ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

Ενδεικτικές Λύσεις

ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

(Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 12 Οκτωβρίου 2005)

Η Άσκηση 1 στην εργασία αυτή είναι επαναληπτική. Εξετάζονται μερικές από τις βασικές έννοιες που θα χρειαστούμε στη ΘΕ. Οι Ασκήσεις 2 – 9, αναφέρονται στα
Κεφάλαιο 1 (Πίνακες, Ορίζουσες, Γραμμικά Συστήματα)
Κεφάλαιο 2 (Διανυσματικοί Χώροι)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «*Γραμμική Άλγεβρα*» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα. Η ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας είναι η 11 Νοεμβρίου 2005.

Βοηθητικό υλικό: Για την εργασία 1 μπορείτε να συμβουλευθείτε το εξής συμπληρωματικό υλικό που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm

- Επανάληψη βασικών εννοιών από το Λύκειο:
  Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ, Εισαγωγικές Ασκήσεις και οι λύσεις τους, Σύνολα Αριθμών, Κεφ1 Εισαγωγικές Έννοιες.
- Για τα Κεφάλαια 1 και 2 του βιβλίου του ΕΑΠ:
  από το ΕΔΥ: Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα, Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα, Κεφ4 Ορίζουσες, Κεφ5 Οι χώροιR^n , Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι και Κεφ7 Βάση και Διάσταση
  από το ΣΕΥ: Πίνακες, Οι Χώροι R^n, Διανυσματικοί Χώροι.

1. (*12 μον*)

a. (*4 μον*) Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{x}{x^2+2}$$

1. Εξετάστε ποιες από αυτές είναι 1-1 ή/και επί.
2. Για κάθε μια συνάρτηση να βρεθεί η εικόνα της.
3. Αν μια συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη, να βρεθεί η αντίστροφή της.
4. Εξετάστε αν για τη σύνθεση ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

b. (*2 μον*) Να γραφεί η παράσταση $\dfrac{x+2}{(x+1)(x+3)}$ ως άθροισμα μερικών κλασμάτων, δηλαδή να βρεθούν οι πραγματικοί A, B, τέτοιοι ώστε

$$\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}.$$

c. (*3 μον*) Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x)=x^3+x^2+ax+2$, όπου $a\in\mathbb{R}$. Αν μια ρίζα του $f(x)$ είναι $\rho_1=-2$, να βρεθεί ο a καθώς και οι υπόλοιπες ρίζες του πολυωνύμου.

d. (*3 μον*) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $z=\sqrt{3}+i$.

1. Να βρεθεί το μέτρο, το όρισμα και ο αντίστροφος του z.
2. Να υπολογιστεί η δύναμη z^{2005}. Υπόδειξη: βλ. Εφαρμογή 1.4.14 στο Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ
3. Να λυθεί η εξίσωση $w^5=\sqrt{3}+i$

Λύση

a1. Η f είναι 1-1 και επί. Πράγματι, για το '1-1' έχουμε $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow x_1=x_2$, και για το 'επί' παρατηρούμε ότι δοθέντος του $y\in\mathbb{R}$ έχουμε $f\left(\dfrac{y-3}{2}\right)=y$.

Η g δεν είναι 1-1 αφού, για παράδειγμα, $g(1)=g(2)$.

Σημείωση. Ένας πιο συστηματικός τρόπος αντιμετώπισης του ερωτήματος αν η g είναι 1-1 είναι να εξετάσουμε αν υπάρχει $y\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση $\dfrac{x}{x^2+2}=y$ έχει δυο διακεκριμένες ρίζες ως προς x. Έχουμε $\dfrac{x}{x^2+2}=y\Leftrightarrow yx^2-x+2y=0$. Το τριώνυμο έχει δυο διακεκριμένες λύσεις αν και μόνο αν $y\neq 0$ και η διακρίνουσα $\Delta=1-8y^2$ είναι θετική, δηλαδή $y\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{8}},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$. Συνεπώς η g δεν είναι 1-1.

Το ότι η g δεν είναι επί θα φανεί στο επόμενο υποερώτημα.

a2. Από το a1 έπεται ότι η εικόνα της f είναι το $\mathbb{R}$.

Ένα $y\in\mathbb{R}$ ανήκει στην εικόνα της g αν και μόνο αν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $y=\dfrac{x}{x^2+2}$, δηλαδή $yx^2-x+2y=0$. Το τριώνυμο (ως προς x) έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα αν και μόνο αν $\Delta = 1^2 - 4y(2y) \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{8}} \le y \le \frac{1}{\sqrt{8}}$. Συνεπώς η εικόνα της g είναι το διάστημα $\left[-\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right]$.

a3. Η g δεν είναι αντιστρέψιμη αφού δεν είναι 1-1.
Η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη γιατί είναι 1-1 και επί. Έχουμε
$f(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{f(x) - 3}{2}$ και συνεπώς η αντίστροφη της $f(x)$ είναι η συνάρτηση $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

a4. Παρατηρούμε ότι $f(g(0)) = f(0) = 3$ και $g(f(0)) = \frac{3}{3^2 + 2} \ne f(g(0))$. Άρα $f \circ g \ne g \circ f$.

b. Έχουμε

$$\frac{x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+3)}{(x+1)(x+3)} + \frac{B(x+1)}{(x+1)(x+3)} \Leftrightarrow$$

$$x + 2 = A(x+3) + B(x+1) \Leftrightarrow x + 2 = (A+B)x + 3A + B \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 2 = 3A + B \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$$

Άρα $\frac{x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x+3}$.

c. Έχουμε $f(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^3 + (-2)^2 + a(-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Συνεπώς $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$. Το $x - (-2) = x + 2$ διαιρεί το $f(x)$. Πραγματοποιώντας τη διαίρεση βρίσκουμε $x^3 + x^2 - x + 2 = (x+2)(x^2 - x + 1)$. Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x + 1$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $\frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Επομένως οι ρίζες του $f(x)$ είναι οι $-2, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

d1. Έχουμε $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$. Το πρωτεύον όρισμα θ του z προσδιορίζεται από τις σχέσεις $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{1}{2}, 0 \le \theta < 2\pi$. Άρα $\theta = \pi/6$. Έχουμε
$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$.

d2. Από το d1 έπεται ότι η τριγωνομετρική μορφή του z είναι

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, οπότε από το Θεώρημα De Moivre έχουμε

$$z^{2005}=2^{2005}\left(\cos\frac{2005\pi}{6}+i\sin\frac{2005\pi}{6}\right)=$$

$$2^{2005}\left(\cos\left(334\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(334\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$2^{2005}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$2^{2004}\left(\sqrt{3}+i\right).$$

d3. Είδαμε πριν ότι $\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$. Από το Θεώρημα 1.4.15 του Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ έπεται άμεσα ότι οι ζητούμενες λύσεις είναι οι

$$z_k=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}\right),\quad k=0,1,2,3,4.$$

Αντικαθιστώντας διαδοχικά $k=0,1,2,3,4$ βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι

$z_0=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{30}+i\sin\frac{\pi}{30}\right)$, $z_1=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{30}+i\sin\frac{13\pi}{30}\right)$

$z_2=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{30}+i\sin\frac{25\pi}{30}\right)$, $z_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{30}+i\sin\frac{37\pi}{30}\right)$

$z_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{49\pi}{30}+i\sin\frac{49\pi}{30}\right)$.

2. (*10 μον*)

a. (*5 μον*) Έστω $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$, όπου $x\in\mathbb{R}$.

1. Από τις παρακάτω παραστάσεις να υπολογισθούν όσες έχουν νόημα AB, BA, AA^t, CB, BC, B^2, $A+B$.
2. Εξετάστε αν υπάρχει πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ τέτοιος ώστε $A\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & 2\end{pmatrix}A$

b. *(5 μον)* Έστω A ένας πραγματικός πίνακας τέτοιος ώστε $A^3+A^2+I=0$.

1. Αποδείξτε ότι οι A και $A+I$ είναι αντιστρέψιμοι και ότι $A^{-1}-(A+I)^{-1}=-A$.

2. Απλοποιήστε την παράσταση $A^5 + A^4 + A^3 + 2I$. (βλ. Λυμένη Άσκηση 6, Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα).

Λύση

a1. Έχουμε

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2+3x \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 2x \\ 2x & 4 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6-8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Οι υπόλοιπες παραστάσεις δεν έχουν νόημα. Για παράδειγμα, το πλήθος των στηλών του B δεν είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του A και επομένως δεν ορίζεται το γινόμενο BA. Το άθροισμα $A+B$ δεν ορίζεται γιατί οι πίνακες A, B είναι διαφορετικού μεγέθους

a2. Έχουμε διαδοχικά

$$A\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6+2x \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3x+12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 6+2x = 3x+12 \Leftrightarrow x = -6.$$

b1. Έστω ότι οι A, I είναι $n \times n$ πίνακες. Χρησιμοποιώντας ορίζουσες έχουμε

$$A^3 + A^2 + I = 0 \Rightarrow A^2(A+I) = -I \Rightarrow$$

$$\det A^2 \det(A+I) = \det(-I) = (-1)^n \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \det A^2 \neq 0 \\ \det(A+I) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \det A \neq 0 \\ \det(A+I) \neq 0 \end{cases}.$$

Συνεπώς οι πίνακες $A, A+I$ είναι αντιστρέψιμοι.

Σημείωση. Θα μπορούσαμε να φτάσουμε στο ίδιο συμπέρασμα χωρίς τη χρήση οριζουσών. Πράγματι από τη σχέση $A^3 + A^2 + I = 0$ έπονται οι σχέσεις $\left(-A^2\right)(A+I) = I, (A+I)\left(-A^2\right) = I$ και κατά συνέπεια ο $A+I$ είναι αντιστρέψιμος με $\left(A+I\right)^{-1} = -A^2$. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

Αντικαθιστώντας χουμε

$$A^{-1} - \left(A+I\right)^{-1} = -A \Leftrightarrow A^{-1} - \left(-A^2\right) = -A \Leftrightarrow A^{-1} + A^2 = -A.$$

Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος έχουμε

$$A^{-1} + A^2 = -A \Leftrightarrow A\left(A^{-1} + A^2\right) = A(-A) \Leftrightarrow$$

$$I + A^3 = -A^2 \Leftrightarrow A^3 + A^2 + I = 0$$

και η τελευταία ισότητα ισχύει.

b2. Από τον αλγόριθμο διαίρεσης πολυωνύμων βρίσκουμε

$$x^5 + x^4 + x^3 + 2 = (x^3 + x^2 + 1)(x^2 + 1) - 2x^2 + 1$$

και επομένως

$$A^5 + A^4 + A^3 + 2I = \underbrace{(A^3 + A^2 + I)}_{=0}(A^2 + I) - 2A^2 + I = -2A^2 + I.$$

3. *(10 μον)* Ένα αεροσκάφος ίπταται έτσι ώστε οι συντεταγμένες (x_n, y_n, z_n) του σημείου όπου βρίσκεται μετά από *n* λεπτά πτήσης ικανοποιούν τις σχέσεις

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n - z_n$$
$$y_{n+1} = y_n + z_n$$
$$z_{n+1} = z_n$$

$n = 1, 2, \dots$, όπου $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c.$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του αεροσκάφους μετά από 5 ώρες πτήσης.

Υπόδειξη: Έχουμε $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Παρατηρήστε ότι $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Άρα αρκεί να υπολογίσουμε τη δύναμη A^{300}.

Αποδείξτε με επαγωγή ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & (n-1)^2 - 1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Απάντηση: $(x_{300}, y_{300}, z_{300}) = \left(a + 600b + \left(299^2 - 1\right)c, b + 300c, c\right)$

Λύση

Η σχέση $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ ισχύει για κάθε μη αρνητικό ακέραιο $n.$ Συνεπώς έχουμε $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, n \geq 1.$ Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = AA \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$A^2 A \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Τώρα αποδεικνύουμε επαγωγικά ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & (n-1)^2-1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \geq 1$. Για $n=1$ η

σχέση προφανώς αληθεύει. Έστω ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & (n-1)^2-1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ για κάποιο n. Τότε

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & (n-1)^2-1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+2n & -1+2n+(n-1)^2-1 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & ((n+1)-1)^2-1 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τελικά οι ζητούμενες συντεταγμένες δίνονται από τη σχέση

$$\begin{pmatrix} x_{300} \\ y_{300} \\ z_{300} \end{pmatrix} = A^{300} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 300 & 299^2-1 \\ 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+600b+\left(299^2-1\right)c \\ b+300c \\ c \end{pmatrix}$$

4. (*12 μον*)

a. *(6 μον)* Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Να υπολογιστεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A (βλ. Παράδειγμα 3 στην παράγραφο 1.4 του βιβλίου του ΕΑΠ).
2. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z+w&=1 \\ x-y+z+w&=2 \\ 2x+y-w&=3 \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Δείτε το Παράδειγμα 3 , Παρ. 1.4 στο βιβλίο του ΕΑΠ.

b. *(6 μον)* Εξετάστε για ποιες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ το παρακάτω σύστημα είναι συμβιβαστό. Υπολογίστε τις λύσεις όταν αυτές υπάρχουν.

$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 3x-y-z&=a\\ 5x-3y+z&=4 \end{aligned}$$

Λύση

α1. Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to \frac{1}{4}R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή. Για να τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πρέπει να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία κάθε στήλης που περιέχουν ηγετικό 1. Εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $R_2\to R_2-2R_3, R_1\to R_1-R_3, R_1\to R_1-R_2$, βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

α2. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο πίνακας A του προηγούμενου υποερωτήματος. Από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή αυτού έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x+\quad -\frac{1}{2}w&=\frac{7}{4}\\ y+\quad &=-\frac{1}{2}\\ z+\frac{3}{2}w&=-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτουν άμεσα οι λύσεις

$$(x,y,z,w)=\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{2}w,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}w,w\right),\ w\in\mathbb{R}.$$

b. Εφαρμόζοντας στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $R_2\to R_2-3R_1, R_3\to R_3-5R_1, R_3\to R_3-R_1$, βρίσκουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&2&-4&a-3\\0&0&0&a-2\end{pmatrix}.$$

<u>*Περίπτωση 1.*</u> Έστω $a\neq 2$. Τότε από την τελευταία γραμμή συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

<u>*Περίπτωση 2.*</u> Έστω $a=2$. Τότε ο ανωτέρω πίνακας είναι ο $\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&2&-4&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

και εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι

$$(x,y,z)=(\frac{1}{2}+z,-\frac{1}{2}+2z,z),\ z\in\mathbb{R}.$$

5. (*10 μον*)

a. *(4 μον)* Υπολογίστε τις ορίζουσες $\det\begin{pmatrix}2-i&3\\1+i&1-i\end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix}a&x&2a-x\\b&y&2b-y\\c&z&2c-z\end{pmatrix}$

b. *(6 μον)* Αποδείξτε ότι $\det\begin{pmatrix}1+a&b&c&d\\a&1+b&c&d\\a&b&1+c&d\\a&b&c&1+d\end{pmatrix}=1+a+b+c+d.$

Υπόδειξη: Προσθέστε στην πρώτη στήλη όλες τις άλλες και βγάλτε κοινό παράγοντα. Στη συνέχεια, μετατρέψτε τον πίνακα σε τριγωνικό.

Λύση

a. Έχουμε $\det\begin{pmatrix}2-i&3\\1+i&1-i\end{pmatrix}=(2-i)(1-i)-3(1+i)=-2-6i.$

Αν στην τρίτη στήλη του πίνακα $\begin{pmatrix}a&x&2a-x\\b&y&2b-y\\c&z&2c-z\end{pmatrix}$ προσθέσουμε τη δεύτερη στήλη,

τότε προκύπτει ο $\begin{pmatrix}a&x&2a\\b&y&2b\\c&z&2c\end{pmatrix}$. Άρα

$$\det\begin{pmatrix}a&x&2a-x\\b&y&2b-y\\c&z&2c-z\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}a&x&2a\\b&y&2b\\c&z&2c\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}a&x&a\\b&y&b\\c&z&c\end{pmatrix}=0,$$

γιατί ο πίνακας $\begin{pmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{pmatrix}$ έχει δυο ίσες στήλες.

b. Προσθέτοντας στην πρώτη στήλη όλες τις υπόλοιπες στήλες προκύπτει ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1+a+b+c+d & b & c & d \\ 1+a+b+c+d & 1+b & c & d \\ 1+a+b+c+d & b & 1+c & d \\ 1+a+b+c+d & b & c & 1+d \end{pmatrix}$. Άρα

$$\det\begin{pmatrix} 1+a & b & c & d \\ 1 & 1+b & c & d \\ 1 & b & 1+c & d \\ 1 & b & c & 1+d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1+a+b+c+d & b & c & d \\ 1+a+b+c+d & 1+b & c & d \\ 1+a+b+c+d & b & 1+c & d \\ 1+a+b+c+d & b & c & 1+d \end{pmatrix} =$$

$$(1+a+b+c+d)\det\begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & 1+b & c & d \\ 1 & b & 1+c & d \\ 1 & b & c & 1+d \end{pmatrix}.$$

Στον τελευταίο πίνακα αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από κάθε άλλη γραμμή, οπότε προκύπτει ο $\begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Αυτός είναι τριγωνικός και η ορίζουσά του είναι 1.

Τελικά,

$$\det\begin{pmatrix} 1+a & b & c & d \\ 1 & 1+b & c & d \\ 1 & b & 1+c & d \\ 1 & b & c & 1+d \end{pmatrix} = (1+a+b+c+d)\det\begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & 1+b & c & d \\ 1 & b & 1+c & d \\ 1 & b & c & 1+d \end{pmatrix} =$$

$$(1+a+b+c+d)\det\begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1+a+b+c+d.$$

6. *(10 μον) Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο Υπολογισμού Αντίστροφου Πίνακα (βλ. Πίνακες σελίδα 43, ή Παράδειγμα 6 στην παράγραφο 1.4 του βιβλίου του ΕΑΠ) να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες ο A είναι αντιστρέψιμος και για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί ο A^{-1}.

Λύση

Σχηματίζουμε τον 3×6 πίνακα $(A,I)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 7 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -1 & a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $R_3\to R_3-4R_1, R_2\to R_2-2R_1$ κλπ παίρνουμε τον πίνακα

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -a+13 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

<u>*Περίπτωση 1.*</u> Έστω $a=13$. Τότε το αριστερό μισό του πίνακα αυτού είναι ο $K=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ που είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Επειδή ο K είναι διάφορος του I, συμπεραίνουμε από τον αλγόριθμο υπολογισμού αντίστροφου πίνακα (βλ. Πίνακες σελίδα 43) ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

<u>*Περίπτωση 2.*</u> Έστω $a\neq 13$. Τότε συνεχίζουμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να φέρουμε το αριστερό μισό του B σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Μετά από $R_3\to \frac{1}{-a+13}R_3, R_2\to R_2+R_3$ κλπ βρίσκουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{a-7}{a-13} & \frac{3}{a-13} & \frac{-3}{a-13}\\ 0 & 1 & 0 & 2\frac{a-14}{a-13} & -\frac{a-12}{a-13} & \frac{1}{a-13}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a-13} & \frac{-1}{a-13} & \frac{1}{a-13}\end{pmatrix}$$

. Επειδή το αριστερό μισό του πίνακα αυτού είναι ο I, συμπεραίνουμε ότι το δεξιό μισό είναι ο αντίστροφος του A, δηλαδή

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{a-7}{a-13} & \frac{3}{a-13} & \frac{-3}{a-13}\\ 2\frac{a-14}{a-13} & -\frac{a-12}{a-13} & \frac{1}{a-13}\\ \frac{-2}{a-13} & \frac{-1}{a-13} & \frac{1}{a-13}\end{pmatrix}.$$

Σημείωση: Στις λύσεις των ασκήσεων 7-9, ακολουθείται η μέθοδος του 'δεύτερου αλγορίθμου' στη σελίδα 102 του βιβλίου.

7. (12 μον) Δίδονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$:

$V=\{(2x+3y+z, x-z, y-z), x,y,z\in\mathbb{R}\}$
$U=\{(x,y,z): y=z \text{ και } x=2z,\ \ x,y,z\in\mathbb{R}\}$
$W=\{(x,y,z): x=z, x,y,z\in\mathbb{R}\}$

Δείξτε ότι είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και βρείτε μία βάση για τον καθένα.

Εξετάσετε αν ο χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι ευθύ άθροισμα των U και *W*.

Λύση

Επειδή $$(2x+3y+z, x-z, y-z) = x(2,1,0) + y(3,0,1) + z(1,-1,-1)$$

έχουμε ότι το σύνολο V είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $(2,1,0), (3,0,1), (1,-1,-1)$.

Αρα είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

Για μία βάση του αρκεί να θεωρήσουμε τον πίνακα με στήλες τις συντεταγμένες των παραπάνω γεννητόρων και να βρούμε μία κλιμακωτή μορφή του¨

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επειδη οι στηλες της κλιμακωτής μορφής είναι γραμμικά ανεξάρτητες έπεται ότι και οι στηλες του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες δηλαδή μία βάση του V είναι τα διανύσματα $(2,1,0), (3,0,1), (1,-1,-1)$ και η διασταση του είναι ίση προς 3. Αρα V $=\mathbb{R}^3$.

$U = \{(x,y,z): y = z \text{ και } x = 2z,\ \ x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(2z,z,z): z \in \mathbb{R}\}$ δηλαδή το σύνολο U είναι το σύνολο όλων των πολλαπλασίων του διανύσματος α=(2,1,1) και συνεπώς είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που γεννάται από αυτό το διάνυσμα που αφού είναι μη μηδενικό το σύνολο {α} αποτελεί και βάση του U. Η διασταση του U ισούται προς 1.

Επειδή $W = \{(x,y,z): x = z\ ,\ x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(z,y,z): x = z\ , y,z \in \mathbb{R}\}$ και $(z,y,z) = z(1,0,1) + y(0,1,0)$ έχουμε ότι το σύνολο W είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $(1,0,1), (0,1,0)$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Αρα το σύνολο W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και επειδή τα διανύσματα $(1,0,1), (0,1,0)$ που τον γεννούν είναι γραμμικά ανεξάρτητα αποτελούν βάση του και η διάστασή του είναι ίση με 2.

Για να εξετάσουμε αν ο χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι ευθύ άθροισμα των U και W αρκεί να εξετάσουμε αν το (2,1,1) μοναδικό διάνυσμα της βάσης του U μαζί με τα διανύσματα $(1,0,1), (0,1,0)$ (που αποτελούν βάση του W) είναι βάση του $\mathbb{R}^3$. Αυτό όντως συμβαίνει καθώς το (2,1,1) δεν ανήκει στον W (πράγματι καθώς 2≠1) οπότε δεν γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(1,0,1), (0,1,0)$. Αρα ο χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι ευθύ άθροισμα των U και W.

8. *(12 μον)* Έστω W_1 και W_2 οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ που παράγονται από τα διανύσματα $\alpha_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\alpha_2 = (3, 1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (-1, 0, 1, -1)$ και $\beta_1 = (2, 5, -6, -5)$, $\beta_2 = (-1, 2, -7, 3)$. Βρείτε τις διαστάσεις και βάσεις των W_1, W_2, $W_1 + W_2$ και $W_1 \cap W_2$. **Υπόδειξη** Βλ. Λυμένη Άσκηση 12 από το Κεφ7 Βάση και Διάσταση .

Λύση

Επειδή ο χώρος $W_1 + W_2$ παράγεται από το σύνολο των διανυσμάτων α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, σχηματίζουμε τον πίνακα Π με 3 πρώτες στήλες τα α_1, α_2, α_3 και 2 τελευταίες τα β_1, β_2 και στην συνέχεια κάνοντας πράξεις στις γραμμές του πίνακα Π καταλήγουμε σε ισοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \Pi'$$

Στον τελευταίο πίνακα είναι φανερό ότι:

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ_1. Το σύνολο που απαρτίζεται από τις στήλες $1^η$, $2^η$,$3^η$ και $5^η$ είναι ένα από τα μεγαλύτερα γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα στηλών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ_2. Το σύνολο που απαρτίζεται από τις στήλες $1^η$, $2^η$ και $3^η$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ_3. Το σύνολο που απαρτίζεται από τις στήλες $4^η$ και $5^η$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ_4. Η 4η στήλη γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των τριών πρώτων στηλών (=3 φορές 1η – 2η –2 φορές 3η).

Λόγω του ότι $\Pi' = P\Pi$ όπου P αντιστρέψιμος πίνακας (επειδή οι πράξεις στις γραμμές ενός πίνακα ισοδυναμούν με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με κατάλληλο αντιστρέψιμο πίνακα) και επειδή κάθε στήλη του Π' ισούται με το γινόμενο του P επι την αντίστοιχη στήλη του Π από τα παραπάνω συνάγονται τα εξής:

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ_1. Τα διανύσματα $α_1$, $α_2$, $α_3$, $β_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν (γεννούν) τον χώρο $W_1 + W_2$ άρα μια βάση του $W_1 + W_2$ είναι η { $α_1$, $α_2$, $α_3$, $β_2$ } και συνεπώς dim ($W_1 + W_2$)= 4.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ_2. Τα διανύσματα $α_1$, $α_2$, $α_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν (γεννούν) τον χώρο W_1, άρα μια βάση του W_1 είναι η { $α_1$, $α_2$, $α_3$} και συνεπώς η διάσταση του W_1 ισούται προς 3 (dim W_1=3)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ_3. Τα διανύσματα β_1, β_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα μια βάση του W_2 είναι η { β_1, β_2} και συνεπώς dim W_2=2.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ_4. Το διάνυσμα β_1 που ανήκει στον W_2 είναι γραμμικός συνδυασμός των α_1, α_2, α_3, ($\beta_1 = 3\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$) άρα ανήκει και στον χώρο W_1 συνεπώς και στην τομή τους δηλαδή στον χώρο $\mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}$. Επιπλέον από την σχέση για την διάσταση του αθροίσματος υποχώρων έχουμε ότι

dim($\mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}$) = dim W_1 + dim W_2 - dim(W_1 + W_2)=3+2-4=1, άρα μία βαση του χωρου $\mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}$

είναι το μονοσύνολο {β_1}αφού το β_1 είναι μη μηδενικό διάνυσμα.

(Σε περίπτωση που δεν ισχύει κάτι ανάλογο με την ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ_4 και το ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ_4, για να βρούμε την διάσταση της τομής των υποχώρων θα είχαμε να λύσουμε ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων με πίνακα συντελεστών ουσιαστικά τον παραπάνω πίνακα Π).

9. *(12 μον)* Έστω $S=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ μία βάση του $\mathbb{R}^4$. Θεωρούμε το σύνολο $T=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ με $v_1 = u_1+ u_2 + u_3 +u_4$, $v_2 = u_1 + u_3 +2u_4$, $v_3 = u_1+ u_2 +u_4$, $v_4 = u_1 + u_3 +\alpha u_4$, όπου α πραγματική παράμετρος.

a. Να βρεθούν όλες οι τιμές του α για τις οποίες το σύνολο T είναι βάση του $\mathbb{R}^4$.
b. Για τις τιμές αυτές του α να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S στην T και να γραφεί το διάνυσμα $v = 2u_1- u_2 - u_3 + u_4$ στην βάση T.
Υπόδειξη Βλ. Παραδείγματα της Παραγράφου 2.9 του βιβλίου του ΕΑΠ.

Λύση

Για να είναι το σύνολο T βάση του $\mathbb{R}^4$ αρκεί τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4, να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (καθώς η διάσταση του χώρου $\mathbb{R}^4$ είναι τέσσερα και το σύνολο T αποτελείται από 4 στοιχεία).

Επιπλέον αν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4, αποτελούν βάση τότε οι συντελεστές λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 ώστε να ισχύει η σχέση $v = \lambda_1 v_1+ \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$ ικανοποιούν την σχέση $[v]_S = \lambda_1 [v_1]_S + \lambda_2 [v_2]_S + \lambda_3 [v_3]_S + \lambda_4 [v_4]_S$
όπου $[v]_S$ ο πίνακας στήλη συντεταγμένων του διανύσματος v ως προς την βάση S.

Άρα μπορούμε να εργαστούμε με τα διανύσματα (στήλες) συντεταγμένων ως προς την βάση *S και να* απαντήσουμε και στα σύο ερωτήματα θεωρώντας τον επαυξημένο πίνακα A με στήλες τα διανύσματα συντεταγμένων των v_1, v_2, v_3, v_4 και v ως προς την βάση S.
Προχωρούμε στην κλιμακωτή του μορφή:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & -4 \end{array}\right).$$

Και στο σημείο αυτό είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι:
Για να αποτελούν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4, βάση του $\mathbb{R}^4$, πρέπει και αρκεί $\alpha\neq 2$.

Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S στην T είναι ο πίνακας που απαρτίζεται από τις 4 πρώτες στήλες του A δηλαδή ο $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ και οι συντελεστές λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 βρίσκονται προχωρώντας στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4/(2-a) \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 2-4/(2-a) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3-4/(2-a) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4/(2-a) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & -1-4/(2-a) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3-4/(2-a) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4/(2-a) \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & (2-3a)/(2-a) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4/(2-a) \end{array}\right).$$

Αρα λ_1=-4, λ_2=(2-3α)/(2-α) , λ_3 =3, λ_4 =4/(2-α)

και $$\boxed{v = -4v_1 + \frac{2-3a}{2-a}v_2 + 3v_3 + \frac{4}{2-a}v_4}.$$

Ενας άλλος τρόπος για να γράψουμε το διάνυσμα v στην βάση T είναι να βρούμε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την T στην S που είναι ο αντίστροφος του B:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{2-a} & \frac{a-1}{2-a} & 0 & \frac{1}{2-a} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{a-2} & \frac{-1}{2-a} & 0 & \frac{-1}{2-a} \end{pmatrix}$$

και να τον πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα στήλη συντεταγμένων του που v ως προς την βάση S:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{2-a} & \frac{a-1}{2-a} & 0 & \frac{1}{2-a} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{a-2} & \frac{-1}{2-a} & 0 & \frac{-1}{2-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{2-3a}{2-a} \\ 3 \\ \frac{4}{2-a} \end{pmatrix}.$$

Έτσι βρίσκουμε ότι $v = -4v_1 + \frac{2-3a}{2-a} v_2 + 3v_3 + \frac{4}{2-a} v_4$.