$.

Άσκηση 10. (10 μονάδες)

α) (5 μονάδες) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

$x=-2y^2$ και $x=1-3y^2$

β) (5 μονάδες) Να βρεθεί ο όγκος εκ περιστροφής του μικρότερου χωρίου που ορίζεται από τον κύκλο $x^2+y^2=16$ και την ευθεία $x+y=4$ γύρω από τον άξονα των χ.

ΛΥΣΗ

α) Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπύλων λύνοντας το σύστημα το δύο εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} x=-2y^2 \\ x=1-3y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y^2 \\ -2y^2=1-3y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y^2 \\ y^2=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y^2 \\ y=1 \acute{\eta} \quad y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} x=-2 & & x=-2 \\ \kappa\alpha\iota & \acute{\eta} & \kappa\alpha\iota \\ y=1 & & y=-1 \end{array}$$

Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν χωρίου είναι:

$$\int_{-1}^{1}\left|\left(1-3y^2\right)-\left(-2y^2\right)\right|.dy=\int_{-1}^{1}\left|1-y^2\right|.dy=\int_{-1}^{1}\left(1-y^2\right).dy=$$

$$=y\Big|_{-1}^{1}-\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

β)Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπύλων λύνοντας το σύστημα το δύο εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=16 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} x=0 & & x=4 \\ \kappa\alpha\iota & \acute{\eta} & \kappa\alpha\iota \\ y=4 & & y=0 \end{array}$$

ο όγκος εκ περιστροφής του μικρότερου χωρίου που ορίζεται από τον κύκλο $x^2+y^2=16$ και την ευθεία $x+y=4$ γύρω από τον άξονα των χ δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$V=\pi\int_0^4\left|(16-x^2)-(4-x)^2\right|.dx=\pi\int_0^4(16-x^2)-(4-x)^2.dx=$$

$$=\pi\int_0^4(16-x^2-16+8x-x^2).dx=$$

$$=\pi\int_0^4(8x-2x^2).dx=\pi.\left(8.\frac{x^2}{2}\Big|_0^4-2.\frac{x^3}{3}\Big|_0^4\right)=$$

$$=\pi\left(8.8-2\frac{64}{3}\right)=\pi.\left(64-\frac{128}{3}\right)=\pi\left(\frac{192}{3}-\frac{128}{3}\right)=\frac{64\pi}{3}.$$