ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΘΕ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΉ Ι (ΠΛΗ 12)

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

Άσκηση 1. (8 μον.)

(α) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = af(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (a πραγματικός αριθμός). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{ax}}$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0) = 2$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $y = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$. Να δείξετε ότι ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan(x)\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \qquad (1)$$

Λύση:

(α) Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{ax}}$ έχουμε σύμφωνα με τους κανόνες της σελ. 78 του βιβλίου $g'(x) = \dfrac{e^{ax} f'(x) - ae^{ax} f(x)}{e^{2ax}} = \dfrac{f'(x) - af(x)}{e^{ax}}$ = 0, αφού μας δίνεται $f'(x) = af(x)$ και η εκθετική συνάρτηση e^{ax} δεν μηδενίζεται σε κανένα $x \in \mathbb{R}$. Άρα η *g(x)* είναι σταθερή. Επομένως, αν ονομάσουμε τη συνάρτηση αυτή $g(x) = c$, δείξαμε ότι $f(x) = ce^{ax}$. Για βρούμε τον ακριβή τύπο της *f(x)* αρκεί να υπολογίσουμε τη σταθερά *c*. Αφού όμως δίνεται $f(0) = 2$, είναι φανερό ότι $c = 2$ και ο ζητούμενος τύπος είναι $f(x) = 2e^{ax}$.

(β) Αρχίζοντας από τη συνάρτηση $y = \dfrac{e^x}{\cos(x)} \Rightarrow \cos(x)y = e^x$ και παραγωγίζοντας ως προς *x* έχουμε $\cos(x)\dfrac{dy}{dx} + y(-\sin(x)) = e^x$. Επομένως,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + y\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{e^x}{\cos(x)} + y\tan(x) \qquad (2)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση αυτή άλλη μία φορά ως προς *x*, παίρνουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^x\cos(x)+e^x\sin(x)}{\cos^2(x)} + \tan(x)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\cos^2(x)} \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (3) και χρησιμοποιώντας το δεδομένο $y = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$ έχουμε για το αριστερό μέρος της (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan(x)\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{e^x}{\cos(x)} + \frac{e^x}{\cos(x)}\tan(x) + \tan(x)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\cos^2(x)} - 2\tan(x)\frac{dy}{dx} - 2y =$$

$$y + y\tan(x) - \tan(x)\left[\frac{e^x}{\cos(x)} + y\tan(x)\right] + \frac{y}{\cos^2(x)} - 2y = -y - y\tan^2(x) + \frac{y}{\cos^2(x)} =$$

$$= -y - y\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{y}{\cos^2(x)} = \frac{-y\left[\cos^2(x)+\sin^2(x)\right]+y}{\cos^2(x)} = \frac{-y+y}{\cos^2(x)} = \frac{0}{\cos^2(x)} = 0$$

αφού $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. Πρέπει να σημειώσουμε όμως ότι όλα αυτά ισχύουν για $\cos(x)\neq 0, \quad x \neq (2k+1)\pi/2, \quad k\in\mathbb{Z}.$

Άσκηση 2. (12 μον.)

Αναζητούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $t\in\mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$$

όπου οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή t και ισχύει $x(0)=2, y(0)=0, z(0)=1$

Θέτοντας $Y = \begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}^T$ και $\dfrac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} x' & y' & z'\end{bmatrix}^T$ το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$\frac{dY}{dt} = AY, \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = D$, όπου D διαγώνιος πίνακας.

(β) Θέτοντας $Z = P^{-1}Y$, δείξτε ότι η επίλυση του αρχικού συστήματος καταλήγει στην επίλυση του $\dfrac{dZ}{dt} = DZ$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 1(α), λύστε το σύστημα $\dfrac{dZ}{dt} = DZ$ και βρείτε τις συναρτήσεις x, y, z.

Λύση:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι:

$$\varphi(\lambda) = \det\left(\lambda I - A\right) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

αναπτύσσοντας ως προς την 3^{η} στήλη προκύπτει

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)[(\lambda-3)^2-1] = (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

Οι ιδιοτιμές (ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) είναι το 4 και το 2 (διπλή)

Μια βάση του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής $\lambda = 4$ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$\left(4I - A\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

Επομένως τα διανύσματα του ιδιοχώρου είναι της μορφής

$$[-x_3 \quad -x_3 \quad x_3]^T = x_3[-1 \quad -1 \quad 1]^T, x_3 \in \mathbb{R}$$

Μια βάση του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής $\lambda = 2$ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$\left(2I - A\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Επομένως τα διανύσματα του ιδιοχώρου είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + 0x_3 \\ x_2 + 0x_3 \\ 0x_2 + x_3 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}$$

Τα διανύσματα $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ παράγουν τον ιδιοχώρο και είναι γραμμικώς ανεξάρτητα , άρα αποτελούν μια βάση του.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής ισούται με την γεωμετρική της πολλαπλότητα. Άρα ο πίνακας Α διαγωνοποιείται (σελ.114 § 6.3).

Αν θέσουμε

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε γνωρίζουμε ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος και

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ με } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

β) Έστω

$$Z = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + a_{13}z(t) \\ a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + a_{23}z(t) \\ a_{31}x(t) + a_{32}y(t) + a_{33}z(t) \end{bmatrix}$$

όπου τα a_{ij} είναι τα στοιχεία του P^{-1} (πραγματικοί αριθμοί ανεξάρτητοι του t).
Από τους κανόνες παραγώγισης προκύπτει:

$$\frac{dz_i}{dt} = a_{i1}x^{/} + a_{i2}y^{/} + a_{i3}z^{/}\ ,\ i = 1,2,3$$

Άρα

$$\frac{dZ}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11}x^{/} + a_{12}y^{/} + a_{13}z^{/} \\ a_{21}x^{/} + a_{22}y^{/} + a_{23}z^{/} \\ a_{31}x^{/} + a_{32}y^{/} + a_{33}z^{/} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x^{/} \\ y^{/} \\ z^{/} \end{bmatrix} = P^{-1}\frac{dY}{dt}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{dY}{dt} = AY \Leftrightarrow \frac{dY}{dt} = PDP^{-1}Y \Leftrightarrow \frac{dY}{dt} = PDZ \Leftrightarrow P^{-1}\frac{dY}{dt} = DZ \Leftrightarrow \frac{dZ}{dt} = DZ$$

Δηλαδή οδηγηθήκαμε στην επίλυση 3 **χωριστών εξισώσεων της ίδιας μορφής**:

$$\frac{dZ}{dt} = DZ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1^{/}(t) \\ z_2^{/}(t) \\ z_3^{/}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4z_1(t) \\ 2z_2(t) \\ 2z_3(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1^{/}(t) = 4z_1(t) \\ z_2^{/}(t) = 2z_2(t) \\ z_3^{/}(t) = 2z_3(t) \end{cases}$$

Επομένως (από την άσκηση 1α)

$$\begin{cases} z_1(t) = c_1 e^{4t} \\ z_2(t) = c_2 e^{2t} \ , \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\ z_3(t) = c_3 e^{2t} \end{cases}$$

Επειδή $Z = P^{-1}Y$ προκύπτει $Y = P\ Z$ και άρα

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 e^{4t} - c_2 e^{2t} \\ -c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{4t} + c_3 e^{2t} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = -c_1 e^{4t} - c_2 e^{2t} \\ y(t) = -c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} \\ z(t) = c_1 e^{4t} + c_3 e^{2t} \end{cases}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $x(0) = 2, y(0) = 0, z(0) = 1$, άρα

$$\begin{cases} -c_1 - c_2 = 2 \\ -c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c_1 = 2 \\ c_1 = c_2 \\ c_3 = 1 - c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 2 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= e^{4t} + e^{2t} \\ y(t) &= e^{4t} - e^{2t} \\ z(t) &= -e^{4t} + 2e^{2t} \end{aligned}}$$

Άσκηση 3. (12 μον.)

(α) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $y = \left(3\sqrt{x} + 6\right)\left(2x^3 - \dfrac{1}{x}\right)$ ii) $y = \dfrac{\left(x^2 + 1\right)\cos(x)}{3 - x\tan(x)}$,

iii) $y = \cos^3\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ iv) $y = \ln\left(\cos^2(x) + 1\right)$

(β) Έστω συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$, $f'(0) > 0$ και $f(1) = f(0) + \dfrac{1}{2}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in (0,1)$, έτσι ώστε $f'(a) = a$

(γ) Να επαληθευθεί το Θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση
$y = x^3 + 4x^2 - 7x + 10 \qquad \sigma\tau o \qquad [-1, 2]$

Λύση:

(α)

i) Αφού $y=\left(3\sqrt{x}+6\right)\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)$, έχουμε σύμφωνα με τους κανόνες της σελ. 78:

$$\frac{dy}{dx}=\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)+\left(3\sqrt{x}+6\right)\left(6x^2+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=21x^{5/2}+\frac{3}{2x^{3/2}}+36x^2+6x^{-2}$$

ii) Παραγωγίζουμε την $y=\frac{\left(x^2+1\right)\cos(x)}{3-x\tan(x)}$ και απλοποιούμε όσο είναι δυνατόν**:**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(3-x\tan(x)\right)\left[2x\cos(x)-\sin(x)\left(x^2+1\right)\right]+\cos(x)\left(x^2+1\right)\left[\tan(x)+\frac{x}{\cos^2(x)}\right]}{\left(3-x\tan(x)\right)^2}=$$

$$=\frac{6x\cos^2(x)-(2x^2+1)\sin(2x)+x(x^2+1)(\sin^2(x)+1)}{\left(3-x\tan(x)\right)^2\cos(x)}$$

iii) Παραγωγίζοντας την $y=\cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$ και απλοποιώντας έχουμε:

$$\frac{dy}{dx}=3\cos^2\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(-\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)\frac{(x+1)-x}{\left(x+1\right)^2}=\frac{-3}{\left(x+1\right)^2}\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)\cos^2\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

iv) Παραγωγίζοντας την $y=\ln\left(\cos^2(x)+1\right)$ και απλοποιώντας βρίσκουμε:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2(x)+1}2\cos(x)\left(-\sin(x)\right)=\frac{-2\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x)+1}=\frac{-\sin(2x)}{\cos^2(x)+1}$$

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}, x\in[0,1]$ που είναι συνεχής στο [0,1], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (0,1) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $g'(x)=f'(x)-x$.
Επομένως από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $a\in(0,1)$ έτσι ώστε
$g'(a)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}$. Όμως $g(0)=f(0)$ και $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}=f(0)$, επομένως
$g'(a)=0\Leftrightarrow f'(a)-a=0\Leftrightarrow f'(a)=a$

(γ) Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα [-1,2], και ισχύει $f(-1)=f(2)=0$, παίρνοντας την παράγωγο βρίσκουμε :

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 7 \qquad (1)$$

Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει τιμή του ξ μεταξύ των -1 και 2 για την οποία έχουμε $f'(\xi) = 0$. Πράγματι, από την (1) βρίσκουμε ότι οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{37}}{3}$, $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{37}}{3}$, οπότε το $\xi = x_2$ είναι η ρίζα που ζητούσαμε αφού -1 < x_2 <2.

Άσκηση 4. (8 μον.)

Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f(a) = b$, $f(b) = a$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Για τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-a-b}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[a,b]$.

(β) Υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $(a+b, 0)$.

Υπόδειξη: Για το (β), εφαρμόστε το θεώρημα Rolle στη $g(x)$, παρατηρώντας ότι η εφαπτόμενη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Λύση

(α) Η $g(x)$ στο $[a,b]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής, ενώ η $g(x)$ στο (a,b) είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x) = \dfrac{f'(x)(x-a-b) - f(x)}{(x-a-b)^2}$

Επιπλέον ισχύει $g(a) = \dfrac{f(a)}{a-a-b} = \dfrac{b}{-b} = -1,\ g(b) = \dfrac{f(b)}{b-a-b} = \dfrac{a}{-a} = -1$ και επομένως $g(a) = g(b)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)(x_0-a-b) - f(x_0)}{(x_0-a-b)^2} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)(x_0-a-b) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$
$$f'(x_0)(x_0-a-b) = f(x_0)$$

(β) Η εφαπτόμενη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ οπότε από τα συμπεράσματα του ερωτήματος (α) αντικαθιστώντας το x_0 έχουμε

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x-x_0) + f'(x_0)(x_0-a-b) \Leftrightarrow$$
$$y = f'(x_0)(x - x_0 + x_0 - a - b) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x_0 - a - b)$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση επαληθεύεται για $y = 0$ και $x = a+b$ επομένως η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $(a+b, 0)$

Άσκηση 5. (8 μον.)

Χρησιμοποιήστε τον υπολογιστή σας (και το Λογιστικό φύλλο Excel, αν σας διευκολύνει) για να υλοποιήσετε 25 επαναλήψεις της μεθόδου προσέγγισης ριζών της $x - f(x) = 0$ που περιγράφεται στις σελίδες 91-95 του βιβλίου για καθεμία από τις παρακάτω επιλογές της $f(x)$:

$$f_1(x) = 1 + \frac{2}{x}, \quad f_2(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$$

Ταξινομήστε τις παραπάνω συναρτήσεις με βάση την ταχύτητα σύγκλισης των ακολουθιών $x_{n+1} = f_i(x_n)$, με i =1, 2 και n = 0,1,2,…., στην εκάστοτε ρίζα της $f_i(x)$. Για περιπτώσεις που δε συγκλίνουν σε κάποια ρίζα να αιτιολογήσετε το αποτέλεσμα με βάση αυτά που αναφέρονται στο βιβλίο σας.

Λύση:

Η εξίσωση είναι $g(x) = x^2 - x - 2 = 0$. Είναι λοιπόν φανερό ότι ισχύει $g(1) = -2$ και $g(3) = 4$ οπότε η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,3). Σε ένα φύλλο εργασίας του Excel βάζουμε στο κελί A1 το αρχικό σημείο στο A2 τον τύπο σε σχέση με το A1 (π.χ. =1+A1/2) επιλέγουμε τα κελιά A2 έως A25 και κάνουμε Edit->Fill-> Down. Ως αρχικό σημείο ας θεωρήσουμε το 1. Είναι φανερό ότι η δεύτερη συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα (βλ. δύο πρώτες στήλες του παρακάτω πίνακα). Πως εξηγείται αυτό;

Όπως αναφέρει το βιβλίο, για να συγκλίνει μια επαναληπτική διαδικασία της μορφής $x_{n+1} = f(x_n)$ σε μια ρίζα της εξίσωσης $x = f(x)$, είναι απαραίτητο να ισχύει $|f'(x)| < 1$ σε μια περιοχή της εν λόγω ρίζας. Εδώ είναι φανερό από τις εξισώσεις

$$f_1(x) = 1 + \frac{2}{x} = x \Leftrightarrow x + 2 = x^2 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0,$$
$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1} = x \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x^2 - x \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0,$$

ότι η ρίζα που ζητάμε στο διάστημα (1,3) είναι η x=2. Παίρνοντας τις παραγώγους τώρα των $f_i(x)$ και υπολογίζοντας τις στο x=2, βλέπουμε ότι $|f_1'(2)| = \frac{1}{2}, \quad f_2'(2) = 0$. Επομένως, αν και η $x_{n+1} = f_1(x_n)$ θα συγκλίνει και αυτή στο x = 2 (με κάποιες ταλαντώσεις γύρω από αυτό), η $x_{n+1} = f_2(x_n)$ συγκλίνει ταχύτερα, γιατί ικανοποιεί κατά τον «ισχυρότερο» τρόπο τη συνθήκη $|f'(x)| < 1$, αφού $f_2'(2) = 0$! Με άλλα λόγια, προσπαθώντας να επιλύσουμε τις ανισότητες $|f_i'(x)| < 1, \ i = 1,2$, διαπιστώνουμε ότι σε μια περιοχή γύρω από το 2, ισχύει η ανισότητα $\left|f_2'(x)\right| \le \left|f_1'(x)\right| < 1$ και συνεπώς η επαναληπτική σχέση με την $f_2(x)$ συγκλίνει πιο γρήγορα στην λύση x = 2.

Μάλιστα παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει περιοχή γύρω από το -1 στην οποία η παράγωγος της πρώτης συνάρτηση για να είναι απολύτως μικρότερη της μονάδας και γι' αυτό θα συγκλίνει πάντα στην ρίζα 2, σε αντίθεση με την δεύτερη συνάρτηση που ικανοποιεί $|f_2'(-1)| = 0 < 1$ και επομένως η $x_{n+1} = f_2(x_n)$ θα συγκλίνει στο -1, για x_0 αρκετά κοντά στη ρίζα (βλ. 3η και 4η στήλη του παρακάτω πίνακα).

x=f1(x)	x=f2(x)	x=f1(x)	x=f2(x)
1	1	-1,1	-1,1
3	3	-0,81818	-1,00313
1,666667	2,2	-1,44444	-1
2,2	2,011765	-0,38462	-1
1,909091	2,000046	-4,2	-1
2,047619	2	0,52381	-1
1,976744	2	4,818182	-1
2,011765	2	1,415094	-1
1,994152	2	2,413333	-1
2,002933	2	1,828729	-1
1,998536	2	2,093656	-1
2,000733	2	1,955267	-1
1,999634	2	2,022878	-1
2,000183	2	1,98869	-1
1,999908	2	2,005687	-1
2,000046	2	1,997165	-1
1,999977	2	2,00142	-1
2,000011	2	1,999291	-1
1,999994	2	2,000355	-1
2,000003	2	1,999823	-1
1,999999	2	2,000089	-1
2,000001	2	1,999956	-1
2	2	2,000022	-1
2	2	1,999989	-1
		2,000006	-1
		1,999997	-1
		2,000001	-1
		1,999999	-1
		2	-1
		2	-1

Άσκηση 6. (12 μον.).

(α) Υπολογίστε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-\sin x-\cos x}{\ln(\sin 2x)}$ iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε, όπου εφαρμόζεται, τον κανόνα L'Hospital.

Λύση:

(i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{ax}-e^{-2ax}\right)'}{\left(\ln(1+x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{\dfrac{1}{1+x}}=\frac{a+2a}{1}=3a$$

(ii) $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x-1}-\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\ln x}=\frac{0}{0-1}-0=0-0=0$

(iii) Για $x\to\frac{\pi}{4}$ η παράσταση (iii) παίρνει τη μορφή $\frac{0}{0}$. Άρα, λόγω L'Hospital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-\sin x-\cos x}{\ln\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos x+\sin x}{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\left(-\cos x+\sin x\right)}{2\cos 2x}=\frac{0}{0}$$ και πάλι με

L' Hospital, έχουμε τελικά $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\sin x-\cos x\right)2\cos 2x+\sin 2x\left(\cos x+\sin x\right)}{-4\sin 2x}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(iv) Παρατηρείστε ότι: $x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\left(1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=x\left(1-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$

Αλλά $\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$ Οπότε $\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\infty\cdot 0$. Δηλαδή έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\infty\cdot 0$. Έτσι χρησιμοποιώντας επανειλημμένα L' Hospital, βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x\ln\left(1+x\right)+x\ln\left(x\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{1+x}-\ln\left(1+x\right)+\ln\left(x\right)+1}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x}-\frac{1+x-x}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(-x-x^2-x+1+2x+x^2\right)}{2\left(1+x\right)^2 x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2\left(1+x\right)^2}=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 7. (10 μον.)

Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x)=a\ln(x-1)+b\left(x-2\right)^2+3x$$

όπου $x>1$ και a,b πραγματικοί αριθμοί.

α) Να βρεθούν οι παράγωγοι $1^{ης}$,$2^{ης}$ και $3^{ης}$ τάξης: $f'(x),f''(x),f^{(3)}(x)$

β) Αν θέλουμε το $x=2$ να είναι θέση τοπικού ελαχίστου, να γράψετε τις αναγκαίες συνθήκες που οφείλουν να ικανοποιούν οι παράγωγοι $f'(2)$ και $f''(2)$. Τι συμπεραίνουμε για τις τιμές των παραμέτρων a,b;

γ) Αν $a=-3,b=-1$, να δείξετε ότι το $x=2$ είναι τοπικό αλλά όχι ολικό ελάχιστο.

δ) Τι μπορούμε να πούμε για το $x=2$ όταν $a=-3,\ \ b=-3/2$;

ε) Αν $a=-3,\ \ b\geq 0$ να δείξετε ότι η f είναι κυρτή. Στην περίπτωση αυτή τι μπορούμε να πούμε για τη θέση $x=2$;

Λύση:

α) $f^{/}(x)=\dfrac{a}{x-1}+2b(x-2)+3,\ f^{//}(x)=-\dfrac{a}{(x-1)^2}+2b,\ f^{(3)}(x)=\dfrac{2a}{(x-1)^3}$

β) Αν θέλουμε το $x=2$ να είναι θέση τοπικού ελαχίστου τότε θα πρέπει να ισχύουν:

$f^{/}(2)=0$ (αναγκαία συνθήκη $1^{ης}$ τάξης)

$f^{//}(2)>0$ (αναγκαία συνθήκη $2^{ης}$ τάξης)

από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι :

$a+3=0$ και $-a+2b>0$, δηλαδή $a=-3$ και $b>-\dfrac{3}{2}$.

γ) Αν $a=-3, b=-1$ τότε $f^{/}(2)=0, f^{//}(2)=1>0$ και επομένως το $x=2$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου (σελ. 110, θεώρημα ακροτάτων). Επειδή δε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[-3\ln(x-1)-(x-2)^2+3x]=\lim_{x\to+\infty}[-3\ln(x-1)]+\lim_{x\to+\infty}[-(x-2)^2+3x]=-\infty$$

η συνάρτηση παίρνει τιμές μικρότερες του $f(2)=6$ και επομένως το $x=2$ είναι θέση τοπικού αλλά όχι ολικού ελαχίστου.

δ) Αν $a=-3,\ \ b=-3/2$, τότε: $f^{/}(2)=0, f^{//}(2)=0, f^{(3)}(2)=-6\neq 0$, επομένως το $x=2$ είναι θέση σημείου καμπής (με οριζόντια εφαπτομένη), (σελ. 110, θεώρημα ακροτάτων).

ε) Αν $a=-3,\ \ b\geq 0$ τότε $\forall x>1, f^{//}(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}+2b>0$,που μας δείχνει ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Αφού $f^{/}(2)=0$ και $f^{//}(2)>0$, το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο. Επειδή όμως η συνάρτηση είναι κυρτή, η $f^{/}$ είναι γνησίως αύξουσα και κατά συνέπεια το 2 είναι η μοναδική της ρίζα και επομένως το μοναδικό κρίσιμο σημείο. Άρα το $f(2)=6$ είναι ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 8. (10 μον.)

(α) Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και η χορδή αυτής ΒΓ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία x = 4. Φέρνουμε την χορδή ΔΕ που βρίσκεται επί της ευθείας x = α όπου α<4 και τις κάθετες ΔΔ’, ΕΕ’ στη χορδή ΒΓ. Να υπολογισθεί το α έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΔΔ’Ε’Ε να είναι μέγιστο

(β) Υπολογίστε τις διαστάσεις τετραγωνικής ανοικτής πισίνας με πλευρά x και (σταθερό) βάθος y που έχει συνολικό όγκο 32 m^3, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος επένδυσης με πλακάκια του βυθού και των εσωτερικών τοιχωμάτων.

Λύση:

(α) Κάνοντας το σχήμα, παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΔΔ’Ε’Ε ισούται με $f(a)=4\sqrt{a}(4-a)$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση αυτή ως προς α έχουμε $f'(a)=2\frac{1}{\sqrt{a}}(4-a)-4\sqrt{a}=\frac{8}{\sqrt{a}}-6\sqrt{a}$ και

$f''(a)=-\frac{4}{a\sqrt{a}}-3\frac{1}{\sqrt{a}}$. Για να υπολογίσουμε τα τοπικά της ακρότατα, θέτουμε $f'(a)=0$ και βρίσκουμε α = 4/3. Επειδή δε έχουμε $f''(4/3)<0$, συμπεραίνουμε ότι για α = 4/3, το εμβαδόν $f(a)$ γίνεται μέγιστο.

(β) Ο όγκος της πισίνας ισούται με $V=x^2y=32$ Οπότε $y=\frac{32}{x^2}$.

Η συνολική επιφάνεια ισούται με $S=x^2+4xy=x^2+4x\frac{32}{x^2}=x^2+\frac{128}{x}$.

Για να βρούμε τα πιθανά ελάχιστο της συνάρτησης S, στο διάστημα $\left(0,+\infty\right)$ όπου έχει νόημα το φυσικό πρόβλημα, παραγωγίζουμε και λύνουμε ως προς x

$S'=2x-\frac{128}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^3=64 \Leftrightarrow x=4$.

Η δεύτερη παράγωγος $S''=2+\frac{256}{x^3}$ είναι θετική για $x=4$, οπότε έχουμε ελάχιστο.

Άσκηση 9. (8 μον.)

α) Να αποδείξετε ότι η σειρά $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$ συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Taylor (σελ. 120) να δείξετε ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει στο e^x

Λύση:

α) Επειδή $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0$ (σελ. 127), η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=\infty$. Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β)

- Αν $x=0$ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $1=e^0$.

Αν $x>0$ ή $x<0$, από το θεώρημα Taylor για την συνάρτηση $f(x)=e^x$ στο διάστημα $[0,x]$ ή $[x,0]$ προκύπτει ότι υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και x τέτοιο ώστε:

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{/}(0)}{1!}x+\frac{f^{//}(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n$$

Επειδή $f^{(n)}(x)=e^x$ για κάθε φυσικό αριθμό n έχουμε:

$$e^x=\underbrace{1+x+\frac{1}{2}x^2+...+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}}_{S_n(x)}+\underbrace{\frac{e^{\xi}}{n!}x^n}_{R_n(x)}=S_n(x)+R_n(x)$$

όπου $S_n(x)$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της δυναμοσειράς του α) ερωτήματος και $R_n(x)$ το υπόλοιπο του αναπτύγματος Taylor.

Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ τότε $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}[e^x-R_n(x)]=e^x$, οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στο e^x για κάθε πραγματικό αριθμό x. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι: $\forall x\in\mathbb{R},\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

- Το $\frac{x^n}{n!}$ είναι ο γενικός όρος της σειράς του ερωτήματος (α) που δείξαμε ότι συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.
- Αν $x<0$ τότε $x<\xi<0$ επομένως $e^{\xi}<1$.

Άρα

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{n!}x^n\right|<\frac{|x|^n}{n!}$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

- Αν $x>0$ τότε $0<\xi<x$ επομένως $e^{\xi}<e^x$. Άρα

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{n!}x^n\right|<e^x\frac{|x|^n}{n!}$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο e^x.

Άσκηση 10. (12 μον.)

(α) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του $\sin x$ σε σειρά υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

(β) Αναπτύξτε σε σειρά Taylor δυνάμεων του $x-1$ την συνάρτηση $\ln x$ και υπολογίστε το $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

(γ) Εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Maclaurin αναπτύξτε σε δυνάμεις του x (συμπεριλαμβανόμενου και του x^9) τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln(1+x)$$

στο διάστημα $[0,1]$.

(δ) Βρείτε ένα άνω όριο του σφάλματος της προσέγγισης και υπολογίστε προσεγγιστικά το $\ln\frac{5}{4}$.

Λύση:

(α) Αφού η σειρά Taylor για τη συνάρτηση sinx γύρω από το x = 0 είναι (βλ.σελ. 128) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+....$, αντικαθιστώντας στην δοσμένη παράσταση έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x-x^3/6+...)}{x(x-x^3/6+...)}=\lim_{x\to 0}\frac{+x^3/6+...}{x^2-x^4/6+...}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{6}=0$$

(β) Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor δυνάμεων του $x-1$ την συνάρτηση $\ln x$ βρίσκουμε (βλ. σελ. 118 – 120)

$$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+.....$$

οπότε αντικαθιστώντας στο ζητούμενο όριο υπολογίζουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}(1-\frac{1}{2}(x-1)\ +\frac{1}{3}(x-1)^2+.....)=1$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $f(0)=\ln(1)=0$ και ότι

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{\left(1+x\right)^2},\ f^{(3)}(x)=\frac{1\cdot 2}{\left(1+x\right)^3},$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{\left(1+x\right)^4},\ ....,f^{(n)}(x)=\left(-1\right)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\left(1+x\right)^n}$$

οπότε προκύπτει

$$f^{(n)}(0)=\left(-1\right)^{n-1}(n-1)!$$

Και σύμφωνα με τον τύπο (8.15, σελ 121) έχουμε

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}+R_{10}(x)$$

(δ) Τώρα το $R_{10}(x)=\frac{f^{10}(\xi)}{10!}x^{10}=-\frac{9!x^{10}}{10!(1+\xi)^{10}}=-\frac{x^{10}}{10(1+\xi)^{10}}\ \left(0<\xi<x\right)$

Έχοντας υπόψη ότι $0\le x\le 1$ και $\xi>0$ έχουμε ότι το σφάλμα φράσσεται

$$\left|R_{10}(x)\right| = \left|-\frac{x^{10}}{10(1+\xi)^{10}}\right| < \left|\frac{x^{10}}{10}\right| < \frac{1}{10}$$

Έχουμε λοιπόν την προσέγγιση $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9}$

οπότε

$$\ln(\frac{5}{4}) = \ln(1+\frac{1}{4}) \approx \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6}{6} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^7}{7} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^8}{8} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^9}{9}$$
$$= 0.223144$$
