ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: **5 Απριλίου 2006**
Ημερομηνία Παράδοσης της Εργασίας από τον Φοιτητή: **5 Μαΐου 2006**

Οι ασκήσεις της εργασίας αυτής αφορούν στα επόμενα Κεφάλαια του συγγράμματος του ΕΑΠ «*Λογισμός Μιας Μεταβλητής*» του Γ. Δάσιου :

Κεφάλαιο 9 (Το ολοκλήρωμα)
Κεφάλαιο 10 (Γενικευμένη ολοκλήρωση)
Κεφάλαιο 11 (Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων)
Κεφάλαιο 12 (ΣειρέςFourier)

Βοηθητικό υλικό: Μπορείτε να συμβουλευθείτε το υλικό που υπάρχει στη διεύθυνση http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm

- Από το ΣΕΥ (Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό) :
  - Ολοκληρώματα 1
  - Ολοκληρώματα 2
  - Σειρές Fourier
  - Διαφορικές Εξισώσεις

Άσκηση 1 (15 μονάδες)

Α) (9 μον.) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα σύμφωνα με τις υποδείξεις ή με όποιον άλλο τεκμηριωμένο τρόπο θέλετε:

$$(\alpha)\ \int \sin^2 x \cos^3 x dx\,,\quad (\beta)\ \int \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}dt \quad (\gamma)\ \int \sin(\ln x)dx$$

(Υπόδειξη: α) με αντικατάσταση sinx =u, β) με αντικατάσταση e^t=x και στη συνέχεια με τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων , γ) με αντικατάσταση lnx=u και στη συνέχεια ολοκλήρωση κατά παράγοντες).

B) (6 μον.) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=e^x$, y=lnx, y=e ,να βρείτε τα σημεία τομής τους και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων, τον άξονα x'x και την ευθεία $x=\frac{1}{2}$.

Λύση::

Α)

α) $I=\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x dx=\int \sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\cos x dx$,.Θέτουμε ημx = u ⇒ du = συνxdx.

$$\int u^2(1-u^2)du=\int(u^2-u^4)du==\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+c=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+c$$

β) $\int\frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}dt=I$. Θέτουμε $e^t=x\Rightarrow e^{2t}+3e^t+2=(e^t)^2+3e^t+2=x^2+3x+2$

$\Downarrow$

$e^t dt=dx$

$$I=\int\frac{1}{x^2+3x+2}dx=\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$$

Χρησιμοποιούμε τώρα μερικά κλάσματα

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow 1=A(x+2)+B(x+1)$$

x = -2 : 1 = - B

x = -1 : 1 = A

$$I=\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{x+2}dx=\ln|x+1|-\ln|x+2|+c=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+c=\ln\left|\frac{e^t+1}{e^t+2}\right|+c$$

γ) $I=\int\sin(\ln x)dx$

Θέτουμε lnx = u ⇒ du = $\frac{1}{x}dx\Rightarrow dx=xdu$. Ομως lnx = u ⇔ x = e^u ⇒ dx = e^udu.

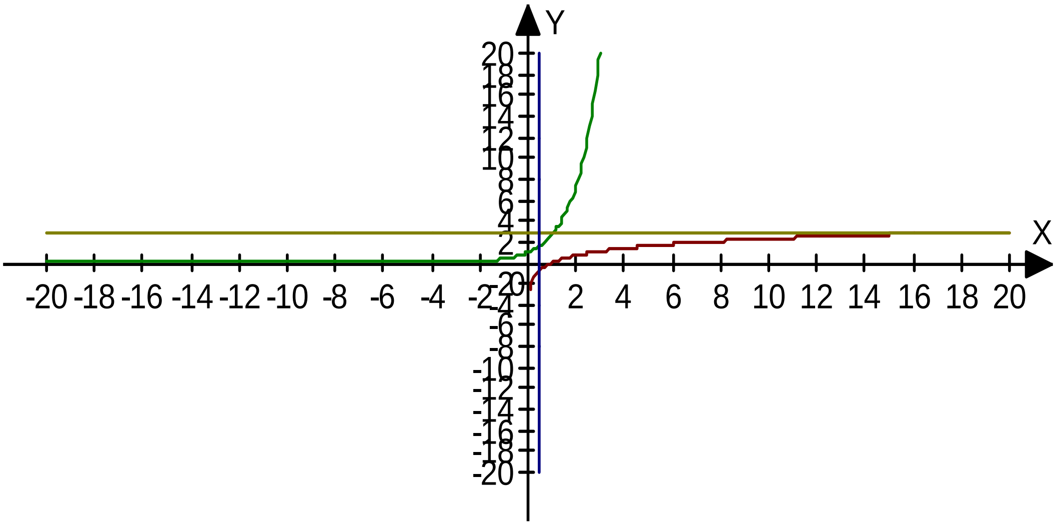
Το I ως προς την καινούρια μεταβλητή u γράφεται:

$$I=\int \sin u\cdot e^u du=\int \sin u(e^u)'\,du=$$

$$=e^u\cdot\sin u-\int\cos u\cdot e^u du=e^u\sin u-\int\cos u(e^u)'\,du=e^u\sin u-[e^u\cos u-\int e^u(\cos u)'\,du]=$$

$$=e^u\sin u-e^u\cdot\cos u-\int e^u\sin u du=e^u(\sin u-\cos u)-I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{e^u}{2}(\sin u-\cos u)=\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+c$$



Created with a trial version of Advanced Grapher - http://www.alentum.com/agr

B)

Τα σημεία τομής: e = $e^x \Leftrightarrow x = 1$, A (1,e) και lnx = e $\Leftrightarrow x = e^e$, B (e^e,e)

$E = E_1 + E_2$ όπου $E_1 = \int_{1/2}^{1} e^x dx$ και

E_2 = εμβαδό ορθογωνίου (ΑΒΓΔ) - $\int_1^{e^e} \ln x dx = (e^e - 1)e - \int_1^{e^e} \ln x dx$

Όπου Γ(e^e,0) , Δ(1,0)

$$E = \int_{1/2}^{1} e^x dx + (e^e - 1)\cdot e - \int_1^{e^e} \ln x dx = e^x]_{1/2}^{1} + e(e^e - 1) - x \cdot \ln x]_1^{e^e} + \int_1^{e^e} 1 dx$$

= e – $e^{1/2}$ +e (e^e – 1) – (e^e · e – 0)+ e^e – 1 = $e - \sqrt{e} - e + e^e - 1 = e^e - \sqrt{e} - 1$ τετραγωνικές μονάδες

Άσκηση 2 (15 μονάδες)

A) (10 μον.) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-a,a]\,(a>0)$ και $x \in [-a,a]$

1. (4 μον.) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης με αντικατάσταση να αποδείξετε ότι :
   αν η f είναι άρτια $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt$ και αν η f είναι περιττή $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$
2. (6 μον.) Εφαρμόστε τα ως άνω αποτελέσματα για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:
   $$(a) \int_{-1}^{1} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + 1} dx \quad , \quad (b) \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx \quad , \quad (c) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x + \cos x}{\tan^2 x + 1} dx$$

B) (5 μον.) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$\varphi(x) = \int_{2\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} (2t-1)dt, \ (x>0)$$

Υπόδειξη: Ισχύει ο τύπος του Leibnitz: $\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f[b(x)] \cdot \frac{db(x)}{dx} - f[a(x)] \cdot \frac{da(x)}{dx}$)

Λύση:

A)

1) Αν η συνάρτηση είναι άρτια ισχύει $f(-t)=f(t), \forall t \in [-a,a]$, επομένως

$\int_{-x}^{x} f(t)dt = \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$. Θέτουμε $t=-u \Rightarrow dt=-du$ και έχουμε

$\int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_{x}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{x}^{0} f(u)du = \int_{0}^{x} f(u)du = \int_{0}^{x} f(t)dt$. Άρα $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_{0}^{x} f(t)dt$.

Αν η συνάρτηση είναι περιττή ισχύει $f(-t)=-f(t), \forall t \in [-a,a]$ τότε

$\int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_{x}^{0} f(-u)(-du) = \int_{x}^{0} f(u)du = -\int_{0}^{x} f(u)du = -\int_{0}^{x} f(t)dt$, επομένως $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$

2)

$$(a) \quad \int_{-1}^{1} \frac{x^2+\sin x}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx + \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1}dx = x\Big|_{-1}^{1} - \tan^{-1}(x)\Big|_{-1}^{1} + 0 = 2-\frac{\pi}{2},$$

$$(b) \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx \neq \frac{-1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2, \;\; \alpha\varphi o\upsilon' \;\; \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \frac{-2}{x}\Big|_{0}^{1} = -2+\infty = \infty \text{ !!}$$

Πρέπει να σημειώσουμε βέβαια ότι η συνάρτηση $f(x)=1/x^2$ θεωρείται άρτια όχι σε όλο το [-1, 1] αλλά στο [-1, 1] – {0}. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1}dx = 0$ πιο πάνω, επειδή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή.

$$(c) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x+\cos x}{\tan^2 x+1}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{\tan^2 x+1}dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\tan^2 x+1}dx = 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}dx =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x(1-\sin^2 x)dx = 2\sin x\Big|_{0}^{\pi/2} - 2\frac{\sin^3 x}{3}\Big|_{0}^{\pi/2} = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{\tan^2 x+1}dx = 0$ πιο πάνω, επειδή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή.

B) (5 μον.) Τα υποψήφια για ακρότατο σημεία βρίσκονται από τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου, $\varphi'(x)$. Η απευθείας ολοκλήρωση δίνει:

$$\varphi(x) = \int_{2\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} (2t-1)dt = (t^2-t)\Big|_{2\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} = 9x-4x-3\sqrt{x}+2\sqrt{x} = 5x-\sqrt{x}$$

οπότε $\varphi'(x) = 5-\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \;\; \to \;\; x=\frac{1}{100}$.

Από τον τύπο του Leibnitz επίσης παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα:

$$\varphi'(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx}=(2\cdot 3\sqrt{x}-1)\cdot\frac{d(3\sqrt{x})}{dx}-[2\cdot(2\sqrt{x})-1]\cdot\frac{d(2\sqrt{x})}{dx}=$$

$$(6\sqrt{x}-1)\cdot\frac{3}{2\sqrt{x}}-(4\sqrt{x}-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=5-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Αυτή η παράγωγος μηδενίζεται για $x=\frac{1}{100}$, η δεύτερη παράγωγος είναι $\varphi''(x)=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, η οποία είναι θετική, άρα έχουμε ελάχιστο.

Άσκηση 3 (8 μονάδες)

Έστω φυσικός αριθμός $n>0$. Η συνάρτηση γάμα στη θέση n, ορίζεται από τον τύπο:

$$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$$

1. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση, δείξατε ότι $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ για $n>0$ και με την βοήθεια αυτής της σχέσης την $\Gamma(n+1)=n!,(n=0,1,2,3,...)$
2. Στηριζόμενοι στα προηγούμενα αποτελέσματα, υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty}x^6e^{-2x}dx$

Λύση:

1) Από τον ορισμό της γάμα συνάρτησης έχουμε:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=\lim_{K\to+\infty}\int_0^K x^ne^{-x}dx$$

Ολοκληρώνοντας παραγοντικά, έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^K x^ne^{-x}dx=\int_0^K x^n(-e^{-x})'dx=[x^n\cdot(-e^{-x})]_0^K-\int_0^K nx^{n-1}(-e^{-x})dx=$$

$$=-K^ne^{-K}+n\int_0^K x^{n-1}e^{-x}dx$$

Υπολογίζουμε τώρα το όριο και έχουμε

$$\lim_{K\to\infty}\int_0^K x^ne^{-x}dx=\lim_{K\to\infty}(-K^ne^{-K})+n\lim_{K\to\infty}\int_0^K x^{n-1}e^{-x}dx$$

Το δεύτερο όριο είναι ίσο με $\Gamma(n)$, ενώ το πρώτο υπολογίζεται με κανόνα L΄Hospital:

$$\lim_{K\to\infty}(-K^ne^{-K})=\lim_{K\to\infty}\left(-\frac{K^n}{e^K}\right)=\lim_{K\to\infty}\left(-\frac{nK^{n-1}}{e^K}\right)=\lim_{K\to\infty}\left(-\frac{n(n-1)K^{n-2}}{e^K}\right)=$$

$$=\cdots=\lim_{K\to\infty}\left(-\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{e^K}\right)=0$$

Αντικαθιστώντας όλα τα προηγούμενα, έχουμε τελικά $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$. Για το δεύτερο ερώτημα, δείχνουμε πρώτα ότι $\Gamma(1)=1$. Πράγματι:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{K\to\infty}\int_0^{K} e^{-x}dx = \lim_{K\to\infty}(1-e^{-K})=1$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, έχουμε:

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1\cdot 1=1=1!$$

$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1=2=2!$$

$$\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot 2=6=3!$$

$$\cdots$$

$$\Gamma(n+1)=n\cdot\Gamma(n)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1=n!$$

2) Για να υπολογίσουμε τώρα το τελευταίο ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό: $x=\dfrac{y}{2}$ και θα πάρουμε:

$$\int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x}dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^6 e^{-y}\,\frac{dy}{2} =$$

$$=\frac{1}{2^7}\int_0^{+\infty} y^6 e^{-y}dy = \frac{\Gamma(7)}{2^7}=\frac{6!}{2^7}=\frac{45}{8}$$

Άσκηση 4 (16 μονάδες)

Α) (8 μον.)

1. Να βρεθεί η συνάρτηση $y(t)$ τέτοια ώστε $y'(t)=\dfrac{e^t}{y(t)}$ και $y(0)=0$
2. Να βρεθεί η συνάρτηση $y(t)$ τέτοια ώστε $y'(t)-5y(t)=0$ και $y(0)=2$

(βλ. Σ.Ε.Υ., Διαφορικές Εξισώσεις, 13.2,13.4)

Β) (9 μον.) Θα λύσουμε τώρα το πρόβλημα Α 2) με ένα διαφορετικό τρόπο, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace.

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)=e^{at}, (a\in\mathbb{R})$
2. Θεωρούμε και πάλι την διαφορική εξίσωση $y'(t)-5y(t)=0$ και την αρχική συνθήκη $y(0)=2$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο 10.25 του βιβλίου σας υπολογίστε τις μετασχηματισμένες Laplace των δύο μελών της εξίσωσης και θέτοντας $L\{y(x)\}=Y(s)$ βρείτε μία έκφραση για την $Y(s)$. Λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο ερώτημα υπολογίστε την $y(t)$ από την $Y(s)$.

Λύση:

Α)

1) Από την αρχική σχέση παίρνουμε $y'(t)y(t)=e^t \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y^2\right)=e^t$**,** από όπου προκύπτει ότι $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y^2-e^t\right)=0$ και επομένως $\frac{1}{2}y^2-e^t=c \rightarrow y=\sqrt{2(e^t+c)}$, όπου c αυθαίρετη σταθερά και επιλέγουμε τον θετικό κλάδο, δηλ. y(t) ≥ 0. Επειδή $y(0)=0$, από την τελευταία σχέση προκύπτει $c=-1$.

Επομένως $y(t)=\sqrt{2e^t-2}$ και το πεδίο ορισμού είναι t ≥ 0. **Σημείωση:** ΠΡΟΣΟΧΗ ΟΜΩΣ: Στο t = 0 υπάρχει ιδιομορφία της λύσης αφού εκεί δεν ορίζεται η παράγωγος $y'(t)=\infty$!

2) Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη βρίσκουμε $\alpha\beta e^{\beta t}-5ae^{\beta t}=0 \rightarrow \beta=5$ με e^{-5t}. Επειδή δε $y(0)=2$, από την σχέση αυτή έχουμε $\alpha=2$. Άρα η λύση είναι η $y(t)=2e^{5t}$.

Β) (8 μον.)

1) $L\{e^{at}\}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}e^{at}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-a)t}dt=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-(s-a)t}dt=\lim_{u\to+\infty}\frac{1-e^{-(s-a)u}}{s-a}=\frac{1}{s-a}$,αν $s>a$.

Για $s\le a$ το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

2) Ο τύπος 10.25 μας λέει ότι:

$L\{y'(t)\}=sL\{y(t)\}-y(0)$ Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μερών της Διαφορικής Εξίσωσης και έχουμε:

$$L\{y'(t)-5y(t)\}=L\{0\}$$

ή

$$L\{y'(t)\}-5L\{y(t)\}=0 \Rightarrow sL\{y(t)\}-y(0)-5L\{y(t)\}=0$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $y(0)=2$ και $L\{y(t)\}=Y(s)$ παίρνουμε:

$$sY(s)-2-5Y(s)=0 \Rightarrow Y(s)=\frac{2}{s-5}$$

Επειδή $L\{e^{at}\}(s)=\frac{1}{s-a}, (s>a)$, η συνάρτηση που έχει μετασχηματισμό Laplace $\frac{1}{s-5}$ είναι η e^{5t}, άρα η συνάρτηση που μας δίνει μετασχηματισμό Laplace $\frac{2}{s-5}$ είναι η $2e^{5t}$, η οποία είναι και λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Άσκηση 5 (18 μονάδες)

Α) (12 μον.)Να βρείτε τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=f(x+2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν α) $f(x)=x+|x|,\quad -\pi\le x<\pi,$ β) $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases},$

Β) (6 μον.) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της α) και β) να υπολογίσετε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \text{ και } \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$$

Λύση:

Α) Γνωρίζουμε ότι, αφού η περίοδος της συνάρτησης είναι 2π, η σειρά Fourier είναι της μορφής:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$$

α)

Η συνάρτηση γράφεται $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 2x, & 0\le x<\pi\end{cases}$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}2xdx=\frac{1}{2\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x[\frac{\sin(nx)}{n}]'dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[2x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2\frac{\sin(nx)}{n}dx\right\}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi)-1\right]=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

Δηλαδή

$$a_n=\begin{cases}-\frac{4}{\pi n^2}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\\ 0, & n=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x[-\frac{\cos(nx)}{n}]'dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[-2x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2\frac{\cos(nx)}{n}dx\right\}=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi}=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right]=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Δηλαδή

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n}, & n = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ -\dfrac{2}{n}, & n = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

Επομένως η σειρά Fourier είναι η

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos[(2k-1)x]\right] + 2\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right] =$$
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \dots\right] + 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \dots\right]$$

β)

Η συνάρτηση f είναι περιττή, άρα $a_n = 0$ και

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & n = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ 0, & n = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

Συνεπώς η σειρά είναι η

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \dots\right]$$

B)

Από το α), επειδή το $x = 0$ είναι σημείο συνέχειας της συνάρτησης, ισχύει ότι

$$f(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos 0 + b_n \sin 0],$$

Επομένως

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right] \Rightarrow 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

Ομοίως από το β) για $x = 0$ προκύπτει

$$f(0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos 0 - \frac{\cos 0}{3} + \frac{\cos 0}{5} - \frac{\cos 0}{7} + \dots\right] \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right]$$
$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right] = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Άσκηση 6 (18 μονάδες)

Μια κυματομορφή που μπορεί να προέρχεται π.χ. από μια πηγή ακτινοβολίας στο διάστημα, γίνεται αντιληπτή πάνω σε ένα παλμογράφο ως μια συνάρτηση του χρόνου t, $f(t)$, η οποία γενικά **δεν είναι περιοδική**. Ο **ολοκληρωτικός μετασχηματισμός *Fourier*,** που θα μελετήσουμε στην παρούσα Άσκηση, μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τις συχνότητες ω και τα «πλάτη» Α(ω), Β(ω) **όλων των περιοδικών κυματομορφών** στις οποίες αναλύεται η $f(t)$**.** Αυτά τα Α(ω), Β(ω) συνθέτουν το λεγόμενο «φάσμα» της $f(t)$ (ως συνάρτηση της συχνότητας) και είναι ακριβώς αυτό που παρατηρείται πειραματικά σε ένα φασματοσκόπιο. Δεχόμαστε το παρακάτω θεώρημα που λέγεται ***ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier:***

1. Οι συναρτήσεις $f(t)$ και $f'(t)$ είναι τμηματικά συνεχείς[1] *σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του* $(-\infty,+\infty)$

2. Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ *συγκλίνει*

Τότε, θέτοντας $A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)cos(\omega t)dt$ και $B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)sin(\omega t)dt$, ισχύει

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[A(\omega)cos(\omega t)+B(\omega)sin(\omega t)\right]d\omega=\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$$

Όπου $f(t-0)$ και $f(t+0)$ είναι τα όρια της $f(t)$ στο t, από αριστερά και από δεξιά , αντίστοιχα.
Ορισμός: *Το ολοκλήρωμα*

$$I(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[A(\omega)cos\,\omega t+B(\omega)sin\,\omega t\right]d\omega$$

*λέγεται **ολοκλήρωμα Fourier** της συνάρτησης* $f(t)$ *και επομένως* $I(t)=f(t)$ *αν η* f *είναι συνεχής στο* t.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t\le 2\\ 0, & t>2\end{cases}$$

1. (6 μον.) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $A(\omega)$ και $B(\omega)$

[1] Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται τμηματικά συνεχής σε ένα διάστημα αν (α) το διάστημα αυτό μπορεί να διαιρεθεί σε πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων στο εσωτερικό των οποίων η $f(x)$ είναι συνεχής και (β) υπάρχουν τα πλευρικά όρια της $f(x)$ στα άκρα κάθε διαστήματος και είναι πεπερασμένα.

2. (6 μον.) Να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης είναι
$$I(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos[\omega(t-1)]}{\omega}d\omega$$
3. (2 μον.) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ολοκλήρωμα Fourier, να υπολογίσετε το $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$
4. (4 μον.) Βρείτε τη συνάρτηση «φάσματος» $F(\omega)=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}$ και σχεδιάστε την γραφική της παράσταση για $0\le\omega<\infty$. Ποιες συχνότητες ω δεν συμβάλλουν καθόλου στο «φάσμα» της κυματομορφής $f(t)$;

Λύση:

1)

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t)dt=\int_{0}^{2}\cos(\omega t)dt=\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^2=\frac{\sin(2\omega)}{\omega}, \text{αν } \omega\neq 0 \text{ και } A(0)=\int_0^2 dt=2$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(\omega t)dt=\int_{0}^{2}\sin(\omega t)dt=\left[\frac{-\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^2=\frac{1-\cos(2\omega)}{\omega}, \text{ αν } \omega\neq 0 \text{ και } B(0)=0$$

2)

$$I(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\frac{\sin 2\omega}{\omega}\cos(\omega t)+\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}\sin(\omega t)\right]d\omega$$

και επειδή $\sin 2\omega=2\sin\omega\cos\omega,\quad 1-\cos 2\omega=2\sin^2\omega$, προκύπτει ότι

$$\frac{\sin 2\omega}{\omega}\cos(\omega t)+\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}\sin(\omega t)=\frac{2\sin\omega[\cos\omega\cos(\omega t)+\sin\omega\sin(\omega t)]}{\omega}$$
$$=\frac{2\sin\omega\cos[\omega(t-1)]}{\omega}$$

και

$$I(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos[\omega(t-1)]}{\omega}d\omega$$

3)

Η f είναι συνεχής στο 1, επομένως $f(1)=1$, άρα $I(1)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=1\Leftrightarrow\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$

4) Σύμφωνα με όσα βρήκαμε πιο πάνω: $A(\omega)=\frac{\sin 2\omega}{\omega}$, $B(\omega)=\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}$ οπότε το φάσμα γράφεται

$$F(\omega)=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}=\frac{1}{\omega}\sqrt{\sin^2(2\omega)+4\sin^4(\omega)}=\frac{1}{\omega}\sqrt{4\sin^2(\omega)\cos^2(\omega)+4\sin^4(\omega)}=\frac{2|\sin(\omega)|}{\omega}$$

Άρα στο φάσμα αυτό δεν συνεισφέρουν οι συχνότητες ω = κπ, κ=0, 1, 2, ……

Άσκηση 7 (10 μονάδες)

Η ***συνάρτηση σφάλματος***, η οποία ορίζεται μέσω του ολοκληρώματος:

$$\text{erf (x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\,,$$

απαντάται συχνά στη στατιστική και τις πιθανότητες, αλλά και σε πολλά προβλήματα των εφαρμοσμένων επιστημών. Το ολοκλήρωμα αυτό, αν και απλό εκ πρώτης όψεως, δεν υπολογίζεται με αναλυτικές μεθόδους μέσω βασικών συναρτήσεων και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποια **αλγοριθμική διαδικασία** για τον **προσεγγιστικό υπολογισμό** του (π.χ. χρησιμοποιώντας το Octave σε έναν Η/Υ). Μία τέτοια διαδικασία είναι και η λεγόμενη ***Αριθμητική μέθοδος υπολογισμού ολοκληρωμάτων Simpson,*** τα βασικά βήματα της οποίας είναι τα εξής:

Δοσμένου ενός ορισμένου ολοκληρώματος $I=\int_a^b f(x)dx$:

1. Χωρίζετε το διάστημα [α,b] σε n διαστήματα ίσου πλάτους Δx = $\frac{b-a}{n}$ και παίρνετε τις τετμημένες $x_0 = \alpha$, $x_1 = \alpha + \Delta x$, $x_2 = \alpha + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = \alpha + (n-1)\,\Delta x$, $x_n = b$.

2. Υπολογίζετε τις αντίστοιχες τεταγμένες αυτών, δηλαδή τα $y_0 = f(\alpha)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots, y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(b)$.

3. Έτσι, μια προσέγγιση του ολοκληρώματος I δίνεται από τη σχέση:

$$I \approx \frac{\Delta x}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

(α) (5 μον.) Γράψτε ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή σας που να υλοποιεί την ως άνω διαδικασία και ελέγξτε την ακρίβεια της μεθόδου (και την ορθότητα του προγράμματός σας) υπολογίζοντας γνωστά εμβαδά όπως αυτά που δίνονται από τα ολοκληρώματα:

$$I=\int_1^2 3x^2dx=7 \quad , \quad K=\int_1^2 \ln x dx = x\ln x - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 = 0.38629436$$

(β) (5 μον.) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Simpson για να υπολογίσετε προσεγγιστικά τη συνάρτηση σφάλματος erf (1) με n = 10, 16, 20. Με ποια ακρίβεια πιστεύετε ότι την έχετε υπολογίσει όταν το n = 16;

Ενδεικτικές λύσεις της Άσκησης 7 σε MATLAB 7.1

(α) Επειδή το I είναι ολοκλήρωμα μιας απλής παραβολής που δίνεται σαν μια κυβική συνάρτηση του x , και η μέθοδος Simpson που χρησιμοποιούμε βασίζεται σε κυβικές προσεγγίσεις θα δώσει πάντα το σωστό αποτέλεσμα $I = 7$ όποιο n και να χρησιμοποιήσουμε! (Ελέγξτε το αυτό).

Αν πάρουμε όμως το ολοκλήρωμα *K* τότε δεν συμβαίνει αυτό και οι προσεγγίσεις μας γίνονται μέσω του προγράμματος **MATLAB 7.1 :**

format long

a=1;b=2;n=10; (και μπορούμε να το αλλάξουμε σε 16, 20, κλπ.) ;dx=(b-a)/n;

x=a:dx:b

y=logx;

y1=y(2:2:n);

y2=y(3:2:n-1);

K=dx/3*(y(1)+y(n+1)+4*sum(y1)+2*sum(y2))

Ως γνωστόν 2*ln2 - 1 = 0,3862943. Αλλάζοντας το n=10, 16 ή 20, παίρνουμε από τον ως άνω υπολογισμό:

Για n=10, *K*= 0.386294340380481

Για n=16, *K*= 0. 38629421367579

Για n=20, *K*= 0. 38629430059436

Από το αποτέλεσμα για n=20, είναι φανερό ότι για n=16, έχουμε το σωστό αποτέλεσμα με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων.

(β)

format long

a=0;b=1;n=10; (και μπορούμε να το αλλάξουμε σε 16, 20, κλπ.) dx=(b-a)/n;

x=a:dx:b

y=2/sqrt(pi)*exp(-x.^2);

y1=y(2:2:n);

y2=y(3:2:n-1);

I=dx/3*(y(1)+y(n+1)+4*sum(y1)+2*sum(y2))

Αλλάζοντας το n=10, 16 ή 20, παίρνουμε από τον ως άνω υπολογισμό:

Για n=10, erf(1) = 0.84270171307750

Για n=16, erf(1) = 0.84270093357205

Για n=20, erf(1) = 0.84270085056869

Ὁπως και με το προηγούμενο παράδειγμα, αναμένουμε ότι για n=16, έχουμε το σωστό αποτέλεσμα με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων. Όπως διαπιστώνουμε και από το αποτέλεσμα για n=20, αυτό που αναμένουμε από τις n=16 επαναλήψεις είναι σωστό.
