ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 24 Ιουνίου 2006

Από τα κάτωθι Θέματα καλείσθε να λύσετε το 1ο που περιλαμβάνει ερωτήματα από όλη την ύλη του μαθήματος, ενώ από τα Θέματα 2, 3, 4 και 5 μπορείτε να επιλέξετε **το πολύ τρία**. **Προσοχή: Αν προσπαθήσετε να επιλύσετε και τα τέσσερα Θέματα 2, 3, 4 και 5 πρέπει να μας υποδείξετε ποια τρία από αυτά θέλετε να βαθμολογήσουμε.**

Ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1. (40 μονάδες)

α) (5 μονάδες)

Αν $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ να βρεθούν όλοι οι 2x2 πίνακες πραγματικοί B για τους οποίους ισχύει $AB = BA$. Δοθέντος ότι το σύνολο των πινάκων B αποτελεί υπόχωρο του διανυσματικού χώρου όλων των πραγματικών 2x2 πινάκων, ποια είναι η διάστασή του;

Λύση:

Γράφουμε τον πίνακα B στη μορφή $B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$ και κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε $AB=\begin{bmatrix}z & w\\ x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y & x\\ w & z\end{bmatrix}=BA$, από όπου προκύπτει z = y , x = w. Άρα η γενική μορφή του πίνακα B είναι $B=\begin{bmatrix}x & y\\ y & x\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Αφού λοιπόν παράγεται από δύο γραμμικώς ανεξάρτητους πίνακες, η διάσταση του υπόχωρου των πινάκων B είναι 2.

β) (5 μονάδες)

Δίνεται το σύστημα $\begin{pmatrix}\kappa & 1 & 1\\ 1 & \kappa & 1\\ 1 & 1 & \kappa\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ όπου $\kappa\in\mathbb{R}$. Τι γνωρίζετε για τις λύσεις του αν: (i) κ = 1, (ii) κ = - 2 (iii) $\kappa\in\mathbb{R}-\{1,-2\}$.

Λύση:

(i) Αν κ = 1, υπάρχουν άπειρες λύσεις της μορφής: (x,y,z) = (x,y,1 – x – y)

(ii) Αν κ = - 2 , το σύστημα είναι αδύνατο.

(iii) Αν $\kappa\in\mathbb{R}-\{1,-2\}$ η λύση είναι x = y = z = 1/(κ+2).

γ) (5 μονάδες)

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Εξηγήστε αν ο Α είναι αντιστρέψιμος και αν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Λύση:

Οι ιδιοτιμές του *A* είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος αφού μια από τις ιδιοτιμές του είναι η μηδενική, ενώ είναι διαγωνιοποιήσιμος επειδή οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και διακριτές.

δ) (5 μονάδες)

Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1+3^n}{2^n(n^2+n)}$ συγκλίνει, εξηγώντας αναλυτικά την απάντησή σας.

Λύση:

Γράφοντας $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1+3^n}{2^n(n^2+n)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} + \sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(n^2+n)}$ και χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου $\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, ότι ο πρώτος όρος είναι συγκλίνουσα σειρά με λόγο ρ = ½ < 1, ενώ ο δεύτερος έχει ρ = 3/2 και αποκλίνει. Αφού δε όλοι οι όροι των σειρών είναι θετικοί αυτό σημαίνει ότι και η αρχική σειρά αποκλίνει.

ε) (5 μονάδες)

Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$, με $x \in [0,4]$. Βρείτε όλα τα μέγιστα και ελάχιστα της $f(x)$ στο διάστημα αυτό. Ποιο είναι το πεδίο τιμών της $f(x)$;

Λύση:

Παραγωγίζοντας την *f(x)* παίρνουμε $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-3)(x-1)$, ενώ η δεύτερη παράγωγος δίνει $f''(x) = 6x - 12$. Επομένως στο x = 1 υπάρχει **τοπικό μέγιστο** ενώ στο x = 3 υπάρχει **τοπικό ελάχιστο**. Στο $x \in [0,4]$ όμως, **ολικά ελάχιστα** είναι και το x = 0 και το x = 3, αφού $f(0) = f(3) = 6$, ενώ **ολικά μέγιστα** είναι και το x = 1 και το x = 4, αφού $f(4) = f(1) = 10$. Το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι [6, 10].

στ) (5 μονάδες)

Βρείτε τα αναπτύγματα Taylor μέχρι όρους τάξης x^2 των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - (1+4x)^{1/2}\right)$, $g(x) = e^{-x} - \cos x$, στο x = 0 και δείξτε μέσω αυτών ότι οι συναρτήσεις ταυτίζονται μέχρι την τάξη αυτή .

Λύση:

Ο απλούστερος τρόπος να απαντηθεί το ερώτημα είναι να υπολογισθούν και για τις δύο συναρτήσεις οι τιμές τους, καθώς και οι τιμές των πρώτων και δεύτερων παραγώγων τους στο x = 0 και να δειχθεί ότι είναι ίσες. Έτσι έχουμε, $f(0)=g(0)=0$, $f'(0)=g'(0)=-1$, $f''(0)=g''(0)=2$, οπότε τα εν λόγω αναπτύγματα είναι:

$$f(x)=g(x)=-x+\frac{1}{2!}2x^2+.....=-x+x^2+..$$

ζ) (5 μονάδες)
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\frac{2x-1}{x^2-x-2}dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε, αν χρειάζεται, την ανάλυση σε επί μέρους κλάσματα).

Λύση:

$$\int\frac{2x-1}{x^2-x-2}dx=\ln|x^2-x-2|+C \quad .$$

Άλλος τρόπος: $\int\frac{2x-1}{x^2-x-2}dx=\int\frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}dx=\int\frac{1}{(x-2)}dx+\int\frac{1}{(x+1)}dx=$
$\ln|x-2|+\ln|x+1|+C=\ln|x^2-x-2|+C$

η) (5 μονάδες)
Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί *a, b, c* έτσι ώστε $\frac{d}{dx}[(ax^2+bx+c)e^{-x}]=x^2e^{-x}$ και στην συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$.

Λύση:
Η σχέση $\frac{d}{dx}[(ax^2+bx+c)e^{-x}]=x^2e^{-x}$ ισοδυναμεί με $-(ax^2+bx+c)e^{-x}+(2ax+b)e^{-x}=x^2e^{-x}$
δηλαδή $-ax^2-bx-c+2ax+b=x^2$ και συνεπώς $a=-1,\quad b=2a=-2,\quad c=b=-2$.
Ολοκληρώνοντας την σχέση $\frac{d}{dx}[(ax^2+bx+c)e^{-x}]=x^2e^{-x}$ βρίσκουμε ότι

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=\lim_{l\to\infty}\int_0^l x^2e^{-x}dx=\lim_{l\to\infty}[-(x^2+2x+2)e^{-x}\Big|_0^l]=[\lim_{l\to\infty}-(l^2+2l+2)e^{-l}]-(-2)=2.$$

(Έγινε χρήση του κανόνα l' Hopital για το όριο $\lim_{l\to\infty}-(l^2+2l+2)e^{-l}$).

<u>Θέμα 2.</u> (20 μονάδες)
(α) (8 μον.) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $f(1,1)=(2,3)$, $f(0,1)=(-1,1)$. Να βρεθεί το διάνυσμα $f(x,y)$.
(β) (12 μον.) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, g(x,y,z)=(x+y-z,2x+y,x+z).$$

Βρείτε τον πίνακά της ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του πυρήνα της Kerg και της εικόνας της Img.

Λύση:
(α) Γράφοντας τον πίνακα που αντιστοιχεί στην απεικόνιση ως $\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ και χρησιμοποιώντας τις

δοσμένες πληροφορίες εύκολα βρίσκουμε:

$$a+b=2,\ \ c+d=3,\ \ b=-1,\ \ d=1\ \Rightarrow a=3,\ \ c=2$$

Επομένως ο ζητούμενος πίνακας της απεικόνισης είναι: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ και το διάνυσμα

f(x,y) = (3x – y, 2x +y).

Ο πίνακάς της ως προς την κανονική βάση στο $\mathbb{R}^3$ είναι $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, μία βάση του πυρήνα της Kerg είναι { (- 1, 2, 1) }, επομένως dim Kerg = 1. Επειδή τα διανύσματα (1, 2, 1), (1, 1, 0), (-1, 0,1) είναι γραμμικώς εξαρτημένα, μια βάση της εικόνας της είναι {(1, 2, 1), (1, 1, 0)} και dim Img = 2.

<u>Θέμα 3. </u>(20 μονάδες)

(α) (8 μον.) Να υπολογισθούν τα όρια: (i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{\ln x}-\dfrac{3}{x-1}\right)$ (ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)$

Λύση:

(i)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{\ln x}-\frac{3}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)-3\ln x}{(x-1)\ln x}\underset{l'Hopital}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3-3/x}{\ln x+1-1/x}=\underset{l'Hopital}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3/x^2}{1/x+1/x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3}{x+1}=\frac{3}{2}$$

(ii)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}-x)(\sqrt{x^2+2x+3}+x)}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=1$$

(β) (6 μον.) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές: (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}$

Λύση:

(i) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ρίζας έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$, άρα η σειρά συγκλίνει. Άλλος τρόπος είναι με το κριτήριο σύγκρισης: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}<\infty$

(ii) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}/(n+1)^2}{2^n/n^2}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=2>1$$, άρα η σειρά αποκλίνει.

(γ) (6 μον.) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^n$;

Λύση:

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου (ή της ρίζας) έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει για:

(i) x ≥ 0 : $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|<1 \Rightarrow 0<x<1/2: 1-2x<x+1 \Rightarrow x>0$, οπότε συγκλίνει για όλα τα $0<x\le 1/2$. Επίσης για $x>1/2$, έχουμε σύγκλιση όταν $2x-1<x+1 \Rightarrow x<2$. Άρα γενικά η σειρά συγκλίνει για 0 < x < 2. Στις περιπτώσεις x = 0, 2 η σειρά αποκλίνει.

(ii) x < 0 : $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|<1 \Rightarrow \begin{cases} -1<x<0: 1-2x<x+1 \Rightarrow x>0 \\ x<-1 \;:\; 2x-1>x+1 \Rightarrow x>2 \end{cases}$, και στις δύο περιπτώσεις όμως καταλήγουμε σε αποτέλεσμα ασυμβίβαστο με το x < 0. Άρα η σειρά αποκλίνει για όλα τα x < 0, ενώ για x = -1 η σειρά δεν ορίζεται. Συμπερασματικά, η σειρά συγκλίνει μόνο για 0 < x < 2.

<u>Θέμα 4.</u> (20 μονάδες)

(α) (10 μον.) Να γίνει η πλήρης γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}$, για όλα τα $x\in\mathbb{R}$. Υπόδειξη: Βρείτε τα ακρότατα, την συμπεριφορά της *f(x)* καθώς $x\to\pm\infty$ και το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

Λύση:

Υπολογίζοντας την παράγωγο της συνάρτησης $f'(x)=\frac{-4x^2-4x}{(2x^2+2x+1)^2}=-4\frac{x(x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}=0$,

βρίσκουμε ότι αυτή μηδενίζεται στα σημεία x = 0 , -1. Η συνάρτηση μηδενίζεται στο x = -1/2 , στο x = 0 έχει τοπικό μέγιστο , αφού για $x>0,\quad f'(x)<0$ και στο x = -1 έχει τοπικό ελάχιστο αφού για –1 <x < 0 , $f'(x)>0$, ενώ για $x<-1,\quad f'(x)<0$. Παίρνοντας τα όρια για x→∞ και x → - ∞ $\lim_{x\to\infty} f(x)=0^+,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0^-$, βλέπουμε ότι αυτή μηδενίζεται με θετικές τιμές και αρνητικές αντιστοίχως. Άρα τα τοπικά ακρότατα είναι και ολικά και το πεδίο τιμών της f(x) είναι το [-1, 1].

(β) (10 μον.) Να βρεθεί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το μεγαλύτερο εμβαδόν που μπορεί να εγγραφεί σε ένα ημικύκλιο ακτίνας 1, έτσι ώστε οι δύο γωνίες του να βρίσκονται πάνω στην διάμετρο του κύκλου.

Λύση:

Αν το μήκος της κάτω πλευράς του παραλληλογράμμου είναι 2x και το ύψος του είναι y το εμβαδόν του είναι E = 2xy. Επειδή δε είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο ακτίνας 1, ισχύει η σχέση $x^2+y^2=1$. Επομένως, παραγωγίζοντας την συνάρτηση του εμβαδού ως προς x έχουμε:

$$\frac{dE}{dx}=2y+2x\frac{dy}{dx}=2\sqrt{1-x^2}+2x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

από όπου προκύπτει ότι $x = 1/\sqrt{2}$. Επομένως οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι βάση 2x = $\sqrt{2}$ και ύψος y = 1/$\sqrt{2}$.

<u>Θέμα 5.</u> (20 μονάδες)

(α) (12 μον.) Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής που ευρίσκεται μεταξύ της παραβολής $y = \frac{9x^2}{2}$ και της συνάρτησης $y = \cos(\pi x)$. Αν χωρίζαμε την περιοχή σε δύο μικρότερες μέσω της ευθείας $y = \frac{1}{2}$, ποια από αυτές θα είχε μεγαλύτερο εμβαδόν; Υπόδειξη: $\cos(\pm\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2.$

Λύση:

Το ζητούμενο εμβαδόν βρίσκεται από το ολοκλήρωμα:

$$E = \int_{-1/3}^{1/3}\left(\cos(\pi x) - \frac{9x^2}{2}\right)dx = 2\int_{0}^{1/3}\left(\cos(\pi x) - \frac{9x^2}{2}\right)dx = 2\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\Bigg|_0^{1/3} - \frac{9x^3}{3}\Bigg|_0^{1/3} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{9}$$

Το μέρος της περιοχής άνω της ευθείας y = ½ είναι

$$E_{\alpha\nu\omega} = \int_{-1/3}^{1/3}\left(\cos(\pi x) - \frac{1}{2}\right)dx = 2\int_{0}^{1/3}\left(\cos(\pi x) - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3}$$

και της περιοχής κάτω της ευθείας y = ½ είναι:

$$E_{\kappa\alpha\tau\omega} = \int_{-1/3}^{1/3}\left(\frac{1}{2} - \frac{9x^2}{2}\right)dx = 2\int_{0}^{1/3}\left(\frac{1}{2} - \frac{9x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Από αυτά προκύπτει $E_{\alpha\nu\omega} = 0.218$, και $E_{\kappa\alpha\tau\omega} = 0.222$ άρα $E_{\alpha\nu\omega} < E_{\kappa\alpha\tau\omega}$.

(β) (8 μον.) (β) (8 μον.) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση, υπολογίστε τα ολοκληρώματα $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx$ για n = 0,1,2,3,…., τα οποία χρησιμοποιούνται στο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της περιοδικής με περίοδο 2π συνάρτησης f που ορίζεται στο διάστημα $-\pi \le x \le \pi$ ως $f(x) = |x|$. Παρατηρώντας ότι η συνάρτηση *f(x)* είναι άρτια να γραφεί η σειρά Fourier για τη συνάρτηση αυτή χρησιμοποιώντας τα a_n που βρήκατε.

Λύση:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$ για n = 1,2,3,….

και $a_0 = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$. Η σειρά Fourier είναι:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx.$$

------------------------------ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !--------------------------------