ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

<u>ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ</u>

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

Ενδεικτικές λύσεις

ΕΡΓΑΣΙΑ 2η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή:	**16 Νοεμβρίου 2005**
Ημερομηνία Παράδοσης της Εργασίας από τον Φοιτητή:	**16 Δεκεμβρίου 2005**

Οι ασκήσεις της εργασίας αναφέρονται στα θέματα :

Κεφάλαιο 3 (Χώροι εσωτερικού γινομένου)
Κεφάλαιο 4 (Γραμμικοί μετασχηματισμοί)
Κεφάλαιο 5.1, 5.2 (Χαρακτηριστικά μεγέθη- Διαγωνοποίηση)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «*Γραμμική Άλγεβρα*» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.

Βοηθητικό υλικό: Για την εργασία 2 μπορείτε να συμβουλευθείτε το υλικό που υπάρχει στη διεύθυνση http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm

- Από το ΕΔΥ:

  Κεφ 7, Βάση και Διάσταση

  Κεφ 8, Γραμμικές Απεικονίσεις,

  Κεφ 9, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα,

  Κεφ 10, Διαγωνοποίηση,

- Από το ΣΕΥ: Οι Χώροι R^n, Διανυσματικοί Χώροι ,

  Γραμμικές απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα,

  Διαγωνοποίηση

1. (12 μον.)

Έστω το σύνολο

$$W=\left\{\ \left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\in\mathbb{R}^4\ :\quad x_1-2x_2+x_3+x_4=0\ \right\}$$

α) Βρείτε μία βάση του υπόχωρου W και τη διάσταση του W.

β) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^{\perp}$.

γ) Υπολογίστε την προβολή του διανύσματος $\mathbf{v}=\left(1,-1,1,0\right)$ στον W και $W^{\perp}$.

(Υπόδειξη : Μελετήστε τη θεωρία των σελ. 152 - 165 του βιβλίου).

Λύση : α) Επειδή $x_1-2x_2+x_3+x_4=0\Rightarrow \mathrm{x}_1=2x_2-x_3-x_4$, κάθε διάνυσμα του W γράφεται

$$\begin{aligned}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)&=\left(2x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4\right)=\left(2x_2,x_2,0,0\right)+\left(-x_3,0,x_3,0\right)+\left(-x_4,0,0,x_4\right)\\&=x_2\left(2,1,0,0\right)+x_3\left(-1,0,1,0\right)+x_4\left(-1,0,0,1\right)=x_2\mathbf{v}_1+x_3\mathbf{v}_2+x_4\mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

Άρα $W=\mathrm{span}\left\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\right\}$. Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι ο υποπίνακας $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ του $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα $\det\mathbf{A}_1=-1\neq 0$. Συνεπώς, $\left\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\right\}$ είναι βάση του W και $dim\,\mathrm{W}=3$.

β) Για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $W^{\perp}$, θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{u}=\left(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{w}\right)\in W^{\perp}$, το οποίο αρκεί να είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα της βάσης του W. Λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1=0\\\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2=0\\\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\mathrm{x}+\mathrm{y}=0\\-\mathrm{x}+\mathrm{z}=0\\-\mathrm{x}+\mathrm{w}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\mathrm{y}=-2\mathrm{x}\\\mathrm{z}=\mathrm{x}\\\mathrm{w}=\mathrm{x}\end{array},$$

έχουμε $\mathbf{u}=\left(\mathrm{x},-2\,\mathrm{x},\mathrm{x},\mathrm{x}\right)$, άρα $W^{\perp}=\mathrm{span}\left\{\mathbf{r}=\left(1,-2,1,1\right)\right\}$.

Επειδή $\left\|\mathbf{r}\right\|=\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2+1^2+1^2}=\sqrt{7}$, μια ορθοκανονική βάση του $W^{\perp}$ είναι $\mathrm{span}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}$.

γ) Έστω $\mathbf{p} \in W$ και $\mathbf{p}' \in W^{\perp}$ οι προβολές του $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 0)$ στους δύο υπόχωρους. Σύμφωνα με τον τύπο (27) σελ. 157 του βιβλίου έχουμε

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{r} = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} (1, -2, 1, 1) = \frac{4}{7} (1, -2, 1, 1).$$

Από τη σχέση $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{p}'$ (βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 165) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} - \mathbf{p}' = (1, -1, 1, 0) - \frac{4}{7}(1, -2, 1, 1) = \left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{4}{7} \right),$$

είναι η προβολή του διανύσματος $\mathbf{v}$ στον υπόχωρο W.

2. (12 μον.)

Θεωρήστε τα διανύσματα

$$\mathbf{v} = (2, -1, 3) \quad \text{και} \quad \mathbf{v}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{v}_2 = (2, 2, 0),\ \mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$$

α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$ και βρείτε τις συντεταγμένες του $\mathbf{v}$ ως προς την παραπάνω βάση.

β) Αποδείξτε για τα διανύσματα $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $\mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ του $\mathbb{R}^3$ ότι η σχέση

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο χώρο.

γ) Υπολογίστε τον πίνακα αναπαράστασης A του εσωτερικού γινομένου στην (β) και εξετάστε αν είναι θετικά ορισμένος.

(*Υπόδειξη*: Για το τελευταίο ερώτημα δείτε την παράγραφο 3.7 του βιβλίου)

Λύση : α) Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ και επιπλέον είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$. Συνεπώς αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$. Οι συντεταγμένες του $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ ως προς αυτή τη βάση είναι η μοναδική λύση του συστήματος $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$.

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$, η δε λύση είναι $z = 1$, $y = -2$ και $x = 3$. Συνεπώς, $\mathbf{v} = 3 \cdot \mathbf{v}_1 - 2 \cdot \mathbf{v}_2 + 1 \cdot \mathbf{v}_3$.

β) Για να αποτελεί η δοθείσα σχέση εσωτερικό γινόμενο αρκεί να επαληθεύει τις ιδιότητες του ορισμού 3.1.1. Πράγματι, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{z} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^3$ είναι

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \mu(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2, \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3) = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3)$$

οπότε κάνοντας πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}_1)\ (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= 10\hat{\alpha}_1\gamma_1 + 3\hat{\alpha}_1\gamma_2 + 3\hat{\alpha}_2\gamma_1 + 2\hat{\alpha}_2\gamma_2 + \hat{\alpha}_2\gamma_3 + \hat{\alpha}_3\gamma_2 + \hat{\alpha}_3\gamma_3 \\
&= 10(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)\gamma_1 + 3(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)\gamma_2 + 3(\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)\gamma_1 \\
&\quad + 2(\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)\gamma_2 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)\gamma_3 + (\lambda\alpha_3 + \mu\beta_3)\gamma_2 + (\lambda\alpha_3 + \mu\beta_3)\gamma_3 \\
&= \lambda(10\alpha_1\gamma_1 + 3\alpha_1\gamma_2 + 3\alpha_2\gamma_1 + 2\alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) \\
&\quad + \mu(10\beta_1\gamma_1 + 3\beta_1\gamma_2 + 3\beta_2\gamma_1 + 2\beta_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2 + \beta_3\gamma_3) \\
&= \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mu(\mathbf{y}, \mathbf{z})
\end{aligned}$$

η αντιμεταθετική ιδιότητα που ισχύει στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών δίνει

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}_2)\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= 10\beta_1\alpha_1 + 3\beta_1\alpha_2 + 3\beta_2\alpha_1 + 2\beta_2\alpha_2 + \beta_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 \\
&= 10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_3 \\
&= 10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{y})
\end{aligned}$$

και τέλος

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}_3)\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= 10\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3^2 \\
&= 10\alpha_1^2 + 6\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 \\
&= \alpha_1^2 + (3\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

και μάλιστα $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1^2 + (3\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2 = 0$, όπου συμπεραίνουμε $\alpha_1 = 0, \quad 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ και $\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$. Άρα $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

γ) Ο πίνακας αναπαράστασης του εσωτερικού γινομένου είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{bmatrix},$$

όπου $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ αποτελούν βάση του χώρου σύμφωνα με το (α) και $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ συμβολίζεται το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων που ορίστηκε στο (β), (δείτε παράγραφο 3.7 του βιβλίου. Αρκεί να υπολογισθούν τα $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, για τα οποία ισχύει $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i$, εξαιτίας της ιδιότητας (I_2) του εσωτερικού γινομένου. Έχουμε

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = (1,0,0) \cdot (1,0,0) = 10$,

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (1,0,0)\cdot(2,2,0) = 20+6 = 26 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$,

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = (1,0,0)\cdot(3,3,3) = 30+9 = 39 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1$,

$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = (2,2,0)\cdot(2,2,0) = 40+12+12+8 = 72$,

$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = (2,2,0)\cdot(3,3,3) = 60+18+18+12+6 = 114 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2$,

$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = (3,3,3)\cdot(3,3,3) = 90+27+27+18+9+9+9 = 189$,

οπότε $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 26 & 39 \\ 26 & 72 & 114 \\ 39 & 114 & 189 \end{bmatrix}$. Ο συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A}$ είναι θετικά ορισμένος, γιατί όλες οι κύριες πρωτεύοντες ελάσσονες ορίζουσες των υποπινάκων του $\mathbf{A}$ είναι θετικές, $10 > 0$, $\begin{vmatrix} 10 & 26 \\ 26 & 72 \end{vmatrix} = 44 > 0$, $\det \mathbf{A} = 36 > 0$, (δείτε θεώρημα 3.7.2 του βιβλίου).

3. (15 μον.)

α) Εξετάστε αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \mathbf{(1,-1,1)}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{(3,2,-1)}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι ορθογώνια.

β) Ανήκει το διάνυσμα $\mathbf{w} = \mathbf{(2,1,-1)}$ στον χώρο $\mathrm{V} = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$;

γ) Βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v}_3$ του χώρου $\mathbb{R}^3$, το οποίο να είναι ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$.

δ) Βρείτε την τρίτη στήλη του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 3/\sqrt{14} & ; \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & ; \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{14} & ; \end{bmatrix}$$

ώστε ο A να είναι ορθογώνιος.

ε) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)$ και $\mathbf{v}_4 = (1,1,0)$ με τη διαδικασία των Gram-Schmidt.

Λύση α) Δύο διανύσματα είναι ορθογώνια αν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν. Επειδή

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot(-1) = 3 - 2 - 1 = 0$$

τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι ορθογώνια.

β) Για να ανήκει το διάνυσμα $\mathbf{w} = (2,1,-1)$ στο χώρο $\mathrm{V} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, αρκεί να γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Έστω

$$\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \Rightarrow (2,1,-1) = (a,-a,\ a) + (3b,\ 2b,\ -b) = (a+3b, -a+2b,\ a-b) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + 3b = 2 \\ -a + 2b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases}$$

Επειδή

$$[\mathbf{A} \mathrel{\vdots} \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & 2 \\ -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 + \gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 5 & \vdots & 3 \\ 0 & -4 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & 3/5 \\ 0 & -4 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 + 4\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & 3/5 \\ 0 & 0 & \vdots & -3/5 \end{bmatrix}$$

το παραπάνω σύστημα δεν έχει λύση. Δηλαδή, δεν υπάρχουν *a, b* τέτοια ώστε $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$ και έτσι το $\mathbf{w} = (2,1,-1)$ δεν ανήκει στο χώρο $\mathrm{V} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

γ) Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{v}_3 = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ του χώρου $\mathbb{R}^3$. Για να είναι το $\mathbf{v}_3$ ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ πρέπει :

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Για το ομογενές σύστημα έχουμε :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 3\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + \gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί στο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} x+\frac{1}{5}z=0 \\ y-\frac{4}{5}z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}z \\ y=\frac{4}{5}z \end{cases}$$

Άρα το $\mathbf{v}_3$ που αναζητούμε είναι της μορφής $\mathbf{v}_3=(x,y,z)=\left(-\frac{1}{5}z,\frac{4}{5}z,z\right)$ και ένα τέτοιο είναι το $\mathbf{v}_3=(-1,\ 4,\ 5)$, για $z=5$.

δ) Σύμφωνα με το θεώρημα 3.8.1, ένας $n\times n$ πίνακας **A** είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν οι στήλες του (και οι γραμμές) αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathbb{R}^n$.
Παρατήρησε ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ από τα προηγούμενα ερωτήματα αν το καθένα διαιρεθεί με το μέτρο του είναι το ίδιο με τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα **A**. Το δε διάνυσμα $\mathbf{v}_3$ στο (γ) κατασκευάστηκε ορθογώνιο, άρα αρκεί να διαιρεθεί και αυτό με το μέτρο του, $\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{42}$, για να αποτελέσει την τρίτη στήλη του **A**. Έτσι,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{42} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & 4/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{14} & 5/\sqrt{42} \end{bmatrix}$$

ε) Επειδή τα διανύσματα $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ($\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}=0$), ενώ τα $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}=-4\neq 0$, τα $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4\}$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Με τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt έχουμε :

$\tilde{\mathbf{v}}_1=(1,0,1)$,

$\tilde{\mathbf{v}}_2=\mathbf{v}_2-\frac{\mathbf{v}_2\cdot\tilde{\mathbf{v}}_1}{\tilde{\mathbf{v}}_1\cdot\tilde{\mathbf{v}}_1}\tilde{\mathbf{v}}_1=(1,2,3)-2(1,0,1)=(-1,2,1)$,

$\tilde{\mathbf{v}}_3=\mathbf{v}_4-\frac{\mathbf{v}_4\cdot\tilde{\mathbf{v}}_1}{\tilde{\mathbf{v}}_1\cdot\tilde{\mathbf{v}}_1}\tilde{\mathbf{v}}_1-\frac{\mathbf{v}_4\cdot\tilde{\mathbf{v}}_2}{\tilde{\mathbf{v}}_2\cdot\tilde{\mathbf{v}}_2}\tilde{\mathbf{v}}_2=(1,1,0)-\frac{1}{2}(1,0,1)-\frac{1}{6}(-1,2,1)=(\frac{4}{6},\frac{4}{6},-\frac{4}{6})$

Διαιρώντας με το μέτρο κάθε διάνυσμα είναι

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_1}{\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_2}{\|\tilde{\mathbf{v}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1), \quad \hat{\mathbf{v}}_3 = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_3}{\|\tilde{\mathbf{v}}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1).$$

Σημείωσε, ότι αν επιλέξουμε άλλα διανύσματα ως βάση του $\mathbb{R}^3$, για παράδειγμα τα $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, θα βρούμε διαφορετική ορθοκανονική βάση.

4. (12 μον.)

Να εξετάσετε ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις είναι γραμμικές:

α) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x,y) = (xy, y)$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

β) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_2(x,y) = (x+1, 3y, y-x)$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

γ) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_3(x,y,z) = (0, 2x, 3y)$, για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Επιπλέον, αποδείξατε ότι $f_3^3 = f_3 \circ f_3 \circ f_3 = 0$, όπου 0 είναι η μηδενική συνάρτηση.

Λύση Υπενθυμίζουμε ότι αν V και W είναι K-διανυσματικοί χώροι, τότε μια απεικόνιση $g : V \to W$, είναι γραμμική αν και μόνο αν ισχύει $g(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 g(v_1) + k_2 g(v_2)$, για κάθε $k_1, k_2 \in K$ και $v_1, v_2 \in V$, ή ισοδύναμα να ισχύουν ταυτόχρονα οι ιδιότητες : i) $g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2)$ και ii) $g(kv) = kg(v)$, για κάθε $v_1, v_2, v \in V$ και κάθε $k \in K$.

α) η συνάρτηση $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x,y) = (xy, y)$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ δεν είναι γραμμική, αφού για παράδειγμα έχουμε: $f_1\big(3(1,1)\big) = f_1(3,3) = (9,3)$, ενώ $3f(1,1) = 3(1,1) = (3,3)$, άρα $f_1(3(1,1)) \neq 3f_1(1,1)$ και επομένως η f_1 δεν είναι γραμμική συνάρτηση.

β) Η συνάρτηση $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, όπου $f_2(x,y) = (x+1, 3y, y-x)$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ δεν είναι γραμμική συνάρτηση, εφόσον $f_2(0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$ ως όφειλε (δείτε την ιδιότητα (ii) για $k = 0$).

γ) Η συνάρτηση $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με $f_3(x,y,z) = (0, 2x, 3y)$ είναι γραμμική διότι :

i) Έστω $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$. Τότε :

$$f_3\big((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)\big) = f_3\left(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3\right) = \big(0, 2(x_1+y_1), 3(x_2+y_2)\big)$$
$$= \left(0, 2x_1+2y_1, 3x_2+3y_2\right) = \left(0, 2x_1, 3x_2\right) + \left(0, 2y_1, 3y_2\right) = f_3\left(x_1,x_2,x_3\right) + f_3\left(y_1,y_2,y_3\right)$$

ii) $f_3\left(k(x,y,z)\right)=f_3\left(kx,ky,kz\right)=\left(0,2kx,3ky\right)=k\left(0,2x,3y\right)=kf_3\left(x,y,z\right)$

Για να δείξουμε ότι $f_3^3=f_3\circ f_3\circ f_3=0$, αρκεί να δειχθεί ότι $f_3^3\left(x,y,z\right)=(0,0,0)$ για κάθε $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Πράγματι,

$$f_3^3\left(x,y,z\right)=f_3\left(f_3^2(x,y,z)\right)=f_3\left(f_3\left(f_3\left(x,y,z\right)\right)\right)=$$
$$f_3\left(f_3\left(0,2x,3y\right)\right)=f_3\left(0,0,6x\right)=(0,0,0)$$

5. (15 μον.)

Έστω η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με $f\left(x,y,z\right)=\left(x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z\right)$.

i) Δείξτε ότι η f είναι γραμμική,

ii) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση της εικόνας της f,

iii) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του πυρήνα της f,

iv) Ορίσετε την απεικόνιση f^{-1}, αν υπάρχει

v) Βρείτε τον πίνακα αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Λύση i) Έστω $v_1=\left(x_1,y_1,z_1\right),\quad v_2=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, τότε

$f\left(v_1\right)=f\left(x_1,y_1,z_1\right)=\left(x_1+2y_1-z_1,y_1+z_1,x_1+y_1-2z_1\right)$,

$f\left(v_2\right)=f\left(x_2,y_2,z_2\right)=\left(x_2+2y_2-z_2,y_2+z_2,x_2+y_2-2z_2\right)$, και

$$\begin{aligned}f\left(v_1+v_2\right)&=f\left(\left(x_1,y_1,z_1\right)+\left(x_2,y_2,z_2\right)\right)=f\left(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\right)\\&=\left(x_1+x_2+2\left(y_1+y_2\right)-\left(z_1+z_2\right),y_1+y_2+z_1+z_2,x_1+x_2+\left(y_1+y_2\right)-2\left(z_1+z_2\right)\right)\\&=\left(x_1+2y_1-z_1,y_1+z_1,x_1+y_1-2z_1\right)+\left(x_2+2y_2-z_2,y_2+z_2,x_2+y_2-2z_2\right)\\&=f\left(v_1\right)+f\left(v_2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\left(\lambda v_1\right)&=f\left(\lambda\left(x_1,y_1,z_1\right)\right)=f\left(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\right)\\&=\left(\lambda x_1+2\lambda y_1-\lambda z_1,\lambda y_1+\lambda z_1,\lambda x_1+\lambda y_1-2\lambda z_1\right)\\&=\lambda f\left(v_1\right)\end{aligned}$$

δηλαδή, η f είναι γραμμική.

ii) Επειδή
$f\left(x,y,z\right)=\left(x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z\right)=x\left(1,0,1\right)+y\left(2,1,1\right)+z\left(-1,1,-2\right)$,
η εικόνα της f παράγεται από τα διανύσματα $\left(1,0,1\right),\left(2,1,1\right),\left(-1,1,-2\right)$. Η διάσταση της εικόνας είναι ≤ 3. Για να βρούμε τη διάστασή της εικόνας (Imf) θα εξετάσουμε

αν οι γεννήτορες είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Πράγματι, με γραμμοπράξεις στον παρακάτω πίνακα έχουμε :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\gamma_3\to\gamma_3+\gamma_1]{\gamma_2\to(-2)\gamma_1+\gamma_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\gamma_3\to(-1)\gamma_2+\gamma_3}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Άρα, $\dim \operatorname{Im} f=2$, και τα διανύσματα $\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$ είναι βάση του $\operatorname{Im} f$.

iii) Από τον τύπο σελ 91, $\dim\Delta=\dim(\operatorname{Im} f)+\dim(Kerf)$, έχουμε ότι $\dim(\ker f)=3-2=1$, διότι η διάσταση του χώρου είναι 3.

Για να βρούμε τη βάση του $\ker f$, πρέπει να λύσουμε το ομογενές σύστημα

$$\left.\begin{aligned}x+2y-z&=0\\ y+z&=0\\ x+y-2z&=0\end{aligned}\right\}.$$ Επειδή $y=-z$ και $x=z-2y=3z \Rightarrow (x,y,z)=z(3,-1,1)$.

Άρα, το διάνυσμα $(3,-1,1)$ είναι μια βάση του $\ker f$.

iv) Για να υπάρχει f^{-1}, πρέπει η γραμμική απεικόνιση f να είναι 1-1 και επί, δηλαδή ισομορφισμός. Για να είναι όμως 1-1 πρέπει το $\ker f=\{\mathbf{0}\}$. Αλλά από την (iii), $\ker f\neq\{\mathbf{0}\}$, και συνεπώς δεν υπάρχει η f^{-1}.

v) Για τον πίνακα αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ παίρνουμε την κανονική βάση που είναι $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

$f(e_1)=(1,0,1)=1e_1+0e_2+1e_3$, $\quad f(e_2)=(2,1,1)=2e_1+1e_2+1e_3$,

$f(e_3)=(-1,1,-2)=-1e_1+1e_2-2e_3$. Οπότε ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$.

6. (12 μον)

Έστω ένας 3×3 πραγματικός πίνακας A, τέτοιος ώστε $A\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3&3&3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $A\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ και $A\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2&0&2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

α) Να βρείτε τις ιδιοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

β) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται; Αν ναι, ποια είναι η διαγώνια μορφή του και ο αντιστρέψιμος πίνακας P, ώστε να ισχύει $P^{-1}AP = D$;

γ) Υπολογίστε τον πίνακα A. Υπάρχει ο A^{-1} ;

δ) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^8;

Λύση : α) Επειδή $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ και

$A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \lambda_3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$,

(βιβλίο ΕΑΠ, ορισμός 5.1.2), ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ και την ιδιοτιμή $\lambda_3 = -2$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathbf{A}$ είναι

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (3-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda$.

β) Επειδή οι ιδιοτιμές είναι όλες διαφορετικές, ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος (βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 285). Ο δε πίνακας $\mathbf{P}$, με στήλες τα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$, είναι αντιστρέψιμος, διότι τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές.

Έχουμε τον $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 2 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ και επαληθεύουμε την ισότητα

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \operatorname{diag}(3,0,-2)$.

γ) Από τη σχέση $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \operatorname{diag}(3,0,-2) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}\operatorname{diag}(3,0,-2)\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\3 & -3 & 3\\5 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

Ο $\mathbf{A}$ δεν αντιστρέφεται διότι $\det\mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$.

δ) Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}^8$ είναι $\lambda_1^8 = 3^8$, $\lambda_2^8 = 0$ και $\lambda_3^8 = (-2)^8 = 256$.

7. (10 μον.)

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ και να υπολογισθεί ο πίνακας $A^{2006}-A^{-2}$.

β) Να βρεθεί ο αντίστροφος των πινάκων A και B με τη χρήση του θεωρήματος Caley-Hamilton

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

Λύση

α) $\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{bmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2+1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρίζες τις ιδιοτιμές του **A**, $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$.

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα.

Για $\lambda=\lambda_1=i$ έχουμε: $\begin{bmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. Το σύστημα έχει λύση $x_2=t$, $x_1=it$, οπότε $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}it\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}$ και για $t=1$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $v_1=\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}$.

Για $\lambda=\lambda_2=-i$ έχουμε: $\begin{bmatrix}i & -1\\ 1 & i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, το δε σύστημα έχει λύση $x_2=t$, $x_1=-it$. Συνεπώς $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-it\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για $t=1$ είναι $v_2=\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε

$$P\left(\mathbf{A}\right)=\mathbf{0}\Leftrightarrow \mathbf{A}^2+\mathbf{I}=\mathbf{0}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{A}^2=-\mathbf{I},$$

οπότε

$$\mathbf{A}^{2006}-\mathbf{A}^{-2}=\left(\mathbf{A}^2\right)^{1003}-\left(\mathbf{A}^2\right)^{-1}=\left(-\mathbf{I}\right)^{1003}-\left(-\mathbf{I}\right)^{-1}=-\mathbf{I}+\mathbf{I}=\mathbf{0}.$$

Άλλος τρόπος : Αν $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{D}=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

Άρα

$$\mathbf{A}^{2006}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^{2006}\cdot\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{A}^{-2}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^{-2}\cdot\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathbf{A}^{2006}-\mathbf{A}^{-2}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$.

β) Να βρεθεί ο αντίστροφος των πινάκων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ με τη χρήση του θεωρήματος Caley-Hamilton

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

α) $\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}=\lambda^2-5\lambda-2=P(\lambda)$. Επειδή ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δεν είναι μηδέν, ο A αντιστρέφεται. Έχουμε

$$P(\mathbf{A})=\mathbf{0} \iff \mathbf{A}^2-5\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\mathbf{0} \iff \mathbf{A}\left(\mathbf{A}-5\mathbf{I}\right)=2\mathbf{I}$$

$$\iff \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-5\mathbf{I}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}-5\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

β)

$$\det\left(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}\right)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\left(1-\lambda\right)\left(\lambda^2-2\lambda-6\right)+2\left(2+4+4\lambda\right)=$$

$$=-\lambda^3+3\lambda^2+12\lambda+6=P(\lambda)$$

Άρα

$$P(\mathbf{B})=\mathbf{0}\Leftrightarrow -\mathbf{B}^3+3\mathbf{B}^2+12\mathbf{B}+6\mathbf{I}=\mathbf{0}\Leftrightarrow \mathbf{B}\left(-\mathbf{B}^2+3\mathbf{B}+12\mathbf{I}\right)=-6\mathbf{I}\Leftrightarrow$$

$$\mathbf{B}^{-1}=-\frac{1}{6}\left(-\mathbf{B}^2+3\mathbf{B}+12\mathbf{I}\right)=\frac{1}{6}\left(\mathbf{B}^2-3\mathbf{B}-12\mathbf{I}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&3\end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&3\end{bmatrix}-12\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}9&2&8\\12&4&10\\18&2&20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&6\\6&-3&9\\12&3&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12&0&0\\0&12&0\\0&0&12\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\1&-\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\\1&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}.$$

8. (12 μον)

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x,y,z)=\left(-2x+y+5z,\,3x-5z,\,x+y+2z\right).$$

α) Εξετάστε αν η απεικόνιση f είναι διαγωνοποιήσιμη.

β) Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και υπολογίστε την f^{-1}.

γ) Ποιος είναι ο πυρήνας της f, και ποια είναι η διάστασή του;

Λύση : α) Σύμφωνα με το θεώρημα 5.2.1, αρκεί να βρούμε τον πίνακα αναπαράστασης της γραμμικής απεικόνισης, ως προς τις συνήθεις βάσεις του $\mathbb{R}^3$, και να εξετάσουμε αν αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος. Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι : $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&1&5\\3&0&-5\\1&1&2\end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&5\\3&-\lambda&-5\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=\left(2-\lambda\right)\left(\lambda^2+2\lambda-3\right)=\left(2-\lambda\right)\left(\lambda-1\right)\left(\lambda+3\right)$.

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=-3$, οι οποίες είναι όλες διαφορετικές, άρα ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος (βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 285), ισοδύναμα, η γραμμική απεικόνιση είναι διαγωνοποιήσιμη.

β) Επειδή ο $\mathbf{A}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $\mathbf{P}$ και διαγώνιος $\mathbf{\Delta}$ έτσι ώστε $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Delta}=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)$. Επίσης, $\det\mathbf{A}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-6\neq 0$ (βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 281), οπότε από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.4.2, ο πίνακας αναπαράστασης της f^{-1} είναι $\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 3 & -5 \\ -11 & -9 & 5 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$,

δηλαδή,

$$f^{-1}(x,y,z) = \left(-\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{6}z, \frac{11}{6}x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{6}z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \right).$$

γ) Επειδή η f είναι αντιστρέψιμη, σύμφωνα με ο θεώρημα 4.3.7 (βιβλίο ΕΑΠ, σελ. 216), $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, και $dim\{\ker f\} = 0$.
