# ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
# ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)**

**ΕΡΓΑΣΙΑ 6η**

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: **10 Μαΐου 2006**
Ημερομηνία Παράδοσης της Εργασίας από τον Φοιτητή: **2 Ιουνίου 2006**

---

**Άσκηση 1. (12 μον.)**

Α. Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, $x, y \in ∡$.

i) Να βρείτε τον μιγαδικό $w = (1+i)z - 2i$ συναρτήσει των $x, y \in ∡$.

ii) Αν το μέτρο $|w| = 2$, να δείξετε ότι τα σημεία Μ($x$, $y$) ανήκουν σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του. (Υπόδειξη: η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $O(a,b)$ και ακτίνα $r$ είναι: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$).

Β. Να βρεθεί ο πιο γενικός 2×2 πραγματικός πίνακας $A$ που ικανοποιεί την $A^2 = A$. Σε ποια περίπτωση είναι αυτός αντιστρέψιμος;

C. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του $\lambda$ για τις οποίες το παρακάτω σύστημα έχει μία λύση, καμία λύση, άπειρες λύσεις:

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 2 \\ 2x+\lambda y+2z &= \lambda \\ x+y+\lambda z &= 0 \end{aligned}$$

και να προσδιορισθούν οι λύσεις όπου υπάρχουν.

**Λύση:**

Α.

i) Έιναι $w = (1+i)z - 2i = ... = (x-y) + (x+y-2)i$

ii) $|w| = 2 \Leftrightarrow |w|^2 = 4 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x+y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow ...\textit{πραξεις}... \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

Άρα το Μ($x$,$y$) ανήκει σε κύκλο κέντρο $O(1,1)$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{2}$.

Β. **Α Τρόπος**. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, όπου $a$, $b$, $c$, $d \in ∡$. Θέλουμε να βρούμε τον γενικότερο πίνακα ο οποίος ικανοποιεί την $A^2 = A$. Επομένως

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a^2+bc &= a \\ ab+bd &= b \\ ca+dc &= c \\ cb+d^2 &= d \end{aligned}\right\}.$$

Το παραπάνω σύστημα έχει προφανή λύση την μηδενική, δηλαδή:

$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$ την οποία δεχόμαστε, θέλουμε όμως την γενικότερη μορφή του $A$.

Άρα ένα εκ των $a$, $b$, $c$, $d$ θα είναι διάφορο του μηδενός, έστω

i) $b \neq 0$. Τότε από τη σχέση $ab + bd = b \Leftrightarrow (a+d-1)\, b = 0$ συνάγουμε ότι $a + d = 1$.

α) Εάν $c \neq 0$, τότε από τις σχέσεις $a^2 + bc = a \Leftrightarrow a^2 - a + cb = 0$ και την $d^2 + cb = d \Leftrightarrow d^2 - d + cb = 0$ συνάγουμε ότι

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2} \text{ και } d = \frac{1 \mp \sqrt{1-4bc}}{2}.$$

Επομένως $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix}$ ή $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix}$.

β) $c = 0$. Τότε $a(a-1) = 0$ και $d(d-1) = 0$.

Εάν $a = 0$, τότε $d = 1$ και $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Εάν $d = 0$, τότε $a = 1$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ii) $b = 0$. Τότε,

α) Εάν $c = 0$, τότε $a(a-1) = 0$ και $d(d-1) = 0$.

Εάν $a = 0$, τότε $d \neq 0$ (αλλιώς θα είχαμε την εκφυλισμένη περίπτωση) άρα $d = 1$ και $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Εάν $d = 0$, τότε $a \neq 0$ (αλλιώς θα είχαμε την εκφυλισμένη περίπτωση) άρα $a = 1$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Εάν $a \neq 0$ και $d \neq 0$, τότε $a = d = 1$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

β) Εάν $c \neq 0$, τότε $a(a-1) = 0$, $d(d-1) = 0$ και $a + d = 1$.

Εάν $a = 0$, τότε $d = 1$ και $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$.

Εάν $d = 0$, τότε $a = 1$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

Εν κατακλείδι,

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix} \text{ ή } A=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix} \text{με } b,c\neq 0,$$

ή $A=\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ή $A=\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ με $b\in\measuredangle$,

ή $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ή $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ ή $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ με $c\in\measuredangle$.

Για να είναι ο πίνακας $A$ αντιστρέψιμος θα πρέπει $\det(A)\neq 0$ . Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι αυτή η σχέση ισχύει μόνο στην περίπτωση του μοναδιαίου, δηλαδή όταν $A$ = I.

Επίσης μπορούμε να το δούμε και ως εξής: Υποθέτουμε ότι ο $A$ είναι αντιστρέψιμος.

$A^2 = A \Leftrightarrow A(A - \mathrm{I}) = 0 \Leftrightarrow A^{-1}A(A - \mathrm{I}) = A^{-1}0 \Leftrightarrow A - \mathrm{I} = 0 \Leftrightarrow A = \mathrm{I}$.

**Β Τρόπος**

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

a. Έστω ότι ο $A$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε από $A^2 = A$ παίρνουμε $A = I$.

b. Έστω ότι ο $A$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του $A$ διαιρεί το $x^2 - x = x(x-1)$ και συνεπώς είναι γινόμενο διακεκριμένων μονικών πρωτοβάθμιων παραγόντων. Άρα υπάρχει αντιστρέψιμος $P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του $A$. Οι πιθανές ιδιοτιμές του $A$ είναι οι ρίζες του $x^2 - x$, δηλαδή 0,1. Επειδή ο $A$ δεν είναι αντιστρέψιμος, η περίπτωση που οι ιδιοτιμές είναι 1,1 δεν υφίσταται.

 b.i Έστω ότι οι ιδιοτιμές είναι 0,0. Τότε $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = 0.$

 b.ii Έστω ότι οι ιδιοτιμές του $A$ είναι 0,1. Τότε

 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ οπότε μετά από πράξεις βρίσκουμε

 $$A=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -bc & ba \\ -dc & da \end{pmatrix},\ ad-bc\neq 0.$$

C. Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος θα εργαστούμε με γραμμοϊσοδύναμους πίνακες. Με γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & \lambda & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & \lambda-4 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & -1 & \lambda-1 & -2 \end{bmatrix}$$

Από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα διαπιστώνουμε ότι εάν λ=4**,** τότε ο πίνακας γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$ και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$\begin{cases} x = -2-7r, \\ y = 2+3r \ , \quad \text{όπου } r \in R \\ z = r \end{cases}$$

Για $\lambda \neq 4$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & -1 & \lambda-1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & -1 & \lambda-1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\lambda-1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\lambda-1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -1 \end{bmatrix}$$

Από την τελευταία γραμμή του πίνακα βλέπουμε ότι για λ=1, το σύστημα δεν έχει καμία λύση (ασυμβίβαστο). Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 4$ το σύστημα έχει μια λύση, η οποία είναι:

$$\left.\begin{array}{l} x+(2\lambda-1)z=-2 \\ y=1 \\ (\lambda-1)z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{1}{\lambda-1},1,-\frac{1}{\lambda-1}\right).$$

**Άσκηση 2 (12 μον.)**

Α. (6 μον.) Έστω ένας 2*x*2 πίνακας Α με ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $r_1 = (-2,1)^T$ και $r_2 = (1,1)^T$.

i) Να βρείτε τον πίνακα Α.

ii) Να υπολογίσετε τον πίνακα $A^{100}$.

Β. (6 μον.) Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$. Να εξετάσετε τους πίνακες *A*, *B* ως προς το αν: (i) διαγωνιοποιούνται, (ii) είναι ορθογώνιοι (iii) είναι θετικά ορισμένοι.

**Λύση:**

Α.

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Α είναι προφανώς δευτέρου βαθμού και έχει ρίζες τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$ που είναι διακεκριμένες. Άρα ο πίνακας διαγωνοποιείται. Ο πίνακας *P* με στήλες τα ιδιοδιανύσματα $r_1, r_2$ είναι:

$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και διαγωνοποιεί τον *A*. Άρα ο *A* γράφεται:

$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$,όπου D είναι ο διαγώνιος πίνακας: $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

Άρα ο πίνακας Α είναι:

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, όπου $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, (μετά από πράξεις για τον υπολογισμό του αντίστροφου).

ii) Είναι γνωστό ότι: $A^n = PD^nP^{-1}$ . Για n=100 παίρνουμε:

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2+5^{100}}{3} & \dfrac{-2+2\cdot 5^{100}}{3} \\ \dfrac{-1+5^{100}}{3} & \dfrac{1+2\cdot 5^{100}}{3} \end{bmatrix}$$

B. Σχετικά με τον πίνακα $A$ βλέπουμε ότι είναι συμμετρικός. Άρα διαγωνοποιείται.
Αν $A^T$ ο ανάστροφος του πίνακα A, τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι $AA^T \neq I$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας 2x2. Συνεπώς, ο πίνακας A δεν είναι ορθογώνιος.
Τέλος, ο πίνακας A δεν είναι θετικά ορισμένος, αφού οι ιδιοτιμές του δεν είναι όλες θετικές. Πράγματι, οι ιδιοτιμές του είναι:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(-3-\lambda)-16=0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5.$$

**Σημείωση.** Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 3.7.1 σελίδα 172 του βιβλίου, όπου για 2x2 πίνακες τα πρόσημα των διαγώνιων στοιχείων και της ορίζουσας καθορίζουν εάν είναι ή όχι θετικά ορισμένος.

Σχετικά με τον πίνακα B υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του. Είναι:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-5)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 5.$$

**Τρόπος A**: Αφού ο 2x2 πίνακας B έχει δύο ίσες (πραγματικές) ιδιοτιμές, στις οποίες αντιστοιχεί μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα, δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.
**Τρόπος B**: Υποψήφια ελάχιστα πολυώνυμα του πίνακα B είναι: $m_1(\lambda) = \lambda - 5$ και $m_2(\lambda) = (\lambda-5)^2$. Θεωρούμε το μικρότερου βαθμού, $m_1(\lambda)$ και εξετάζουμε αν $m_1(\mathrm{B}) = 0$. Έχουμε:

$m_1(\mathrm{B}) = (B - 5I) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$ Άρα το $m_1(\lambda)$ δεν είναι ελάχιστο πολυώνυμο.

Συνεπώς, ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $m_2(\lambda)$ , το οποίο όμως δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων μονικών πρωτοβάθμιων παραγόντων. Έτσι ο πίνακας B δεν διαγωνοποιείται.
Αν $B^T$ ο ανάστροφος του πίνακα B, τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι $BB^T \neq I$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας 2x2. Συνεπώς, ο πίνακας B δεν είναι ορθογώνιος.

Τέλος, ο πίνακας B δεν μπορεί να θεωρηθεί θετικά ορισμένος γιατί δεν είναι συμμετρικός (βλ.παράγραφο 3.7).

**Άσκηση 3 (10 μον.)**
A. (6 μον.) Έστω $V$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ , ο οποίος παράγεται από το σύνολο: $S = \{v_1 = (1,1,2,4), v_2 = (2,-1,-5,2), v_3 = (1,-1,-4,0), v_4 = (2,1,1,6)\}$ . Να βρείτε:

i) Την διάσταση του $V$
ii) Μια βάση του $V$ που να παράγεται από στοιχεία του συνόλου S.
iii) Μια βάση του $R^4$, που να περιέχει τα στοιχεία της βάσης του V.

B. (4 μον.) Θεωρώντας την απεικόνιση: $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, με τύπο:

$$f(x,y,z,w) = (x+y+2z+4w, 2x-y-5z+2w, x-y-4z, 2x+y+z+6w),$$

προσδιορίστε τον πυρήνα της απεικόνισης f.

**Λύση:**

Α.

i και ii) Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμος στηλών (το δεύτερο αλγόριθμο) που υπάρχει στην παράγραφο 2.6 του βιβλίου. Έτσι έχουμε μετά από γραμμοπράξεις:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -9 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, διαγράφοντας από τον αρχικό πίνακα τα διανύσματα (στήλες) $v_3$ και $v_4$ τα οποία αντιστοιχούν στις στήλες του κλιμακωτού πίνακα που δεν περιέχουν οδηγό, έχουμε ότι: το σύνολο $\{v_1, v_2\}$ είναι μια βάση του V. Άρα, η διάσταση του V είναι $\dim V = 2$.

iii) Έστω $S = \{v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ όπου το σύνολο $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, με $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0)$ και $e_4 = (0,0,0,1)$, είναι η συνηθισμένη βάση του $R^4$.

Εφόσον

$$v_1 = (1,1,2,4) = e_1 + e_2 + 2e_3 + 4e_4$$
$$v_2 = (2,-1,-5,2) = 2e_1 - e_2 - 5e_3 + 2e_4$$

έχουμε

$$2e_3 + 4e_4 = v_1 - e_1 - e_2$$
$$5e_3 - 2e_4 = -v_2 + 2e_1 - e_2$$

ή ισοδύναμα $$\begin{aligned} e_3 &= \frac{1}{12}(v_1 - 2v_2 + 3e_1 - 3e_2) \\ e_4 &= \frac{1}{24}(5v_1 + 2v_2 - 9e_1 - 3e_2) \end{aligned}.$$

Οπότε τα διανύσματα $e_3$ και $e_4$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, e_1$ και $e_2$. Βρήκαμε 4 διανύσματα του $R^4$ που το παράγουν. Άρα μια βάση του $R^4$ είναι $\{v_1, v_2, e_1, e_2\}$.

Β. Έστω, $r = (r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}^4$ τυχόν στοιχείο του πυρήνα της απεικόνισης *f*. Τότε θα πρέπει *f*(*r*)=0. Από τον τύπο της *f* έχουμε:
$(r_1 + r_2 + 2r_3 + 4r_4, 2r_1 - r_2 - 5r_3 + 2r_4, r_1 - r_2 - 4r_3, 2r_1 + r_2 + r_3 + 6r_4) = (0,0,0,0)$. Επιλύοντας το ομογενές σύστημα (μετά από πράξεις), έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή το τυχόν διάνυσμα του πυρήνα γράφεται $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (1,-3,1,0)r_3 + (-2,-2,0,1)r_4$. Μία βάση του πυρήνα είναι η $\{(1,-3,1,0),(-2,-2,0,1)\}$ και η dim(ker *f*)=2.

**Άσκηση 4 (14 μον.)**

Α. (8 μον.)

i) Έστω $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 9}{10}$ για $n$ = 1, 2, … . Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και προσδιορίστε το όριό της. (Υπόδειξη: αποδείξτε πρώτα με επαγωγή ότι η ακολουθία είναι φραγμένη και στην συνέχεια αποδείξτε ότι είναι φθίνουσα).

ii) Επαναλάβατε το (i) για $a_1 < 1$. Ποιες διαφορές παρατηρείτε στα αποτελέσματα;

Β. (6 μον.) Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n!}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n n^n}$

(Υπόδειξη: Για την πρώτη χρησιμοποιήστε το κριτήριο των $p$ – σειρών και για την δεύτερη χρησιμοποιήστε το κριτήριο του λόγου).

**Λύση:**

Α.

i)

Πρώτα θα δείξουμε επαγωγικά ότι η ακολουθία είναι φραγμένη και μάλιστα ισχύει $a_n > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 1$, $a_1 = 2 > 1$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για *n*=*k*, δηλ. $a_k > 1$.

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$.

Πράγματι: $a_{k+1} = \dfrac{a_k + 9}{10} > \dfrac{1+9}{10} = 1$.

Συνεπώς, από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, ισχύει $a_n > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα, δηλαδή ότι ισχύει $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 9}{10} - a_n = \frac{9 - 9a_n}{10} = \frac{9}{10}(1 - a_n) < 0, \quad n \in \mathbb{N} \text{ (αφού ισχύει } a_n > 1\text{)}.$$

Άρα η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Επομένως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και έστω $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Έχουμε $\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n + 9}{10} = \dfrac{\ell+9}{10}$, άρα $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = 1$.

ii) Όπως και παραπάνω, είναι εύκολο να δείξουμε επαγωγικά ότι η ακολουθία είναι φραγμένη. Στην περίπτωση αυτή όμως ισχύει ότι $a_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα, δηλαδή ότι ισχύει $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι,

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + 9}{10} - a_n = \dfrac{9 - 9a_n}{10} = \dfrac{9}{10}(1 - a_n) > 0, \quad n \in \mathbb{N}$ (αφού ισχύει $a_n < 1$).

Άρα η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Επομένως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα. Ακριβώς όπως και πριν είναι $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

B.

i) Πρώτα παρατηρούμε ότι $\log n < \sqrt{n}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Πράγματι, θεωρώντας τη συνάρτηση $f(x) = \log x - \sqrt{x}$ οριζόμενη στους θετικούς πραγματικούς εύκολα επαληθεύουμε ότι $f'(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x} < 0$ για κάθε $x \in (4, \infty)$. Συνεπώς στο διάστημα αυτό η $f(x)$ είναι φθίνουσα. Άρα για κάθε $n = 5, 6, \ldots$ έχουμε ότι $f(n) < f(4) \Rightarrow \log n - \sqrt{n} < \log 4 - \sqrt{4} < 0 \Rightarrow \log n < \sqrt{n}$ . Άμεσα επαληθεύεται ότι η τελευταία ανισότητα ισχύει και για $n = 1, 2, 3, 4$.

Ισχύει ότι $0 \le \dfrac{\log n}{n^2} < \dfrac{n^{1/2}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$, για κάθε $n = 1, 2, 3\ldots$ Έτσι, χρησιμοποιώντας το κριτήριο της σύγκρισης μπορούμε να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{n^2}$ είναι άνω φραγμένη από την p-σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, με p=3/2 η οποία συγκλίνει. Συνεπώς και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{n^2}$ συγκλίνει.

ii) Αφού $\lim_{n->+\infty} \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{2^n n^n}} = \lim_{n->+\infty} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{2e} < 1$, βάσει του κριτηρίου του λόγου συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει.

**Άσκηση 5 (16 μον.)**

A. (8 μον.) Να μελετηθεί πλήρως η συνάρτηση $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ και να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση.

B. (8 μον.) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1} - x + 1}$

ii) $\lim_{x\to 0^+} \left(\sin x \cdot \ln x\right)$

iii) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 2}$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\sin(\frac{2}{x})$

**Λύση:**

Α. Η *f* έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Για *x*=0 έχουμε $f(0) = 1-\sqrt[3]{1^2} = 0$.

Για *f*(*x*)=0 $\Rightarrow$ $1-\sqrt[3]{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow$ *x*=2 ή *x*=0.

Άρα το (0, 0) είναι σημείο τομής της *f* με τους άξονες, ενώ το (2, 0) είναι σημείο τομής της *f* με τον άξονα των *x*.

$f(-x) = 1-\sqrt[3]{(-x-1)^2} = 1-\sqrt[3]{(x+1)^2}$, δηλ. η *f* δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Ας αναζητήσουμε τις πλάγιες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt[3]{x^2-2x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right) = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-0x\right) = -\infty$$

Ομοίως

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt[3]{x^2-2x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt[3]{(-x)^3\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1-(-x)\sqrt[3]{-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x\sqrt[3]{-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-0x\right) = -\infty.$$

Άρα η *f* δεν έχει ασύμπτωτες.

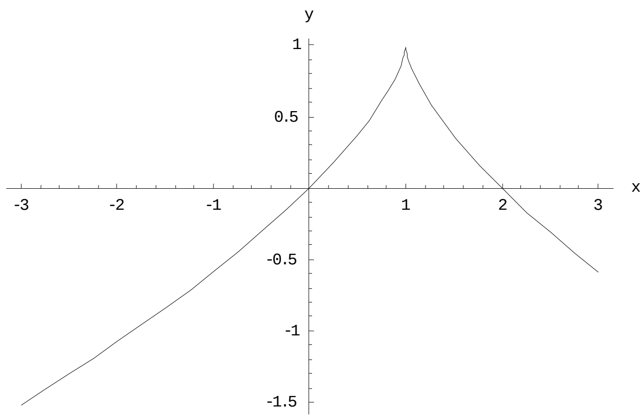
Η *f* είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{1}{3}\left[\left(x-1\right)^2\right]^{1/3-1}\left[\left(x-1\right)^2\right]' = -\frac{2\left(x-1\right)}{3\sqrt[3]{\left(x-1\right)^4}}$, *x*≠1 και $f''(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{\left(x-1\right)^4}}$, *x*≠1.

Προκύπτει έτσι ο πίνακας

| $x$ | -∞ | 1 +∞ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | - |
| $f''(x)$ | + | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ |

Για x=1, η *f* έχει τοπικό μέγιστο το *f*(1)=1, όπως φαίνεται άλλωστε και από τη γραφική της παράσταση.




Β.

i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-x+1}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(\sqrt{x+1}+x-1)}{-x(x-3)}=-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}+x-1}{x}=-\dfrac{4}{3}$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}\overset{L.H.}{=}\lim\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}\left(\sin x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\overset{L.H.}{=}-\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sin^2 x\right)'}{\left(x\cos x\right)'}=$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x+x\left(-\sin x\right)}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=-\frac{0}{1-0}=0$$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x+3)-(x+3)}{x^2+2x-x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x^2-1)}{x(x+2)-(x+2)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)\,\cancel{(x-1)}\,(x+1)}{(x+2)\,\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x+1)}{x+2}=\frac{(1+3)(1+1)}{1+2}=\frac{8}{3}$$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\sin(\dfrac{2}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cdot\dfrac{\sin(\dfrac{2}{x})}{\dfrac{2}{x}}=2$, καθόσον $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\sin\omega}{\omega}=1$.

**Άσκηση 6 (16 μον.)**

Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i) $I_1=\int\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}dx$ (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την αντικατάσταση $e^x+1=u$ )

ii) $I_2=\int\dfrac{3x}{2x^2+5x+2}dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ανάλυση σε μερικά κλάσματα $\dfrac{3x}{2x^2+5x+2}=\dfrac{A}{ax+b}+\dfrac{B}{cx+d}$ )

iii) $\mathrm{I}_3 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την αντικατάσταση: $x = \sin t$ και τις ταυτότητες $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ , $cos 2t = 1-2\sin^2 t$ ).

iv) $\mathrm{I}_4 = \int_0^1 x^3 \ln x dx$ (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

**Λύση:**

i) Θέτουμε $e^x + 1 = u$ . Οπότε $e^x + 1 = u \Rightarrow e^x = u - 1 > 0$ και

$$d\left(e^x+1\right) = du \Rightarrow e^x dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u-1}$$

Επομένως

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \int \frac{(u-1)^2}{u}\frac{du}{u-1} = \int \frac{u-1}{u}du = \int \left(\frac{u}{u} - \frac{1}{u}\right)du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right)du = \int du - \int \frac{1}{u}du =$$

$$= u - \ln|u| + c = e^x + 1 - \ln\left|e^x+1\right| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

ii) Το πολυώνυμο $2x^2+5x+2$ μπορεί να γραφεί ως (2x + 1)(x + 2). Έτσι έχουμε:
$\frac{3x}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow$ 3x = A(x+2)+B(2x+1) $\Rightarrow$ 3x = (A+2B)x + (2A+B) $\Rightarrow$ $A + 2B = 3$ και $2A + B = 0$. Τώρα εύκολα υπολογίζουμε τις τιμές των A και B, που είναι $A =$ -1και $B = 2$ .

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I_2 = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{2x+1}\right)dx = 2\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{2x+1} = 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

iii) Θέτοντας ημ($t$)=$g$($x$)=$x$ βρίσκουμε $g$(0)=0, δηλ. $t$=0 και $g$(1)=1, δηλ. $t$=π/2. Έτσι θα είναι

$$\mathrm{I}_3 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \text{ημ}^2(t)\sqrt{1-\text{ημ}^2(t)}\,\text{συν}(t)dt = \int_0^{\pi/2} \text{ημ}^2(t)\ \text{συν}^2(t)dt = \int_0^{\pi/2} \left(\text{ημ}(t)\ \text{συν}(t)\right)^2 dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\text{ημ}(2t)}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \text{ημ}^2(2t)dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\text{συν}(4t)}{2}dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} dt - \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \text{συν}(4t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\left[\frac{\text{ημ}(4t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\left(\frac{\text{ημ}(2\pi) - \text{ημ}(0)}{4}\right) = \frac{\pi}{16}.$$

iv) Θέτουμε

$$f(t) = \int_t^1 x^3 \ln x dx = \int_t^1 \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_t^1 - \int_t^1 \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}\ln 1 - \frac{t^4}{4}\ln t - \int_t^1 \frac{x^3}{4}dx =$$

$$= -\frac{t^4}{4}\ln t - \left[\frac{x^4}{16}\right]_t^1 = -\frac{t^4}{4}\ln t - \frac{1}{16} + \frac{t^4}{16}.$$

Επομένως, $\mathrm{I}_4 = \lim_{t\to 0^+} f(t) = -\frac{1}{16}$, διότι

$$\lim_{t\to 0^+}\left(t^4 \ln t\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\ln t}{\frac{1}{t^4}}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{4}{t^5}}\right) = \lim_{t\to 0^+}\frac{-t^5}{4t} = 0$$

εφαρμόζοντας τον κανόνα De l’ Hospital.

**Άσκηση 7 (10 μον.)**
Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από το γράφημα της $f(x)=e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)+e^2$, τον άξονα των *x* και τις ευθείες που περνούν από τα σημεία που είναι τοπικά ακρότατα της συνάρτησης και είναι παράλληλες στον άξονα των *y*.

**Λύση:**
Θα βρούμε πρώτα τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης *f*(*x*).
Γνωρίζουμε ότι τα τοπικά ακρότατα είναι στις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$.
Έτσι έχουμε:

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^{-x}(-1)\left(x^2+3x+1\right)+e^{-x}\left(2x+3\right)+e^2(2)' \Rightarrow e^{-x}\left(-x^2-3x-1+2x+3\right)=0 \Rightarrow$$

$$e^{-x}\left(-x^2-x+2\right)=0 \Rightarrow -x^2-x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2(-1)}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases}\frac{1+3}{-2}=-2\\ \frac{1-3}{-2}=1\end{cases}$$

$$f''(x)=e^{-x}(-1)\left(-x^2-x+2\right)+e^{-x}(-2x-1) \Rightarrow$$

$$f''(x)=e^{-x}\left(x^2+x-2\right)+e^{-x}(-2x-1) \Rightarrow$$

$$f''(x)=e^{-x}\left(x^2+x-2-2x-1\right) \Rightarrow$$

$$f''(x)=e^{-x}\left(x^2-x-3\right)$$

Επειδή $f'(x)=0$ για x=-2 και x=1 και

$f''(-2)=e^{-2}(4+2-3)=3e^{-2}=3e^2>0$ και

$f''(1)=e^{-1}(1-1-3)=-3e^{-1}=-3\dfrac{1}{e}<0$

η f θα έχει ελάχιστο στο x=-2 το $f_{\min}=f(-2)=0$ και μέγιστο για x=1 το $f_{\max}=f(1)=e^{-1}(1+3+1)+e^2=5e^{-1}+e^2$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_{-2}^{1} f(x)dx=\int_{-2}^{1}\left[e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)+e^2\right]dx\,.$$

$$\int\left[e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)+e^2\right]dx=$$

$$=\int\left(e^{-x}\right)'\left(x^2+3x+1\right)dx+\int e^2dx=$$

$$=-e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)-\int(2x+3)\left(-e^{-x}\right)dx+\int e^2dx=$$

$$= -e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)+\int(2x+3)e^{-x}dx+\int e^2dx =$$

$$= -e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)+\int(2x+3)\left(-e^{-x}\right)'dx+\int e^2dx =$$

$$= -e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)-\int(2x+3)\left(e^{-x}\right)'dx+\int e^2dx =$$

$$= -e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)-(2x+3)e^{-x}+\int 2e^{-x}dx+\int e^2dx =$$

$$= -e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)-e^{-x}(2x+3)+2\int e^{-x}dx+e^2\int dx =$$

$$= -e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)-e^{-x}(2x+3)+2\left(-e^{-x}\right)+e^2x+c =$$

$$= -e^{-x}\left(x^2+3x+1+2x+3+2\right)+e^2x+c =$$

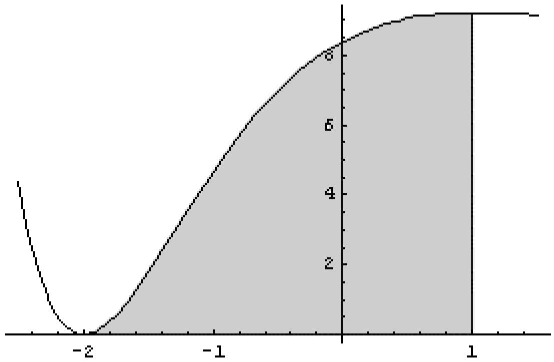
$$= -e^{-x}\left(x^2+5x+6\right)+e^2x+c$$

Άρα:

$$\int_{-2}^{1}\left[e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)+e^2\right]dx=\left[-e^{-x}\left(x^2+5x+6\right)+e^2x\right]_{-2}^{1}=$$

$$=\left[-e^{-1}(1+5+6)+e^2\right]-\left[-e^2(4-10+6)-2e^2\right]=$$

$$=-12e^{-1}+e^2+2e^2=-12e^{-1}+3e^2=-\frac{12}{e}+3e^2=\frac{-12+3e^3}{e}$$




**Άσκηση 8 (10 μον.)**

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} ax & -\pi<x\le 0 \\ \beta x & 0<x<\pi \end{cases}$. Ποια είναι η τιμή της σειράς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

**Λύση**:

Χρησιμοποιώντας τους τύπους 12.18, 12.19, 12.20 σελ. 190 βιβλίο ΕΑΠ τομ. Β, έχουμε:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}axdx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\beta xdx=\frac{1}{2\pi}\left[a\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2\pi}\left[\beta\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}=\frac{\beta-a}{4}\pi$$

Επίσης οι συντελεστές:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\beta x\cos nx\,dx,\quad n=1,2,\ldots$$

Αλλά, κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int x\cos nx\,dx = \int x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx = \frac{x\sin nx}{n} - \int \frac{\sin nx}{n}dx = \frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + c$$

οπότε:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{\beta}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{a-\beta}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

Ανάλογα έχουμε: $\beta_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\sin nx\,dx + \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\beta x\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \dots$

Αλλά πάλι με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int x\sin nx\,dx = \int x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx = -\frac{x\cos nx}{n} - \int \frac{\cos nx}{n}dx = -\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} + c$$

οπότε

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{a}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{\beta}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{a+\beta}{n}(-1)^{n+1}.$$

Άρα η σειρά Fourier της συνάρτησης που μας δίνεται, είναι ίση με:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + \beta_n\sin nx\right) = \frac{\beta-a}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-\beta}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{a+\beta}{n}(-1)^{n+1}\sin nx\right)$$

Στο σημείο x=0 όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής, γιατί:

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\beta x = f(0^+)$$

Άρα η σειρά Fourier της *f* στο σημείο *x* = 0 θα συγκλίνει στο *f*(0), δηλαδή για *x* = 0 έχουμε:

$$f(0) = 0 = \frac{\beta-a}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-\beta}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos 0 + \frac{a+\beta}{n}(-1)^{n+1}\sin 0\right) =$$

$$= \frac{\beta-a}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-\beta}{\pi n^2}(1-(-1)^n)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{a-\beta}{4}\pi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-\beta}{\pi n^2}(1-(-1)^n)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}(1-(-1)^n)\right) = \frac{2}{1^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \cdots = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

---