ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 18 Ιουνίου 2005

Από τα κάτωθι Θέματα καλείσθε να λύσετε το 1^{ο} που περιλαμβάνει ερωτήματα από όλη την ύλη του μαθήματος, ενώ από τα Θέματα 2, 3, 4 και 5 μπορείτε να επιλέξετε **το πολύ τρία**. **Προσοχή: Αν προσπαθήσετε να επιλύσετε και τα τέσσερα Θέματα 2, 3, 4 και 5 πρέπει να μας υποδείξετε ποια τρία από αυτά θέλετε να βαθμολογήσουμε.**

Θέμα 1. (40 μονάδες)

α) (5 μονάδες)

Να βρεθεί ο 2x2 πίνακας $X = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ που ικανοποιεί τη σχέση: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Λύση:

Εχουμε ότι η εξίσωση πινάκων $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ισοδυναμεί με την

$\begin{bmatrix} 2x+u & 2y+v \\ -x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Εξισώνοντας τους συντελεστές, εύκολα έχουμε την μοναδική λύση x=0, y =1, u=1, v = -2, δηλαδή $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.(Επαλήθευση: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$)

β) (5 μονάδες)

Δίνεται το σύστημα $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \beta \end{pmatrix}$. Για ποιες τιμές των α , β, έχει το σύστημα αυτό: (i) μοναδική λύση (υπολογίστε την!), (ii) καμία λύση, (iii) άπειρες λύσεις.

Λύση:Από την ορίζουσα του 2x2 πίνακα συνάγεται αμέσως ότι: αν $a \neq -1/2$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση: $x = \dfrac{-a-\beta}{2a+1}$, $y = \dfrac{2\beta - 1}{2a+1}$. Θεωρούμε τώρα οτι $a = -1/2$. Τότε, αν $\beta \neq 1/2$ το σύστημα δεν έχει καμία λύση, ενώ για $\beta = 1/2$ έχει άπειρες λύσεις.

γ) (5 μονάδες)

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ισουται πρός

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1).$$

Αρα οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι λ=2 και λ= -1. Βρίσκούμε αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

Για λ=2: $\begin{pmatrix} 2-1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ αρα **μία βαση ιδιοδιανυσμάτων για** λ=2 αποτελείται από το $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Επαλήθευση: $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Για λ= -1: $\begin{pmatrix} -1-1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ αρα μία βαση ιδιοδιανυσμάτων για λ= -1 αποτελείται από το $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$**.** (Επαλήθευση: Επαλήθευση: $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

δ) (5 μονάδες)

Δώστε ένα παράδειγμα ακολουθίας $\{ a_n \}$, για την οποία ισχύει $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$, αλλά η αντίστοιχη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{\ 2}$ αποκλίνει. Εξηγείστε την απάντησή σας.

Λύση:

Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό ορο $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Η ακολουθία αυτή τείνει στο μηδέν και η αντίστοιχη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{\ 2}$ είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ η οποία δεν συγκλίνει (αρμονική σειρά).

(Σημείωση: κάθε άλλη ακολουθία $a_n = \dfrac{1}{n^p}$, $0 < p < 1/2$ είναι δεκτή).

ε) (5 μονάδες)

Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1$, με $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της $f(x)$ και χαρακτηρίστε τα ως τοπικά μέγιστα ή τοπικά ελάχιστα. Ποιο είναι το πεδίο τιμών της $f(x)$;

Λύση: Παραγωγίζοντας βρίσκουμε: $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$ και στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τα διαστήματα με το πρόσημο της παραγώγου και την συμπεριφορά της συνάρτησης ως αύξουσας ή φθίνουσας και τις τιμές της *f*:

x	-∞	0	1	2	+∞
Πρόσημο *f′*	-	0 +	0 -	0 +	
Μονοτονία της *f*	↘	↗	↘	↗	
Τιμές *f*	+∞	1	5/4	1	+∞

Δεδομένης της μονοτονίας της *f* τα τοπικά ακρότατα αντιστοιχούν στις τιμές του *x* = 0, 1, 2, με το πρώτο και το τρίτο τοπικά ελάχιστα και το δεύτερο τοπικό μέγιστο. Επειδή η *f* είναι συνεχής, η *f* λαμβάνει:

για *x* στο διάστημα (-∞, 0] όλες τις τιμές του διαστήματος [1, +∞),
για *x* στο διάστημα [0, 1], όλες τις τιμές του διαστήματος [1, 5/4],
για *x* στο διάστημα [1, 2], όλες τις τιμές του διαστήματος [1, 5/4]
για *x* στο διάστημα [2, +∞], όλες τις τιμές του διαστήματος [1, +∞).

Αρα το σύνολο όλων των τιμών της *f* είναι το διάστημα $[1, \infty)$.

στ) (5 μονάδες)

Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^{2x-x^2}$, στο x = 0, μέχρι όρους τάξης x^3.

Λύση: καθώς η παρασταση $2x - x^2$ στον μηδέν είναι μηδέν αντικαθιστούμε στο ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{6!}\cdots$,την $2x - x^2$ και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων μεχρι ταξης x^3:

$$e^{2x-x^2} = 1 + \frac{2x-x^2}{1!} + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!}\cdots =$$

$$e^{2x-x^2} = 1 + \frac{2x-x^2}{1!} + \frac{(4x^2+x^4-4x^3)}{2!} + \frac{8x^3}{6} + \text{οροι ταξης μεγαλύτερης του } x^3$$

$$= 1 + 2x - x^2 + 2x^2 - 2x^3 + \frac{8x^3}{6} + \text{ οροι ταξης μεγαλύτερης του } x^3$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2x^3}{3} + \text{ οροι ταξης μεγαλύτερης του } x^3$$

ζ) (5 μονάδες)

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x-3}{x^2-4x}dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ανάλυση σε επί μέρους κλάσματα).

Λύση: Κάνοντας τις πράξεις με τα κλάσματα βρίσκουμε: $\frac{x-3}{x^2-4x} = \frac{A(x-4)+Bx}{x(x-4)}$, οπότε $A+B = 1$ και $4A=3$. Άρα Α = ¾ και Β= ¼ . Το ολοκλήρωμα λοιπόν δίνει:

$$\int \frac{x-3}{x^2-4x}dx = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-4} = \frac{3}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln|x-4| + C$$

η) (5 μονάδες)

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int x^2 \sin(2x)dx$ (Χρησιμοποιήστε παραγοντική ολοκλήρωση).

Λύση: Θέτουμε $I = \int x^2 \sin(2x)dx$. Με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$I = \int x^2 \sin(2x)dx = -\int x^2 \frac{(\cos(2x))'}{2}dx = -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \int \frac{2x}{2}\cos(2x)dx = -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + I_1$$

όπου $I_1 = \int x\cos(2x)dx$. Με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$I_1 = \int x\cos(2x)dx = \int x\frac{(\sin(2x))'}{2}dx = x\frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2}dx = x\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cos(2x)}{2} + C$$

Αρα $\int x^2 \sin(2x)dx = -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + x\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cos(2x)}{2} + C$.

Θέμα 2. (20 μονάδες)

Δίνεται η απεικόνιση:

$$f: R^3 \to R^3: (x,y,z) \to (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$$

Αποδείξτε ότι είναι γραμμική και βρείτε τον πίνακά της ως προς την κανονική βάση του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών της. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του πυρήνα *Kerf* και της εικόνας *Imf* της *f*.

Λυση 2)

Σύμφωνα με τον ορισμό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε: $f(\lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2)) = \lambda f((x_1,y_1,z_1)) + \mu f((x_2,y_2,z_2))$.

Οντως $f(\lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2)) = f((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2))$ (πράξεις στον $\mathbb{R}^3$)

$$=\begin{array}{l}((\lambda x_1+\mu x_2)+2(\lambda y_1+\mu y_2)-(\lambda z_1+\mu z_2),\\ (\lambda y_1+\mu y_2)+(\lambda z_1+\mu z_2),\\ (\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda y_1+\mu y_2)-2(\lambda z_1+\mu z_2))\end{array} \quad \text{(από τον ορισμό της } f\text{)}$$

$$=\begin{array}{l}(\lambda[x_1+2y_1-z_1]+\mu[x_2+2y_2-z_2],\\ \lambda[y_1+z_1]+\mu[y_2+z_2],\\ \lambda[x_1+y_1-2z_1]+\mu[x_2+y_2-2z_2])\end{array} \quad \text{(πράξεις στις συνιστώσες)}$$

$$=\begin{array}{l}\lambda(x_1+2y_1-z_1, y_1+z_1, x_1+y_1-2z_1)+\\ +\mu(x_2+2y_2-z_2,\ y_2+z_2, x_2+y_2-2z_2)\end{array} \quad \text{(πράξεις στον } \mathbb{R}^3\text{)}$$

$$=\lambda f((x_1,y_1,z_1))+\mu f((x_1,y_1,z_1)). \quad \text{(από τον ορισμό της } f\text{)}$$

Το πεδίο ορισμού ($\mathbb{R}^3$) και το πεδίο τιμών της (επίσης $\mathbb{R}^3$) έχουν την ίδια κανονική βάση $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ όπου $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

Υπολογίζουμε: $f(e_1)=f(1,0,0)=(1,0,1)=e_1+e_3$.

Παρόμοια $f(e_2)=(2,1,1)=2e_1+e_2+e_3$, $f(e_3)=(-1,1,-2)=-e_1+e_2-2e_3$.

Αρα $\left[f(e_1)\right]_B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\left[f(e_2)\right]_B=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ και $\left[f(e_3)\right]_B=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, οπότε ο πίνακας της f ως προς τις κανονικές βάσεις είναι ο $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

2β) Για να βρούμε μία βάση του πυρήνα *Kerf* και μία βάση της εικόνας *Imf* αρκεί να μετασχηματίσουμε τον *A* σε κλιμακωτή μορφή χρησιμοποιώντας πράξεις στις γραμμές:

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&-3\\0&\boxed{1}&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Ετσι αφού ο πυρήνας της f είναι $Kerf=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$ αρκεί να λύσουμε το γραμμικό ομογενές σύστημα $AX=0_{3\times1}$.

Από την παραπάνω κλιμακωτή μορφή του Α έχουμε ότι όλες οι λύσεις δίνονται από

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a\\-a\\a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix},$$

Συνεπώς μία βάση του *Kerf* είναι {(3,-1,1)}.

Για την εικόνα *Imf*: από την κλιμακωτή μορφή του πίνακα *A* έχουμε ότι οι δύο πρώτες στήλες του πίνακα *A* είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η τρίτη είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων στηλών (τρίτη = (-2) πρώτη + δεύτερη).

Ετσι μία βάση της *Imf* δίνεται από το σύνολο $\{f(e_1), f(e_2)\}$ δηλαδή {(1,0,1), (2, 1, 1)}.

Σημείωση: Μία εναλλακτική απάντηση για βάση της εικόνας είναι η εξής: καθώς ο πίνακας της απεικόνισης έχει μικρή διάσταση και έχουμε υπολογίσει την διάσταση του πυρήνα, έχοντας υπ’ όψιν ότι dim Imf = dim $\mathbb{R}^3$ - dim $Kerf$ =3-1=2 και ελέγχοντας ότι τα δύο διανύσματα $f(e_1), f(e_2)$ δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους έχουμε ότι μία βάση είναι το σύνολο $\{f(e_1), f(e_2)\}$.

<u>Θέμα 3.</u> (20 μονάδες)

(α) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi a)}{2^n}$, $a \in \mathbb{R}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^4+1}$

Λύση:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi a)}{2^n}$.

Επειδή $\left|\frac{\cos(\pi a)}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}$ και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ συγκλίνει, έπεται ότι η δοθείσα σειρά συγκλίνει απολύτως άρα και απλά.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Επειδή $\sqrt{n^2+n} \le \sqrt{n^2+n^2} = \sqrt{2n^2} = n\sqrt{2}$, έχουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \ge \frac{1}{n\sqrt{2}}$.

Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ και η τελευταία σειρά δεν συγκλίνει (μη μηδενικό πολλαπλάσιο αρμονικής σειράς), οπότε από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ δεν συγκλίνει.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^4+1}$.

Επειδή $\frac{n^2}{2n^4+1} \le \frac{n^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^2}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (πολλαπλάσιο p-σειράς p>1) έχουμε ότι και η αρχική σειρά συγκλίνει.

(β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{x^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^n$;

Λύση:

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^n$ έχουμε από τις γνώσεις μας για τις γεωμετρικές σειρές ότι η σειρά συγκλίνει αν και μόνο άν $|\frac{x+1}{x}| < 1$. Η διπλή αυτή ανισότητα ισοδυναμεί με $-1 < \frac{x+1}{x} < 1$ δηλαδή $-1 < 1 + \frac{1}{x} < 1$ δηλαδή $-2 < \frac{1}{x} < 0$. Αρα $x < 0$ και -2 x >1 δηλαδή x < -1/2.

Για την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n3^n x^n$ βρίσκουμε την ακτίνα σύγκλισης χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου: Επειδή $\left|\dfrac{(n+1)3^{n+1}x^{n+1}}{n3^n x^n}\right| = \dfrac{n+1}{n}3|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 3|x|$, έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει για $3|x|<1$δηλαδή για -1/3< x <1/3 και αποκλίνει για $3|x|>1$. Για την σύγκλιση στα άκρα αντικαθιστούμε τις συγκεκριμένες τιμές: για x =1/3 η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} n3^n \dfrac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ που προφανώς δεν συγκλίνει καθώς ο γενικός όρος δεν συγκλίνει στο μηδέν. Παρόμοια για x =-1/3. Αρα η σειρά συγκλινει μόνο για τις τιμές -1/3< x <1/3.

Θέμα 4. (20 μονάδες)

(α) Βρείτε τα κ, λ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & x \le 0 \\ \kappa & x = 0 \\ 1+\lambda x - \dfrac{1}{2}e^x & x > 0 \end{cases}$

να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο x = 0. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $\sin x$, e^x στο x = 0).

Λύση 4α:

Ο πιο εύκολος τρόπος λύσης είναι να ακολουθήσουμε την υπόδειξη και να γράψουμε χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα Taylor:

$$\frac{\sin x}{2x} = \frac{\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)$$

$$1+\lambda x - \frac{1}{2}e^x = 1+\lambda x - \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right) = \frac{1}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{4}x^2 - \cdots$$

οπότε από την συνέχεια στο x = 0 βρίσκουμε αμέσως κ = ½. Παραγωγίζοντας κατόπιν τις ως άνω παραστάσεις βρίσκουμε ότι στο x = 0 η πρώτη παράγωγός είναι 0 από αριστερά (ο συντελεστής του x είναι μηδέν, ενώ ισούται προς λ-1/2 από δεξιά. Αρα για να είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 πρέπει και αρκεί λ=1/2.

(β) Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαγώνιο μήκους 1 το οποίο έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

Λύση 4β) Ονομάζουμε τις 2 πλευρές του παραλληλογράμμου x και y . Αφού η διαγώνιός του είναι 1 ισχύει: $x^2 + y^2 = 1$ άρα $y = \sqrt{1-x^2}$ με $0 \le x \le 1$. Το εμβαδόν του είναι επομένως η θετική συνάρτηση $E(x) = xy = x\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$. Για να βρούμε τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα $0 \le x \le 1$, υπολογίζουμε την παράγωγο $E'(x) = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{(1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})}{\sqrt{1-x^2}}$

η οποία μηδενίζεται στο διάστημα $0 \le x \le 1$ για $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Λόγω και του προσήμου της παραγώγου αριστερά και δεξια από το $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, η συνάρτηση $E(x)$ παίρνει την μέγιστη τιμή στο διάστημα $0 \le x \le 1$, για $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Άρα το ζητούμενο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο πλευράς $1/\sqrt{2}$.

Θέμα 5. (20 μονάδες)

(α) Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής που ευρίσκεται πάνω από την παραβολή $y = \frac{x^2}{2}$ και κάτω από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 8$. (Υπόδειξη: Ίσως χρειαστεί σε ένα ολοκλήρωμα η αντικατάσταση $x = \sqrt{8}\sin\theta$).

Λύση:

Πρώτα βρίσκουμε πού τέμνονται οι δύο καμπύλες στο y > 0 ημιεπίπεδο: Απαλείφοντας το x από τις εξισώσεις τους έχουμε: $2y + y^2 = 8 \Rightarrow (y-2)(y+4) = 0 \quad \Rightarrow y = 2$, αφού αρνητικές τιμές του y δεν γίνονται δεκτές. Άρα τα σημεία τομής των καμπυλών είναι (x, y)=(±2, 2).

Το ολοκλήρωμα που δίνει το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{-2}^{2} (\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2})dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{8 - 8\sin^2\theta}\sqrt{8}\cos\theta d\theta - \frac{x^3}{6}\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 8\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2\theta d\theta - \frac{8}{3} = 4\int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 + \cos 2\theta)d\theta - \frac{8}{3} = 4(\theta_2 - \theta_1) + 2(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) - \frac{8}{3}$$

όπου αντικαταστήσαμε στο πρώτο ολοκλήρωμα το x με $x = \sqrt{8}\sin\theta$ και επομένως: $\sin\theta_1 = -2/\sqrt{8} = -1/\sqrt{2}, \quad \cos\theta_1 = 1/\sqrt{2}, \quad \sin\theta_2 = 2/\sqrt{8} = \cos\theta_2 = 1/\sqrt{2}$, δηλαδή θ_1= -π/4 και θ_2= π/4.

Άρα το ως άνω ολοκλήρωμα δίνει: $E = 2\pi + 4 - 8/3 = 2\pi + 4/3$.

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{\ln x}{\sqrt{2x-1}}dx$ χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση και την αντικατάσταση $u = \sqrt{2x-1}$. Θα σας χρειαστεί επίσης ο τύπος $\frac{d}{du}\tan^{-1} u = \frac{1}{u^2+1}$)

Λύση:

Ακολουθώντας τις υποδείξεις βρίσκουμε:

$$I = \int \frac{\ln x}{\sqrt{2x-1}}dx = \ln x\sqrt{2x-1} - \int \frac{\sqrt{2x-1}}{x}dx = \ln x\sqrt{2x-1} - \int \frac{2u^2 du}{u^2+1} = \ln x\sqrt{2x-1} - \int \frac{(2u^2 + 2 - 2)du}{u^2+1}$$

όπου κάναμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{2x-1}$. Κάνοντας τις πράξεις στο τελευταίο ολοκλήρωμα βρίσκουμε τελικά:

$$I = \ln x\sqrt{2x-1} - 2\sqrt{2x-1} + 2\tan^{-1}(\sqrt{2x-1}) + C = \sqrt{2x-1}\left(\ln x - 2\right) + 2\tan^{-1}(\sqrt{2x-1}) + C$$
