ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

<u>ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ</u>

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

Ενδεικτικές Λύσεις

ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: **3 Ιανουαρίου 2006**
Ημερομηνία Παράδοσης της Εργασίας από τον Φοιτητή: **3 Φεβρουαρίου 2006**

Οι πρώτες 2 ασκήσεις της 3ης εργασίας είναι επαναληπτικές του συγγράμματος του ΕΑΠ «*Γραμμική Άλγεβρα*» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα, ενώ οι υπόλοιπες ασκήσεις της εργασίας αναφέρονται στα θέματα :

Κεφάλαιο 2 (Συναρτήσεις – Ακολουθίες – Όρια)
Κεφάλαιο 3 (Σειρές)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «*Λογισμός Μιας Μεταβλητής*» του Γ. Δάσιου.

Βοηθητικό υλικό: Για την εργασία 3 μπορείτε να συμβουλευθείτε το υλικό που υπάρχει στη διεύθυνση http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm

- Από το ΣΕΥ: Ακολουθίες, Σειρές.

Άσκηση 1. (10 μονάδες)

1. α) Για ποιές τιμές της παραμέτρου a το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση, άπειρες λύσεις ή καμία λύση;

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = -a \\ ax + y - 3z = -1 \end{cases}$$

Για τις τιμές εκείνες για τις οποίες το σύστημα έχει λύση, να βρείτε την (ή τις) λύση(εις) του.

β) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με

$$f(x,y,z,w) = (2x - y + w, -x + z + w, -x + 2y + 3z - w, -3x + 2y + 5z + w)$$

Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $\mathrm{Ker}f$ και μια βάση της εικόνας $\mathrm{Im}\, f$.

Λύση: α) Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Είναι $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ a & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3(a+1)^2$. Επομένως, αν $a \neq -1$ ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}$ αντιστρέφεται και το σύστημα έχει μοναδική λύση $A^{-1}X$, όπου $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ -1 \end{pmatrix}$.

Είναι $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & 0 & \frac{1}{a+1} \\ -\frac{1}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 \\ \frac{a-1}{3(a+1)} & \frac{1}{3(a+1)} & -\frac{1}{3(a+1)} \end{pmatrix}$ και επομένως $A^{-1}X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, δηλαδή $x = 0,\ y = -1,\ z = 0$.

Αν τώρα $a = -1$ το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ x - y + 3z = 1 \\ -x + y - 3z = -1 \end{cases}$ Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτες γραμμές είναι ίσες. Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -x + y - 3z = -1 \end{cases}$ που και αυτό είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x - y + 3z = 1 \Leftrightarrow x = y - 3z + 1$.

Άρα οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι οι τριάδες

$(x, y, z) = (y - 3z + 1,\ y,\ z) = (1,0,0) + y(1,1,0) + z(-3,0,1)$, όπου $y, z \in \mathbb{R}$.

β) Βρίσκουμε τον πυρήνα. Έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ -x + z + w = 0 \\ -x + 2y + 3z - w = 0 \\ -3x + 2y + 5z + w = 0 \end{cases}$$

Παίρνουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ του συστήματος και κάνουμε γραμμοπράξεις

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_1}]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Οι δύο τελευταίες γραμμές είναι ίσες και συνεπώς μπορούμε να δουλέψουμε με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{6}\Gamma_3]{\substack{\Gamma_1 \to -\Gamma_1 \\ \Gamma_2 \to -\Gamma_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

Το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x - \frac{2}{6}w = 0 \\ y - \frac{10}{6}w = 0 \\ z + \frac{4}{6}w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{6}w \\ y = \frac{10}{6}w \\ z = -\frac{4}{6}w \end{cases}$

Επομένως το τυχαίο στοιχείο (x, y, z, w) του πυρήνα γράφεται $(x, y, z, w) = (\frac{2}{6}w, \frac{10}{6}w, -\frac{4}{6}w, w) = w(\frac{2}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{4}{6}, 1)$, όπου $w \in \mathbb{R}$. Το μονοσύνολο $\{(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1)\}$ αποτελεί βάση του $\mathrm{Ker}f$.

Εφόσον $\dim \mathrm{Ker}f = 1$, έπεται ότι $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}f = 4 - 1 = 3$.

Ο πίνακας τώρα της f είναι ο $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Οι στήλες του αποτελούν γεννήτορες της εικόνας. Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη είναι

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Άρα οι τρεις πρώτες στήλες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και επομένως αποτελούν βάση της εικόνας.

Άσκηση 2. (10 μονάδες) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $\alpha \geq 0$ πραγματικός αριθμός.

α) Ελέγξτε αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και βρέστε τις ιδιοτιμές του για κάθε α.

β) Για α = 4 να βρεθεί ορθομοναδιαίος πίνακας P τέτοιος ώστε $A = PDP^{-1}$ όπου D είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία του τις ιδιοτιμές του A.

γ) Διερευνήστε αν για κάποιες τιμές του α > 0 η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ (στην κανονική βάση) είναι θετικά (ή αρνητικά) ορισμένη, θετικά (ή αρνητικά) ημιορισμένη ή αόριστη (δηλ. τίποτε από αυτά) Υπόδειξη: βλ. παράγρ. 3.7, σελ. 172 του βιβλίου.

Λύση.

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Α είναι το παρακάτω:

$$\det\left(sI_3 - A\right) = \det\begin{bmatrix} s-1 & -2 & -1 \\ -2 & s-\alpha & -2 \\ -1 & -2 & s-1 \end{bmatrix} =$$

$$= s^3 + \left(-a-2\right)s^2 + \left(2a-8\right)s =$$

$$= s\left(s^2 + \left(-a-2\right)s + \left(2a-8\right)\right)$$

Παρατηρούμε μια από τις ιδιοτιμές του πίνακα Α είναι το s=0 και συνεπώς δεν είναι αντιστρέψιμος. Οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$s^2 + \left(-a-2\right)s + \left(2a-8\right) = 0$$

δηλαδή οι

$$s = \frac{-(-a-2) \pm \sqrt{(-a-2)^2 - 4(2a-8)}}{2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{a^2-4a+36}}{2} =$$

$$= \frac{a+2 \pm \sqrt{(a-2)^2+32}}{2} \in \mathbb{R}$$

(β) Για α=4 οι ιδιοτιμές θα είναι :

$$s = 0, s = \frac{4+2 \pm \sqrt{4^2 - 4\times 4 + 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 6 \\ 0 \end{cases}$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στον πίνακα Α είναι αντίστοιχα :

Για s=0

$$\begin{pmatrix} 0-1 & -2 & -1 \\ -2 & 0-4 & -2 \\ -1 & -2 & 0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = -2y - z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

και άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Για s=6

$$\begin{pmatrix} 6-1 & -2 & -1 \\ -2 & 6-4 & -2 \\ -1 & -2 & 6-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

και άρα έχουμε το ιδιοδιάνυσμα : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας P ο οποίος αναζητούμε είναι ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

Σημείωση. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές 6 και 0 είναι ορθογώνια μεταξύ τους επειδή ο πίνακας είναι συμμετρικός. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τα δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο 0, τα οποία δεν είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Θα μπορούσαν όμως να γίνουν με την μέθοδο Gram-Schmidt :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ή } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ενώ στην ιδιοτιμή s=6 αντιστοιχεί το κανονικό ιδιοδιάνυσμα

$$\frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς σχηματίζουμε τον ορθογώνιο πίνακα που έχει ως στήλες τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T$$

και έχουμε

$$PDP^T = A$$

(γ) Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ θετικά (αρνητικά) ορισμένη είναι να έχει όλες τις ιδιοτιμές της θετικές (αρνητικές), πράγμα που δεν συμβαίνει στον πίνακα Α εφόσον διαθέτει μια μηδενική ιδιοτιμή. η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ θα ήταν θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη αν οι ιδιοτιμές της είναι θετικές (αρνητικές) ή μηδέν. Συνεπώς θα ελέγξουμε το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα Α δηλ.

$$s = \frac{a + 2 \pm \sqrt{(a-2)^2 + 32}}{2}$$

Η ιδιοτιμή

$$s = \frac{a + 2 + \sqrt{(a-2)^2 + 32}}{2}$$

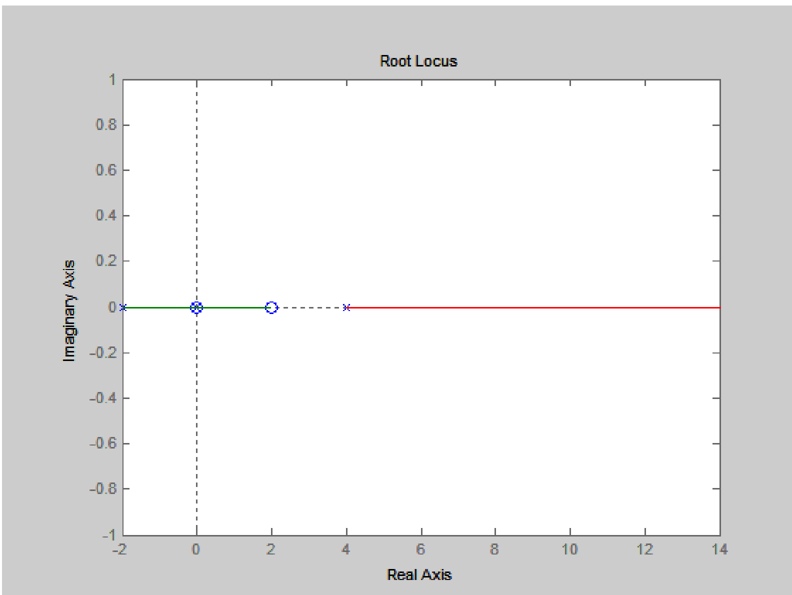
είναι πάντα θετική εφόσον α>0 και άρα η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ δεν μπορεί να είναι αρνητικά ημιορισμένη. Η ιδιοτιμή

$$s = \frac{a + 2 - \sqrt{(a-2)^2 + 32}}{2}$$

είναι θετική αν

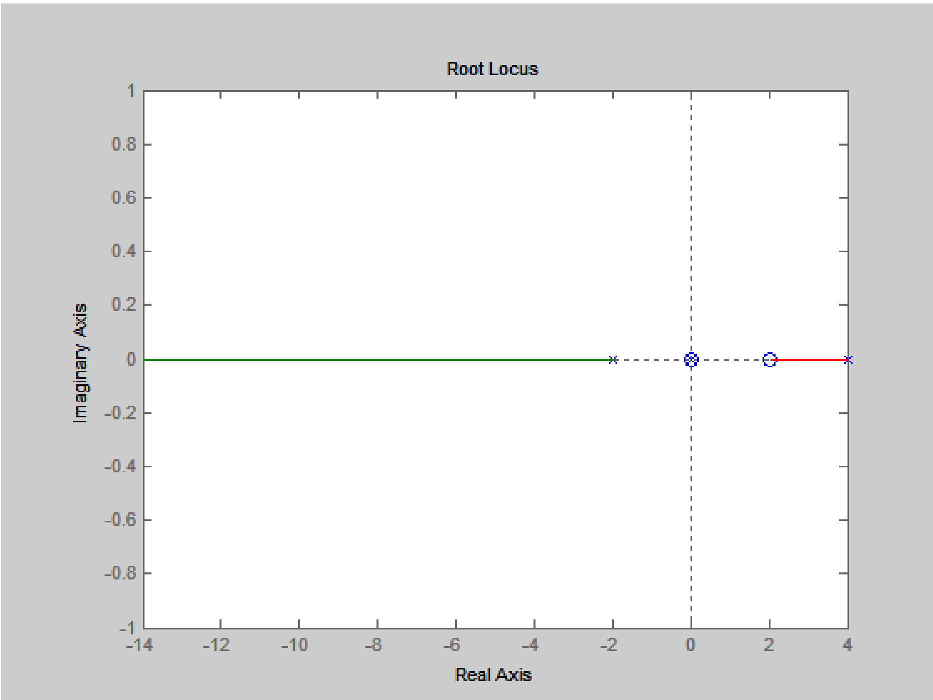
$$a + 2 - \sqrt{(a-2)^2 + 32} \geq 0 \Rightarrow a + 2 \geq \sqrt{(a-2)^2 + 32} \Rightarrow$$
$$(a+2)^2 \geq (a-2)^2 + 32 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 \geq a^2 - 4a + 4 + 32 \Rightarrow$$
$$4a \geq -4a + 32 \Rightarrow 8a \geq 32 \Rightarrow$$
$$a \geq 4$$

Άρα η τετραγωνική μορφή $x^T Ax$ θα είναι θετικά ημιορισμένη για $a \geq 4$ ενώ θα είναι αόριστη για $0 \leq a < 4$. Παρακάτω δίνουμε μια γραφική παράσταση του γεωμετρικού τόπου των ιδιοτιμών του πίνακα Α για $a \geq 0$.



Οι ιδιοτιμές ξεκινούν για α=0 από τα σημεία με το σημάδι x και παριστάνονται με διαφορετικά χρώματα (πράσινη η μια και κόκκινη η άλλη). Η μια ιδιοτιμή είναι στο 0 μονίμως ενώ οι άλλες δύο ξεκινούν για α=0 από τα σημεία $\lim_{a\to 0}\dfrac{a+2-\sqrt{(a-2)^2+32}}{2}=-2$ και $\lim_{a\to 0}\dfrac{a+2+\sqrt{(a-2)^2+32}}{2}=4$ και καθώς αυξάνεται το α η μεν πρώτη καταλήγει στο 2 $\lim_{a\to +\infty}\dfrac{a+2-\sqrt{(a-2)^2+32}}{2}=2$ ενώ η άλλη στο $\lim_{a\to +\infty}\dfrac{a+2+\sqrt{(a-2)^2+32}}{2}=+\infty$ άπειρο. Για α=4 έχουμε $\lim_{a\to 4}\dfrac{a+2-\sqrt{(a-2)^2+32}}{2}=0$ και $\lim_{a\to 4}\dfrac{a+2+\sqrt{(a-2)^2+32}}{2}=6$ και για $a\geq 4$ όλες είναι θετικές ή μηδέν.

Για $a\leq 0$ θα έχουμε αντίστοιχα



Όπου η μια ιδιοτιμή θα είναι αρνητική (πράσινη γραμμή), η μια 0 και η άλλη θετική (κόκκινη γραμμή).

Άσκηση 3. (15 μονάδες)

Για τις παρακάτω ακολουθίες να υπολογίσετε το όριο αν υπάρχει. Στην αντίθετη περίπτωση αποδείξτε ότι δεν υπάρχει όριο.

α) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}\cdot n^2+n-2}{2n^2-n+1}$

β) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\right]$

γ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)^n$

δ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4\cdot 10^n-3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1}-2\cdot 10^{2n-1}}$

ε) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2 2^n+3^n-1}{4^n+n}$.

Υπόδειξη : Για την (γ) να λάβετε υπόψιν σας ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$. Για την (ε) υπολογίστε όρια όταν $n\to\infty$ για ακολουθίες μορφής $\dfrac{n}{a^n}$, και $\dfrac{n^2}{a^n}$ για $a>1$ (βλέπε παράδειγμα 5, σελίδα 25, ΣΕΥ).

Λύση: α) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}\cdot n^2+n-2}{2n^2-n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=$

$$=\frac{\sqrt{2}+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^2}}{2-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{2}+0-0}{2-0+0}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

β) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1}\dfrac{\left(\sqrt{n+3}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\right)=$

$$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=3\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1\right)}=3\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1}=3\frac{\sqrt{2+0}}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

γ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n\cdot e}.$$

Ακόμη, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\dfrac{n+1}{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=e\cdot 1=e$

Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)^n=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n\cdot e}=\dfrac{1}{e\cdot e}=\dfrac{1}{e^2}$

δ) Διαιρούμε με 10^{2n-1} και παίρνουμε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4\cdot 10^n-3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1}-2\cdot 10^{2n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4\cdot\dfrac{1}{10^{n-1}}-3\cdot 10}{3\cdot\dfrac{1}{10^n}-2}=\frac{4\cdot 0-3\cdot 10}{3\cdot 0-2}=15.$$

ε) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2 2^n+3^n-1}{4^n+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n^2}{2^n}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-\dfrac{1}{4^n}}{1+\dfrac{n}{4^n}}$. Επειδή $0<\dfrac{3}{4}<1$ και $0<\dfrac{1}{4}<1$

έχουμε $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{4^n}=0$.

Ακόμη, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{2^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}=\dfrac{1}{2}<1$. Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$ (βλέπε παράδειγμα 5, σελίδα 25, ΣΕΥ). Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{4^n}=0$. Άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2 2^n+3^n-1}{4^n+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{n^2}{2^n}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-\dfrac{1}{4^n}}{1+\dfrac{n}{4^n}}=\frac{0+0-0}{1+0}=0.$$

Άσκηση 4. (25 μονάδες)

(α) (10 μονάδες)
(i) Βρείτε ένα άνω φράγμα για την ακολουθία με γενικό όρο

$$\alpha_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}_{n \text{ ριζικά}} = \sqrt{2+a_{n-1}}, \qquad a_1 = \sqrt{2}\,.$$

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αύξουσα και επομένως συγκλίνει. Υπολογίστε το όριό της.

(β) (10 μονάδες)
Δίνεται η παρακάτω αναδρομική ακολουθία :

$$a_n = \frac{11}{30}a_{n-1} - \frac{1}{30}a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1$$

Να υπολογίσετε τον *n*-οστό όρο της ακολουθίας, και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας.

Υπόδειξη.
Βήμα 1. Γράψτε την παραπάνω ακολουθία ως εξής :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}}_{X_{n-1}}, X_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2. Υπολογίστε την τιμή του X_n αναδρομικά δηλ.

$$X_n = AX_{n-1} = A\left(AX_{n-2}\right) = A^2X_{n-2} = \cdots$$

Βήμα 3. Εφόσον υπολογίσετε το X_n, θα έχετε υπολογίσει και τον n-οστό όρο της ακολουθίας a_n.
(γ) (5 μονάδες)
Το πλήθος των συγκρίσεων στον αλγόριθμο εύρεσης υπολογισμού του μεγίστου-ελαχίστου $n = 2^k, k > 1$ αριθμών δίνεται από την αναδρομική ακολουθία:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2 & n = 2^k, k > 1 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τον γενικό τύπο της ακολουθίας $T(n)$.
Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε τη σχέση $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2$ όπως στο παράδειγμα 2 της σελίδας 22 του ΣΕΥ (ακολουθίες).

Λύση: (Α) (i) Παρατηρούμε ότι $\alpha_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}_{n \text{ ριζικά}} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}_{n-1 \text{ ριζικά}}} = \sqrt{2+\alpha_{n-1}}$ για κάθε $n > 1$. Αν $s > 0$ είναι ένα άνω φράγμα της (α_n), τότε θα έχουμε: $\alpha_{n-1} < s \Leftrightarrow 2+\alpha_{n-1} < 2+s \Leftrightarrow \alpha_n = \sqrt{2+\alpha_{n-1}} < \sqrt{2+s}$. Αρκεί να επιλέξουμε το s έτσι ώστε $\sqrt{2+s} \le s \Leftrightarrow s^2 - s - 2 \ge 0 \Leftrightarrow (s+1)(s-2) \ge 0$. Επειδή το s είναι θετικός αριθμός, αρκεί $s \geq 2$. Το 2 μας κάνει. Θα δείξουμε λοιπόν ότι $\alpha_n < 2$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

Για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$.

Έστω ότι $\alpha_n < 2$. Τότε $\alpha_n + 2 < 4 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n + 2} < 2$.

Η σχέση $\alpha_n < 2$ ισχύει λοιπόν για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

(ii) $\alpha_n^2 - \alpha_{n-1}^2 = 2 + \alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}^2 = -(\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-1} - 2) = (2 - \alpha_{n-1})(\alpha_{n-1} + 1) > 0$ γιατί $0 < \alpha_{n-1} < 2$. Άρα $\alpha_n^2 > \alpha_{n-1}^2 \Leftrightarrow \alpha_n > \alpha_{n-1}$, γιατί οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί. Επομένως η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \geq 0$. Τότε $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2 + \alpha_{n-1}} = \sqrt{2 + \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{n-1}} = \sqrt{2 + x}$.

Άρα $x^2 - x - 2 = 0 \underset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x = 2$.

(B)

Βήμα 1. $\underbrace{\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{11}{30} & -\frac{1}{30} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}}_{X_{n-1}}, X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Βήμα 2. $X_n = AX_{n-1} = A\left(AX_{n-2}\right) = A^2 X_{n-2} = \cdots = A^{n-1} X_{n-(n-1)} = A^{n-1} X_1$

Διαγωνοποιούμε τον πίνακα A και βρίσκουμε

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{11}{30} & -\frac{1}{30} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{U^{-1}}$$

Επομένως,

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{30} & -\frac{1}{30} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5^{n-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5^{n-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & -5 \\ -30 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 30\left(5^{-n} - 6^{-n}\right) & 30^{-n}\left(6 \cdot 5^n - 5 \cdot 6^n\right) \\ 6 \cdot 5^{2-n} - 5 \cdot 6^{2-n} & -5^{2-n} + 6^{2-n} \end{bmatrix}$$

Βήμα 3. $X_n = A^{n-1} X_1 = \begin{bmatrix} 30\left(5^{-n} - 6^{-n}\right) & 30^{-n}\left(6 \cdot 5^n - 5 \cdot 6^n\right) \\ 6 \cdot 5^{2-n} - 5 \cdot 6^{2-n} & -5^{2-n} + 6^{2-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 30^{-n}\left(-24 \cdot 5^n + 25 \cdot 6^n\right) \\ 30^{-n}\left(-144 \cdot 5^n + 125 \cdot 6^n\right) \end{bmatrix}$$

Επομένως, $a_n = 30^{-n}\left(-24 \cdot 5^n + 25 \cdot 6^n\right)$ και το όριο είναι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 30^{-n}\left(-24\cdot 5^n + 25\cdot 6^n\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(-24\cdot\left(\frac{5}{30}\right)^n + 25\cdot\left(\frac{6}{30}\right)^n\right) =$$
$$= -24\cdot 0 + 25\cdot 0 = 0$$

(Γ)

Έχουμε τις σχέσεις: $\begin{cases} T(2)=1 \\ T(2^2)=2T(2)+2 \\ \vdots \\ T(2^{k-1})=2T(2^{k-2})+2 \\ T(2^k)=2T(2^{k-1})+2 \end{cases}$

Πολλαπλασιάζουμε την προτελευταία σχέση επί 2, την αμέσως προηγούμενη επί 2^2, κ.ο.κ. μέχρι την $1^η$, την οποία πολλαπλασιάζουμε επί 2^{k-1}.

Παίρνουμε τις σχέσεις: $\begin{cases} \cancel{2^{k-1}T(2)} = 2^{k-1} \\ \cancel{2^{k-2}T(2^2)} = \cancel{2^{k-1}T(2)} + 2^{k-1} \\ \vdots \\ \cancel{2T(2^{k-1})} = \cancel{2^2T(2^{k-2})} + 2^2 \\ T(2^k) = \cancel{2T(2^{k-1})} + 2 \end{cases}$

Με πρόσθεση και διαγραφή των ίσων όρων και από τα δύο μέλη παίρνουμε

$$T(2^k) = 2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^{k-1} = 2^{k-1}+(1+2+2^2+\cdots+2^{k-1})-1=$$
$$=2^{k-1}+\frac{2^k-1}{2-1}-1=\frac{2^k}{2}+2^k-2=\frac{3}{2}\times 2^k-2=\frac{3}{2}n-2$$

Θα μπορούσαμε επίσης να ακολουθήσουμε την παρακάτω μέθοδο :

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right)+2 = 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+2\right)+2 = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+2^2+2 =$$
$$= 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+2^3+2^2+2 = \ldots =$$
$$= 2^{k-1}T\left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)+2^{k-1}+\cdots+2^2+2 =$$
$$= 2^{k-1}T(2)+2^{k-1}+\cdots+2^2+2 =$$
$$= 2^{k-1}\times 1+2^{k-1}+\cdots+2^2+2 =$$
$$= 2^{k-1}+\left(1+2^1+2^2+\cdots+2^{k-1}\right)-1 =$$
$$= \frac{2^k}{2}+\frac{2^k-1}{2-1}-1 = \frac{2^k}{2}+2^k-2 = \frac{3}{2}\times 2^k-2 =$$
$$= \frac{3}{2}n-2$$

Άσκηση 5. (8 μονάδες)

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών :

α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 2^n}{5^n}$

β) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Υπόδειξη. Διαβάστε από το βιβλίο τα Κεφάλαια 3.1 και 3.3, και από το Σ.Ε.Υ. τα Κεφάλαια 2.1 και 2.3.

Λύση: α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 2^n}{5^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n}=$ (γεωμετρικές σειρές)

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=2\cdot\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-3\cdot\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=2\cdot\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}-3\cdot\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=$$

$$=2\cdot\frac{3}{2}-3\cdot\frac{2}{3}=3-2=1$$

β)

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (τηλεσκοπική σειρά)

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{(2n-1)}+\frac{B}{(2n+1)}=\frac{(2A+2B)n+(A-B)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\begin{Bmatrix}2A+2B=0\\ A-B=1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}2(1+B)+2B=0\\ A=1+B\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}4B+2=0\\ A=1+B\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}B=-1/2\\ A=1-1/2=1/2\end{Bmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right\}=$$

$$=a_0-\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2(2\cdot 0-1)}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n-1)}=$$

$$=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}$$

Άσκηση 6. (24 μονάδες)

Ποια από τις παρακάτω σειρές συγκλίνει και ποια αποκλίνει; Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

α) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^4+1}$

δ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+3}$ ε) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ στ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$

Λύση: α) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ απειρίζεται θετικά και επομένως και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ απειρίζεται θετικά.

β) Χρησιμοποιούμε το γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ (βλέπε ΣΕΥ, σελίδα 17). $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\Big/\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1>0$. Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ απειρίζεται θετικά, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ απειρίζεται θετικά.

γ) Χρησιμοποιούμε το γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2n^2-1}{3n^4+1}\right)\Big/\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^4-n^2}{3n^4+1}=\frac{2}{3}>0$. Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^4+1}$.

δ) $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+3}=\frac{3}{4}\neq 0$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+3}$ αποκλίνει.

ε) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ συγκλίνει.

στ) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{e^n}{n^2}}=e\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=e>1$.

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$ αποκλίνει.

Άσκηση 7. (8 μονάδες)

(α) Για ποια από τις τιμές του *x* συγκλίνει η σειρά :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$$

(β) Δίνεται η παρακάτω σειρά :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

η οποία έχει αποδειχθεί από τον Euler ότι συγκλίνει στον αριθμό $\frac{\pi^3}{32}$. Προσπαθήστε να υπολογίσετε το πλήθος *n+1* των όρων της σειράς που πρέπει να πάρουμε ώστε να προσεγγίσουμε το $\frac{\pi^3}{32}$ (και συνεπώς και το π) με ακρίβεια $e = 10^{-6}$. Μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα των *n+1* πρώτων όρων και κατά συνέπεια να εκτιμήσετε το *π* ;

Υπόδειξη. Πρώτα αποδείξτε ότι έχουμε μια εναλλάσσουσα σειρά π.χ. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ όπου $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι θετική, φθίνουσα και με όριο το μηδέν (Κεφ. 2.4 από Σ.Ε.Υ.) και στη συνέχεια κάντε χρήση της ανισότητας $\left|S-\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n\right| \le a_{k+1}$ ώστε να υπολογίσετε το πλήθος των όρων *k* που θα πρέπει να πάρουμε ώστε να υπολογίσουμε το άθροισμα S. Θα πρέπει να έχουμε $\left|S-\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n\right| \le 10^{-6}$.

Λύση: (A) Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας:

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x^2+1}{3} = \frac{x^2+1}{3}$. Η γεωμετρική σειρά συγκλίνει για

$\frac{x^2+1}{3} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Για $x = \pm\sqrt{2}$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty}1$ η οποία αποκλίνει. Τελικά το διάστημα στο οποίο η σειρά συγκλίνει είναι το $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

(B) Έστω $a_n = \frac{1}{(2n+1)^3} > 0$. Παρατηρούμε ότι

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(2(n+1)+1)^3}}{\frac{1}{(2n+1)^3}} = \frac{(2n+1)^3}{(2(n+1)+1)^3} = \frac{(2n+1)^3}{(2n+3)^3} < 1$ (γιατί ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος του αριθμητή). Άρα

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ και επομένως η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα.

Επίσης $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = 0$. Άρα η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ συγκλίνει.

$$\left| S - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \right| \le \frac{1}{(2n+3)^3} \le 10^{-6} \Rightarrow (2n+3)^3 \ge 10^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n+3 \ge 10^2 \Rightarrow n \ge \frac{10^2-3}{2} = 48.5$$

Αρκεί να πάρουμε $n = 49$, οπότε $n+1=50$.

$$\sum_{n=0}^{50} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 0,968947 \simeq \frac{\pi^3}{32} \Rightarrow \pi \simeq (32 \cdot 0,968947)^{\frac{1}{3}} \simeq 3,14159$$
