ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: **14 Φεβρουαρίου 2006**
Ημερομηνία Παράδοσης της Εργασίας από τον Φοιτητή: **17 Μαρτίου 2006**

Οι ασκήσεις της εργασίας αυτής αφορούν στα επόμενα Κεφάλαια του συγγράμματος του ΕΑΠ «*Λογισμός Μιας Μεταβλητής*» του Γ. Δάσιου :

Κεφάλαιο 4 (Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης)
Κεφάλαιο 5 (Η παράγωγος)
Κεφάλαιο 6 (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)
Κεφάλαιο 7 (Ακρότατα)
Κεφάλαιο 8 (Το ανάπτυγμα Taylor)

Βοηθητικό υλικό: Μπορείτε να συμβουλευθείτε το υλικό που υπάρχει στη διεύθυνση http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm

- Από το ΣΕΥ (Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό) :
    - Συναρτήσεις
    - Όρια και Συνέχεια
    - Σειρές
    - Παράγωγοι
    - Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού
    - Σειρές Taylor.

Άσκηση 1. (15 μονάδες)

A) (12 μον.) Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

(i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{ax^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$, για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου α.

(iii) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x^2-1}{4-x^2}\right)$

B) (3 μον.) Προσδιορίστε τις τιμές των πραγματικών παραμέτρων α, b ώστε να είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η επόμενη συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+ax+2b-10}{x^2-4}, & x\neq 2\\ 25/4, & x=2\end{cases}$$

<u>Λύση</u>

A)

(i) Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τις συζυγείς παραστάσεις τους έχουμε :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\cdot\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(2x+1-3^2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(x-2^2\right)\cdot\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\cdot\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2\cdot(x-4)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\cdot\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{4}+2\right)}{\sqrt{8+1}+3}$$

$$=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

(ii) Εξετάζουμε πρώτα κάτω από ποιους περιορισμούς ορίζεται η υπόριζη ποσότητα ax^2+2x+1 (προφανώς για την θετική x^2+1 δεν υπάρχει κανένας περιορισμός). Παρατηρούμε ότι αν <u>α<0</u>, τότε, για $x\to+\infty$, και το τριώνυμο ax^2+2x+1, ως ομόσημο του α, είναι αρνητικό. Έτσι η υπό μελέτη συνάρτηση δεν θα ορίζεται και το ζητούμενο όριο δεν έχει νόημα.

<u>Αν α≥0</u>, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{a+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{a+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=(+\infty)\cdot\left(\sqrt{a+0+0}-\sqrt{1+0}\right)=$$

$$=(+\infty)\cdot\left(\sqrt{a}-1\right)=\begin{cases}+\infty,\ \text{αν } \alpha>1\\ -\infty,\ \text{αν } 0\le\alpha<1\\ \text{απροσδιοριστο, αν } \alpha=1\end{cases}$$

Η απροσδιοριστία που εμφανίζεται στην τελευταία περίπτωση (*α=1*) απαιτεί διαφορετική προσέγγιση :

$$\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{\left(x^2+2x+1\right)-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}=\frac{2x}{x\cdot(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Σημειώστε εδώ ότι στα προηγούμενα ισχύει ότι |x|=x, αφού x→+∞ και άρα μπορεί να θεωρείται θετικό.

Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση το ζητούμενο όριο γίνεται :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=\frac{2}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}}=1$$

(iii)

$$\lim_{x\to2^-}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x^2-1}{4-x^2}\right)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x^2-1}{(2-x)(2+x)}\right)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{x(2+x)+x^2-1}{(x-2)(2+x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{2x+x^2+x^2-1}{(x-2)(2+x)}\right)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{2x+2x^2-1}{(x-2)(2+x)}\right)=\frac{11}{0^-}=-\infty$$

ή και πιο γρήγορα :

$$\lim_{x\to2^-}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x^2-1}{4-x^2}\right)=\frac{2}{0^-}-\frac{3}{0^+}=-\infty-(+\infty)=-\infty-\infty=-\infty$$

B)

Για να είναι η f συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, όπως απαιτείται στην εκφώνηση, θα πρέπει:

- Να ορίζεται στο σημείο x = -2, το οποίο είναι ρίζα του παρονομαστή. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το -2 να είναι ρίζα και του αριθμητή, ώστε ο παράγοντας (x+2) να απλοποιηθεί. Άρα πρέπει:
$$2\cdot(-2)^3-2a+2b-10=0\Leftrightarrow-2a+2b=26\Leftrightarrow b=13+a$$
- Ανάλογα, και το 2 θα πρέπει να είναι ρίζα του αριθμητή:
$$2\cdot2^3+2a+2b-10=0\Leftrightarrow2a+2b=-6\Leftrightarrow b=-3-a$$

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν : a=-8, b=5.

Ο τύπος της συνάρτησης επομένως γίνεται :

$$\frac{2x^3-8x+10-10}{x^2-4}=\frac{2x^3-8x}{x^2-4}=\frac{2x(x^2-4)}{x^2-4}=2x$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(2x)=4\neq\frac{25}{4},$$

και η συνάρτηση δεν μπορεί να είναι συνεχής στο 2.

Άσκηση 2. (10 μονάδες)

Α) (8 μον.) Υπολογίστε τις παραγώγους των επόμενων συναρτήσεων :

(i) $\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+2x}\right)$ (ii) $2x^3\cos x+\dfrac{\sin x}{x^2}$

(iii) $\sqrt{(x+1)^3(x-2)}$ (iv) $2xe^{\sqrt{\cos(2x)}}$

Β) (2 μον.) Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c, & \text{αν } x\in[-1,0) \\ ax^2+4x+4, & \text{αν } x\in[0,1] \end{cases}$

Να προσδιοριστούν τα $a,b,c\in\mathbb{R}$ ώστε η f να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο $[-1,1]$.

Λύση

Α) (i) $y=\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+2x}\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cancel{(x^2+2x)}}{x^{\cancel{2}}}\cdot\frac{2x(x^2+2x)-x^{\cancel{2}}(2x+2)}{(x^2+2x)^{\cancel{2}}}=\frac{\cancel{2x^2}+4x-\cancel{2x^2}-2x}{x(x^2+2x)}$$

$$=\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2+2x)}=\frac{2}{(x^2+2x)}$$

(ii)

$$(2x^3\cos x+\tfrac{\sin x}{x^2})'=(2x^3\cos x)'+(\tfrac{\sin x}{x^2})'$$

$$=2(x^3)'\cos x+2x^3(\cos x)'+\frac{(\sin x)'x^2-(x^2)'\sin x}{x^4}$$

$$=6x^2\cos x-2x^3\sin x+\frac{x^2\cos x-2x\sin x}{x^4}$$

$$=6x^2\cos x-2x^3\sin x+\frac{\cos x}{x^2}-2\,\frac{\sin x}{x^3}$$

(iii)

$$\left[\sqrt{(x+1)^3(x-2)}\right]'=[((x+1)^3(x-2))^{1/2}]'=\frac{[(x+1)^3(x-2)]'}{2\sqrt{(x+1)^3(x-2)}}=$$

$$\frac{[(x+1)^3]'(x-2)+(x+1)^3(x-2)'}{2\sqrt{(x+1)^3(x-2)}}=\frac{3(x+1)^2(x+1)'(x-2)+(x+1)^3(x-2)'}{2\sqrt{(x+1)^3(x-2)}}=$$

$$\frac{3(x+1)^2(x-2)+(x+1)^3}{2\sqrt{(x+1)^3(x-2)}}=\frac{(x+1)^2(3(x-2)+(x+1))}{2\sqrt{(x+1)^3(x-2)}}=\frac{(4x-5)\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-2}},\ \text{x>2.}$$

(iv)

$$(2xe^{\sqrt{\cos(2x)}}) = (2x)'e^{\sqrt{\cos(2x)}} + 2x(e^{\sqrt{\cos(2x)}})'$$

$$= 2e^{\sqrt{\cos(2x)}} + 2xe^{\sqrt{\cos(2x)}}(\sqrt{\cos(2x)})' =$$

$$= 2e^{\sqrt{\cos(2x)}} + 2xe^{\sqrt{\cos(2x)}}\frac{(\cos(2x))'}{2\sqrt{\cos(2x)}}$$

$$= 2e^{\sqrt{\cos(2x)}} + 2xe^{\sqrt{\cos(2x)}}\frac{-2\sin(2x)}{2\sqrt{\cos(2x)}} =$$

$$= 2e^{\sqrt{\cos(2x)}} - 2xe^{\sqrt{\cos(2x)}}\frac{\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$$

B)

Πρώτα από όλα η συνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$.
Εφόσον είναι συνεχής ως πολυωνυμική σε καθένα από τους κλάδους της θα εξετάσουμε τι γίνεται στο 0 :

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = c,\ \ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 4$, f(0) = 4.

Οπότε πρέπει $c = 4$.

Δεύτερη προϋπόθεση είναι η παραγωγισιμότητα στο διάστημα $(-1,1)$.
Εφόσον είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική σε καθένα από τους κλάδους της θα εξετάσουμε τι γίνεται στο 0.

Για να είναι παραγωγίσιμη στο 0 θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Έχουμε :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{c=4}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+bx+4-4}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x+b) = b$$

επίσης

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2+4x+4-4}{x} = \lim_{x\to 0^-}(ax+4) = 4$$

Οπότε $b = 4$.

Τέλος, θα πρέπει $f(-1) = f(1)$.

$$f(-1) \overset{b,c=4}{=} (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 1$$

$$f(1) = a1^2 + 4\cdot 1 + 4 = a + 8$$

Συνεπώς $a + 8 = 1 \Rightarrow a = -7$.

Άσκηση 3 (15 μονάδες)

A) (9 μον.) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L’ Hospital να υπολογιστούν τα επόμενα όρια:

(i) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(3x))}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$ (iii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$

B) (6 μον.) Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ και στη συνέχεια να δειχθεί ότι $\forall x\in(0,+\infty)$ ισχύει $e^x \ge x^e$.

Λύση

A)

(i)

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(3x))}=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln(\sin(2x)))'}{(\ln(\sin(3x)))'}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{(\sin(2x))'}{\sin(2x)}}{\frac{(\sin(3x))'}{\sin(3x)}}=$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}}{\frac{3\cos(3x)}{\sin(3x)}}=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2\cos(2x)}{3\cos(3x)}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2\cos(2x)}{3\cos(3x)}\right)\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{(\sin(3x))'}{(\sin(2x))'}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{3\cos(3x)}{2\cos(2x)}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^2(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-2+2\cos x)'}{(x^2(1-\cos x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{2x(1-\cos x)+x^2\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-2\sin x)'}{(2x(1-\cos x)+x^2\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{2(1-\cos x)+2x\sin x+2x\sin x+x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2-2\cos x)'}{(2(1-\cos x)+4x\sin x+x^2\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{2\sin x+4\sin x+4x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x)'}{(6\sin x+6x\cos x-x^2\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{6\cos x+6\cos x-6x\sin x-2x\sin x-x^2\cos x}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

(iii) Εφαρμόζουμε τρεις φορές τον κανόνα de l’ Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}\cos x}{3x^2}$$

$$\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}(\cos x)^2 + e^{\sin x}\sin x}{6x}$$

$$\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}(\cos x)^3 + 3e^{\sin x}\cos x\cdot \sin x + e^{\sin x}\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

B)

Η συνάρτηση f ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{\left[\ln(x)\right]'x - \ln(x)x'}{x^2} = \frac{x/x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Πιθανά σημεία ακρότατων είναι τα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγος :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e) \Leftrightarrow x = e.$$

Επίσης υπάρχει η δεύτερη παράγωγος

$$f''(x) = \frac{\left[1-\ln(x)\right]'x^2 - (1-\ln(x))(x^2)'}{x^4} =$$

$$\frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ln(x))2x}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln(x)}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

Οπότε $f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0$ συνεπώς στο σημείο e έχουμε τοπικό μέγιστο της f με $f(e) = \frac{1}{e}$.

Αυτό σημαίνει ότι $\forall x \in (0,+\infty)$ ισχύει

$$f(x) \le f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow e\ln(x) \le x \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^e) \le x \Leftrightarrow e^{\ln(x^e)} \le e^x \Leftrightarrow x^e \le e^x,$$

αφού η συνάρτηση e^x είναι αύξουσα.

Άσκηση 4 (10 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$. Να προσδιορίσετε :

(i)Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι α) αύξουσα , β) φθίνουσα.

(ii) Τα ακρότατά της.

(iii) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι α) κοίλη προς τα πάνω, β) κοίλη προς τα κάτω.

(iv) Τα σημεία καμπής

(v) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τους άξονες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία δώστε μία γραφική παράσταση της συνάρτησης.

<u>Λύση</u>

(i) Παρατηρούμε ότι :

$f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$, $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right) = 4x\left(x-2\right)\left(x+2\right)$ και $f''(x) = 12x^2 - 16$. Άρα, η $f'(x) > 0$ αν $-2 < x < 0$ ή $x > 2$ και $f'(x) < 0$ αν $x < -2$ και $0 < x < 2$. Επομένως, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-2, 0\right)$ και $\left(2, +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, -2\right)$ και $\left(0, 2\right)$.

(ii) Για τα ακρότατα :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 2$ ή $x = -2$.

Για $x = 0$ η $f''(x) = -16 < 0$ άρα το σημείο $\left(0, -3\right)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Για $x = 2$ η $f''(x) = 32 > 0$ άρα το σημείο $\left(2, -19\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Για $x = -2$ η $f''(x) = 32 > 0$ άρα το σημείο $\left(-2, -19\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

(iii)-(iv) Στα σημεία καμπής πρέπει να ισχύει ότι $f''(x) = 0$ και $f'''(x) \neq 0$.

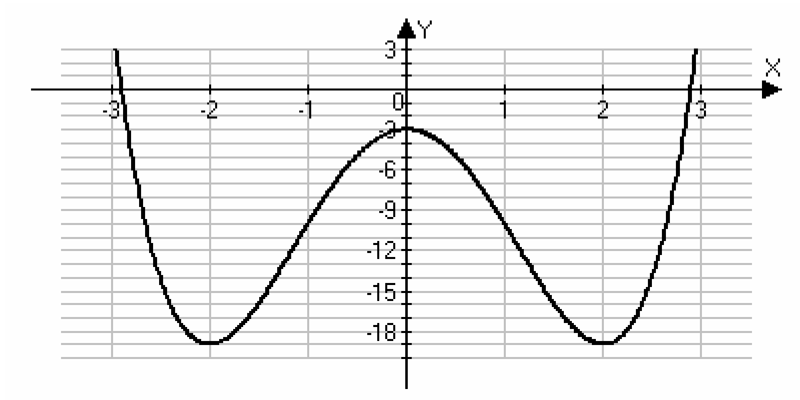
Επομένως, $f''(x) = 12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

στα οποία η f΄΄΄(x)=24x δεν μηδενίζεται. Άρα τα σημεία $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{107}{9}\right)$ και $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{107}{9}\right)$ είναι σημεία καμπής.

Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, όπου $f'' < 0$, και τα κοίλα προς τα πάνω στα διαστήματα $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ και $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$, όπου $f'' > 0$.

(v) Η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των x στα σημεία όπου $f(x)=x^4-8x^2-3=0$. Θέτοντας y=x^2 και λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει : $y^2-8y-3=0$ βρίσκουμε $y=\frac{8\pm\sqrt{76}}{2} \Leftrightarrow y=x^2 \cong 8.36$ η -0.36. Προφανώς δεκτή τιμή είναι μόνο η (θετική) πρώτη για την οποία παίρνουμε : $x^2 \cong 8.36$ άρα $x \cong \pm 2.89$. Άρα τα σημεία τομής με τον άξονα των x είναι τα $(-2.89, 0)$ και $(2.89, 0)$ ενώ τον άξονα των y το σημείο $(0, -3)$.

Από την παραπάνω μελέτη προκύπτει η ακόλουθη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :



Άσκηση 5. (10 μονάδες)

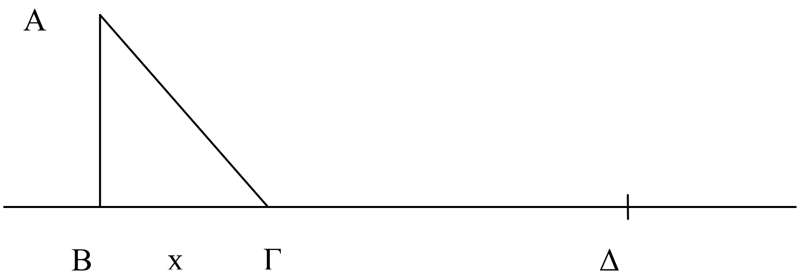
A) (5 μον.) Ένας άνδρας βρίσκεται σε μία βάρκα στη θάλασσα (σε ένα σημείο Α) η οποία απέχει 1 χλμ. από το πιο κοντινό σημείο Β μιας ευθύγραμμης ακτής. Σκοπός του είναι να φτάσει στο συντομότερο δυνατό χρόνο στο σημείο Δ της ακτής, το οποίο απέχει από το Β 3 χλμ. Σε ποιο σημείο της ακτής πρέπει να αποβιβαστεί αν κωπηλατεί με 2 χλμ/ώρα ενώ βαδίζει με 4 χλμ/ώρα ;

(Υποθέτουμε ότι η κίνηση τόσο στη θάλασσα όσο και στη στεριά είναι ευθύγραμμη ομαλή όπου ταχύτητα = διάστημα / χρόνος)

B) (5 μον.) Ένα ορθογώνιο φύλλο χαρτιού που χρησιμοποιείται για την κατασκευή αφίσας έχει εμβαδόν 180 cm^2. Τα περιθώριά του πάνω και του κάτω μέρους του χαρτιού είναι 7.5 cm ενώ τα πλευρικά περιθώρια 5 cm. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του χαρτιού ώστε η τυπωμένη επιφάνεια είναι μέγιστη ;

<u>Λύση</u>

A)



Καταρχήν τόσο η τροχιά της βάρκας στη θάλασσα όσο και του πεζού στην ακτή πρέπει να είναι ευθεία ώστε να είναι η μικρότερη δυνατή. Έστω ότι αποβιβάζεται στο σημείο Γ της ακτής και $|\mathrm{B\Gamma}| = x$. Τότε έχουμε $|\mathrm{A\Gamma}| = \sqrt{1+x^2}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ αφού |ΑΒ|=1 από την υπόθεση Επομένως, $|\Gamma\Delta| = 3 - x$.

Ο χρόνος που χρειάζεται ο άνθρωπος για να καλύψει κωπηλατώντας την τροχιά ΑΓ είναι $T_{\mathrm{A\Gamma}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2}$ ενώ για να περπατήσει την απόσταση ΓΔ $T_{\Gamma\Delta} = \dfrac{3-x}{4}$. Οπότε ο συνολικός απαιτούμενος χρόνος δίνεται από τη συνάρτηση $T(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \dfrac{3-x}{4},\ 0 \le x \le 3$.

Πρέπει να βρούμε την τιμή του *x* ώστε η συνάρτηση *T(x)* να γίνει ελάχιστη.

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο:

$$T'(x) = \frac{2x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{4\sqrt{1+x^2}},$$

Οι ρίζες της $T'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0$ είναι πιθανά ακρότατα.

Η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = -\sqrt{3}/3$ και $x_2 = \sqrt{3}/3$. Από τις οποίες γίνεται αποδεκτή η θετική x_2 (αφού εκφράζει μήκος).

Η δεύτερη παράγωγος της είναι :

$$T''(x)=\left(\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{4}\right)'=\frac{1}{2}\frac{x'\sqrt{1+x^2}-x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{(1+x^2)}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}=\frac{1}{2}\frac{\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}=\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}},\ 0\le x\le 3,$$

και εφόσον $T''(\sqrt{3}/3)=3\sqrt{3}/16>0$ η τιμή $\sqrt{3}/3$ αποτελεί τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης του χρόνου.
Για να δούμε αν το σημείο αυτό είναι ολικό ελάχιστο, θα πρέπει να ελέγξουμε και τις τιμές της Τ(x) στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Πράγματι, και οι δύο τιμές Τ(0)=1.25, Τ(3)=1.581 είναι μεγαλύτερες από το $T(\sqrt{3}/3)\cong 1.183$, άρα στο $x_2=\sqrt{3}/3$ η υπό μελέτη συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Επομένως ο κωπηλάτης πρέπει να αποβιβαστεί στο σημείο Γ σε απόσταση $|\mathrm{B\Gamma}|=\sqrt{3}/3\approx 0.5774km$.

B) Έστω x το μήκος του poster και y το ύψος του σε cm. Τότε θα ισχύει ότι xy=180, άρα y=180/x. Αν λάβουμε υπόψη μας τα περιθώρια που δίνονται στην εκφώνηση, η τυπωμένη επιφάνεια θα έχει αντίστοιχες διαστάσεις :

Μήκος = x-(5+5) = x-10,
Ύψος = $\frac{180}{x}-(7.5+7.5)=\frac{180}{x}-15$
Ζητάμε την μεγιστοποίηση της τυπωμένης επιφάνειας, άρα της συνάρτησης :

$$f(x)=(x-10)(\frac{180}{x}-15)=180-15x-\frac{1800}{x}+150=330-15x-\frac{1800}{x},\ x\in(0,+\infty).$$

Η παράγωγός της είναι :

$$f'(x)=\left(330-15x-\frac{1800}{x}\right)'=-15+\frac{1800}{x^2}$$

η οποία μηδενίζεται όταν

$$-15+\frac{1800}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1800}{15}\Leftrightarrow x^2=120\Leftrightarrow x=\sqrt{120},$$

αφού το x είναι σε κάθε περίπτωση θετικό ως μήκος.
Για $x<\sqrt{120}$, η $f'(x)$ γίνεται θετική και η συνάρτηση $f(x)$ αύξουσα, ενώ για $x>\sqrt{120}$, έχουμε $f'(x)<0$ και την $f(x)$ φθίνουσα. Συνεπώς, στην θέση αυτή η f(x) παρουσιάζει ολικό μέγιστο. Έτσι οι ζητούμενες διαστάσεις του χαρτιού είναι :
Μήκος = x = $\sqrt{120}$,
Ύψος = y = 180/$\sqrt{120}$

Άσκηση 6. (20 μονάδες)

Α) (10 μον.) Αναπτύξτε σε σειρά Taylor κέντρου 0 τη συνάρτηση : $f(x) = e^{-ax}$ και βρείτε προσεγγιστικά την τιμή του e^{-1} με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

(**Υπόδειξη** : *Αν προσεγγίσουμε μία εναλλάσσουσα σειρά,* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$, *με το μερικό άθροισμα* $\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$, *το σφάλμα που προκύπτει δεν υπερβαίνει (κατ' απόλυτη τιμή τον πρώτο όρο που αγνοούμε, δηλαδή τον όρο* a_{k+1}*).*

Β) (10 μον.) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

(i) Με χρήση του κανόνα de l' Hospital

(ii) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^x$, γύρω από το *x = 0*. Πόσους όρους πρέπει να κρατήσουμε στο ανάπτυγμα αυτό, ώστε να υπολογίσουμε το όριο με ακρίβεια 0.001 ;

<u>Λύση</u>

Α) Η f(x) αναπτύσσεται σε σειρά Taylor κέντρου 0 ως εξής : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Πρέπει επομένως να υπολογιστεί ένας γενικός τύπος για την n-οστή παράγωγο της f στο μηδέν.

Παρατηρούμε όμως ότι :

$f'(x) = (e^{-ax})' = -ae^{-ax}$,

$f''(x) = (-ae^{-ax})' = a^2 e^{-ax}$,

$f'''(x) = (a^2 e^{-ax})' = -a^3 e^{-ax}$,

$f^{(4)}(x) = \left(-a^3 e^{-ax}\right)' = a^4 e^{-ax}$,

...

Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι ο τύπος

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n a^n e^{-ax}$$

ισχύει για κάθε n φυσικό.

Πράγματι,

Για n=1 ισχύει αφού ήδη είδαμε ότι $f'(x) = (-1)^1 ae^{-ax}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για n=k : $f^{(k)}(x) = (-1)^k a^k e^{-ax}$.

Τότε ισχύει και για n = k+1 αφού

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = ((-1)^k a^k e^{-ax})' = (-1)^k a^k (e^{-ax})' = (-1)^k a^k (-a)e^{-ax} = (-1)^{k+1} a^{k+1} e^{-ax}$$

Έτσι, το ανάπτυγμα Taylor της f(x) με κέντρο 0 θα είναι :

$$f(x) = e^{-ax} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n a^n e^{-a0}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n a^n}{n!}x^n .$$

Θέτοντας α = x = 1 στον προηγούμενο τύπο έχουμε :

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Πρόκειται δηλαδή για μία εναλλάσσουσα σειρά. Σύμφωνα με την υπόδειξη, αν κρατήσουμε k-όρους, το σφάλμα προσέγγισης δεν θα ξεπερνάει την απόλυτη τιμή του επόμενου (k+1) όρου : $\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\right| = \frac{1}{(k+1)!}$.

Για να επιτύχουμε λοιπόν ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων αρκεί :

$\frac{1}{(k+1)!} < 10^{-5}$.

Με δοκιμές παρατηρούμε ότι :

Για k=0, $\frac{1}{1!} = 1 > 10^{-5}$,

Για k=1, $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} > 10^{-5}$,

Για k=2, $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = 0.16666666 > 10^{-5}$,

Για k=3, $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 0.0416666666 > 10^{-5}$,

Για k=4, $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0.008333333 > 10^{-5}$,

Για k=5, $\frac{1}{6!} = \frac{1}{720} = 0.001388888 > 10^{-5}$,

Για k=6, $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} = 0.0001984 > 10^{-5}$,

Για k=7, $\frac{1}{8!} = \frac{1}{40320} = 0.000024801 > 10^{-5}$,

Για k=8, $\frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} = 0.000002755 < 10^{-5}$.

Έτσι, η επιθυμητή ακρίβεια επιτυγχάνεται αν κρατήσουμε στο ανάπτυγμα του e^{-1} όρους μέχρι τάξης 8 :

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{8} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \frac{(-1)^5}{5!} + \frac{(-1)^6}{6!} + \frac{(-1)^7}{7!} + \frac{(-1)^8}{8!} =$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} = 0.36788194444444$$

Η τιμή αυτή έχει πράγματι την απαιτούμενη ακρίβεια, αφού ένας υπολογισμός της τιμής του e^{-1} με κάποιο υπολογιστή τσέπης δίνει :

0.36787944

Άρα το σφάλμα της προσέγγισής μας είναι :

$0.3678819444 - 0.36787944 = 0.000002504 < 10^{-5}$

B)

(i) Χρησιμοποιώντας κανόνα L' Hospital έχουμε :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x(e^x-1)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1+xe^x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(x+2)}=\frac{1}{2}$$

(ii) Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σειρά : $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....$, παίρνουμε :

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....)-1-x}{x((1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....)-1)}=\frac{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....}{x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^5}{4!}+....}=$$

$$\frac{x^2\cdot\left(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+....\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+....\right)}=\frac{\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+....}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+....}$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+....}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+....}\right)=\frac{\frac{1}{2!}+0+0+....}{1+0+0+0+....}=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$$

Εάν θεωρήσουμε $e^x\approx 1$ ή $e^x\approx 1+x$ καταλήγουμε σε έκφραση της μορφής $\frac{0}{0}$.Εάν θεωρήσουμε τρεις όρους στο άθροισμα $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}$ τότε

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\approx\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!})-1-x}{x((1+x+\frac{x^2}{2!})-1)}=\frac{\frac{x^2}{2!}}{x^2+\frac{x^3}{2!}}=$$

$$\frac{x^2\cdot\left(\frac{1}{2!}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{x}{2!}\right)}=\frac{\frac{1}{2!}}{1+\frac{x}{2!}}\xrightarrow{x\to 0}\frac{1}{2}$$

Οπότε αρκούν 3 όροι για να έχουμε ακριβή υπολογισμό του ορίου.

Άσκηση 7. (20 μονάδες)

Α) (10 μονάδες) Βρείτε μια ρίζα της εξίσωσης $x = 3 + \frac{1}{x^2}$ στο διάστημα [3,4] ακολουθώντας τα εξής βήματα :

(i) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (Bolzano), σύμφωνα με το οποίο ***αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα* [*α,β*] *και f(α)f(β)<0, τότε η f έχει ρίζα στο διάστημα* (*α,β*)** [δείτε και το βιβλίο σας σελ. 58], αποδείξτε ότι η ως άνω εξίσωση έχει ρίζες στο διάστημα (3,4).

(ii) Ελέγξτε την μονοτονία των εμπλεκόμενων συναρτήσεων για να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

(iii) Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στις σελίδες 91-95 του βιβλίου σας, προσδιορίστε τη ρίζα με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων

(Β) (10 μονάδες.) Να δοθεί προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων με χρήση του Matlab/Octave.

Το τελευταίο ερώτημα μπορεί να λυθεί στον υπολογιστή σας με τη βοήθεια του MATLAB ή του προγράμματος «κλώνου» του Octave με τις ίδιες εντολές.

Το MATLAB είναι εμπορικό προϊόν και δεν διατίθεται δωρεάν. Η Octave διατίθεται δωρεάν και μπορεί να κατέβει από το

http://prdownloads.sourceforge.net/octave/octave-2.1.50a-inst.exe?download

Η έκδοση που θα πρέπει να κατεβάσετε είναι binary για windows και το αρχείο octave-2.1.50a-inst.exe με μέγεθος περίπου 7.5 MB. Η εγκατάσταση γίνεται απλά με διπλό πάτημα του αρχείου.

Μπορείτε να συμβουλευθείτε την ιστοσελίδα της θεματικής μας ενότητας όπου υπάρχει υλικό σχετικό με το MATLAB. Βοήθεια για τη χρήση μίας εντολής, π.χ. της inv( ) μπορεί να βρεθεί με τη χρήση της εντολής

```
help inv
```

Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσετε MATLAB η μεταφορά των εντολών σας αλλά και των αποτελεσμάτων σε κειμενογράφο γίνεται εύκολα με αντιγραφή και επικόλληση. Για το Octave, που δεν είναι φτιαγμένο ειδικά για Microsoft Windows, προτείνουμε την εξής διαδικασία:

Δημιουργείστε ένα φάκελο στον σκληρό δίσκο του υπολογιστή σας με όνομα της επιλογής σας π.χ. workplace. Αν ο σκληρός σας δίσκος είναι ο C: εκτελέστε στην octave την εντολή

```
cd c:\workplace
```

Μετά την εκτέλεση της εντολής

```
diary namefile.txt
```

ότι πληκτρολογείτε και ότι εμφανίζεται στην Octave γράφεται στο αρχείο namefile.txt. Φυσικά μπορείτε να διαλέξετε ότι όνομα αρχείου θέλετε αλλά καλό είναι να βάλετε την επέκταση txt ώστε το αρχείο να μπορεί να ανοιχτεί με έναν editor όπως το notepad. Για να σταματήσει η καταγραφή των εντολών και των αποτελεσμάτων εκτελέστε την εντολή:

```
diary off
```

Οδηγίες για τη συγκεκριμένη εφαρμογή :

Η μεταβλητή **xold** αντιστοιχεί στο x_{n-1} και παίρνει αρχική τιμή ίση με άπειρο ώστε να μπορέσει να ξεκινήσει η δομή επανάληψης while και να εκτελεστεί τουλάχιστον μία

φορά, η μεταβλητή **xnew** αντιστοιχεί στο x_n και παίρνει αρχική τιμή 2. Το διάνυσμα x έχει ως στοιχεία τα σημεία της προσέγγισης.
Η δομή επανάληψης **while** εκτελείται όσο η απόλυτη διαφορά του δύο διαδοχικών προσεγγίσεων είναι μεγαλύτερη του 10^{-9}. Μόλις ικανοποιηθεί το κριτήριο η επαναληπτική διαδικασία σταματά. Μέσα στο while η xold παίρνει την τιμή της τελευταίας προσέγγισης η xnew παίρνει την τιμή της νέας προσέγγισης και τοποθετείται ως τελευταίο στοιχείο στο διάνυσμα των προσεγγίσεων.

Ακολουθεί παράδειγμα που υλοποιεί την $x=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3x}+\frac{5}{3x^2}$

```
>> format long
>> xold=inf;
>> xnew=2;
>> x=[xnew];
>> while abs(xold-xnew)>1e-09,
xold=xnew;
xnew=2/3*xold+2/(3*xold)+5/(3*xold^2);
x=[x;xnew];
end
>> x
x =

  2.000000000000000
  2.083333333333333
  2.092888888888889
  2.094299755039108
  2.094513250475558
  2.094545672470250
  2.094550598812279
  2.094551347403737
  2.094551461158756
  2.094551478444858
  2.094551481071638
  2.094551481470801
```

Παρατηρούμε ότι μετά από δώδεκα επαναλήψεις οι δύο τελευταίες επαναλήψεις συμπίπτουν σε 9 δεκαδικά ψηφία

<u>Λύση</u>

A)

(i) Η εξίσωση μας $x=3+\frac{1}{x^2}$ μπορεί να γραφτεί ως $x^3-3x^2-1=0$. Θεωρώντας λοιπόν τη συνεχή πραγματική συνάρτηση $g(x)=x^3-3x-1$, παρατηρούμε ότι $g(3)=-1$ και $g(4)=15$. Δηλαδή, $g(3)g(4)<0$ και η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(3,4)$

(ii) Παραγωγίζοντας την g στο ίδιο διάστημα έχουμε :
$g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, η οποία είναι πάντα θετική για $x > 2$.
Επομένως, στο διάστημα $(3,4)$ η g είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα που εξασφαλίσαμε από το προηγούμενο υποερώτημα θα είναι μοναδική.

(iii) Παίρνοντας τώρα την αρχική εξίσωση $x = 3 + \frac{1}{x^2}$ παρατηρούμε ότι $x = f(x)$, όπου η $f(x) = 3 + \frac{1}{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[3,4]$.

Παρατηρούμε επιπλέον ότι : $|f'(x)| = \frac{2}{x^3}$, η οποία στο διάστημα $[3,4]$ είναι φθίνουσα με μέγιστη τιμή στο $x = 3$:

$$|f'(x)| \le |f'(3)| = \frac{2}{3^3} = 0.074 < 1$$

Επομένως, πληρούνται όλα τα κριτήρια για τη σύγκλιση του αλγορίθμου

$$x_n = f(x_{n-1}), \; n = 1, 2, \ldots$$

στην ρίζα της εξίσωσης.
Θεωρώντας ως αρχική τιμή $x_0 = 3$, ο προηγούμενος τύπος δίνει:

x_{n-1}	$f(x_{n-1}) = x_n$
3	3.111111
3.111111	3.103316
3.103316	3.103836
3.103836	3.103801
3.103801	3.103804
3.103804	3.103803

Βλέπουμε λοιπόν ότι μετά από τρείς επαναλήψεις έχουμε τη προσέγγιση της ρίζας με τη ζητούμενη ακρίβεια των 4 δεκαδικών ψηφίων αφού δύο διαδοχικές προσεγγίσεις συμπίπτουν μέχρι αυτό το όριο.

B)

```
>> clear all
>> format long
>> xold=inf;
>> xnew=3;
>> x=[xnew];
>> while abs(xold-xnew)>1e-09,
xold=xnew;
xnew=3+1/xold^2;
x=[x;xnew];
end
>> x
```

```
x =
   3.00000000000000
   3.11111111111111
   3.10331632653061
   3.10383598989710
   3.10380122308396
   3.10380354852795
   3.10380339298379
   3.10380340338781
   3.10380340269191

>>
```

Παρατηρούμε ότι μετά από δώδεκα επαναλήψεις οι δύο τελευταίες επαναλήψεις συμπίπτουν σε 9 δεκαδικά ψηφία
