ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 15 Οκτωβρίου 2006

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 10 Νοεμβρίου 2006.

Οι Ασκήσεις **1-8** της πρώτης εργασίας (με άθροισμα **110** μονάδων) αναφέρονται στα:
Κεφάλαιο 1 (Πίνακες, Ορίζουσες, Γραμμικά Συστήματα)
Κεφάλαιο 2 (Διανυσματικοί Χώροι)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.
Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:
Εναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό:

Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα, Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα,
Κεφ4 Ορίζουσες, Κεφ5 Οι χώροιR^n , Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι και
Κεφ7 Βάση και Διάσταση

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό**Υ**λικό:

Πίνακες, Οι Χώροι R^n, Διανυσματικοί Χώροι.

Πρίν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό. Εχει δοθεί έμφαση στους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών πινάκων και την αντίστοιχη **αλγοριθμική** μέθοδο απαλοιφής Gauss με την οποία επιλύονται γραμμικά συστήματα και προβλήματα της Γραμμικής Αλγεβρας που ανάγονται σε αυτά.
Η άσκηση 8 αποτελεί εφαρμογή των δυνάμεων πίνακα σε ένα πρόβλημα γραφημάτων (ή γράφων) και δείχνει την αναγκαιότητα χρήσης προγράμματος υπολογιστή για την επίλυσή του. Ολες οι αναγκαίες υποδείξεις όπως και αντίστοιχο παράδειγμα δίνονται αναλυτικά.

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΕΙΝΑΙ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΑΝΑΦΕΡΟΝΤΑΙ ΣΧΟΛΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥΣ.

1. (***20 μονάδες***)

α) (***10 μονάδες***) Δίνονται οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν, εφ' όσον έχουν νόημα, οι παρακάτω πίνακες

$$A+B, A+D, A\times C^{-1}, C\times A, D^T\times C^T$$

β) (***2 μονάδες***) Δίνεται η εξίσωση $XA - XBR^{-1}B^T X + Q + A^T X = 0$ ως προς τον άγνωστο $n\times n$ πίνακα *X,* όπου οι $A\in M_{nn}(\mathbb{R})$, $B\in M_{nm}(\mathbb{R})$, $R\in M_{mm}(\mathbb{R})$, $Q\in M_{nn}(\mathbb{R})$ θεωρούνται γνωστοί πίνακες με *R* αντιστρέψιμο συμμετρικό *και* Q συμμετρικό πίνακα. Δείξτε ότι αν ο $X\in M_{nn}(\mathbb{R})$ είναι λύση της εξίσωσης τότε και ο X^T θα είναι λύση αυτής.(**Υπόδειξη.** Θεωρείστε τον ανάστροφο των δύο μελών της εξίσωσης και ιδιότητες του αναστρόφου).

γ) (***8 μονάδες***) Αν $A=\begin{pmatrix}\lambda & a & c\\ 0 & \lambda & b\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, να υπολογίσετε τον A^n, για κάθε φυσικό αριθμό *n*. (**βλ.** Λυμένη Άσκηση 4, σελ. 17, Κεφ3 ΕΔΥ Γραμμικά Συστήματα και Πίνακες).

ΛΥΣΗ 1α)

A + *B* δεν έχει νόημα.

$$A + D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 2-1 & 3+2\\ 2+2 & 3+3 & 1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 4 & 6 & 0\end{bmatrix}.$$

$A\times C^{-1}$ δεν έχει νόημα επειδή αν και ο *C* είναι αντιστρεψιμος ο Α ειναι 2×3 ενώ ο C^{-1} 2×2.

$$C\times A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ 4 & 7 & 7\end{bmatrix}.$$

$$D^T\times C^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -4 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}.$$

ΛΥΣΗ 1β)

Εστω $X\in M_{nn}(\mathbb{R})$ λύση της εξίσωσης. Από την ισότητα $XA - XBR^{-1}B^T X + Q + A^T X = 0$, έχουμε ότι και $\left(XA - XBR^{-1}B^T X + Q + A^T X\right)^T = 0^T$ δηλαδή $\left(XA - XBR^{-1}B^T X + Q + A^T X\right)^T = 0$.

Αλλά από τις ιδιότητες του αναστρόφου έχουμε

$$\left(XA - XBR^{-1}B^T X + Q + A^T X\right)^T = (XA)^T - \left(XBR^{-1}B^T X\right)^T + Q^T + \left(A^T X\right)^T =$$
$$A^T X^T - X^T\left(B^T\right)^T\left(R^{-1}\right)^T B^T X^T + Q^T + X^T\left(A^T\right)^T = A^T X^T - X^T B\left(R^T\right)^{-1} B^T X^T + Q + X^T A =$$
$$X^T A - X^T BR^{-1}B^T X^T + Q + A^T X^T.$$

Οπότε η σχέση $\left(XA - XBR^{-1}B^T X + Q + A^T X\right)^T = 0$ γράφεται $X^T A - X^T BR^{-1}B^T X^T + Q + A^T X^T = 0$

Που σημαίνει ότι X^T είναι λύση της αρχικής εξίσωσης.

ΛΥΣΗ 1γ)

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & a & c\\ 0 & \lambda & b\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda I+N, \text{ με } I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

και $N=\begin{pmatrix}0 & a & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Επειδή οι πίνακες λI και N μετατίθενται δηλ. $(\lambda I)N=N(\lambda I)=\lambda N$, έχουμε ότι

$A^n=(\lambda I+N)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda I)^{n-k}N^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k$. Για τις δυνάμεις του πίνακα N εχουμε

$$N^2=\begin{pmatrix}0 & a & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & ab\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, N^3=N^2N=\begin{pmatrix}0 & 0 & ab\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

και συνεπώς $N^k=0$ για $k>2$.

Αρα $A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k=\binom{n}{0}\lambda^n I+\binom{n}{1}\lambda^{n-1}N+\binom{n}{2}\lambda^{n-2}N^2=$

(καθώς $\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{1}=n,\ \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$)=

$$=\lambda^n I+n\lambda^{n-1}N+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}N^2=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}a & n\lambda^{n-1}c+\lambda^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}ab\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}b\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$$

Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πίνακα - Επίλυση γραμμικών συστημάτων

2. (***15 μονάδες***) Για **κάθε** πραγματική τιμή της παραμέτρου a:

α) (*10 μονάδες*) να υπολογιστεί η **ανηγμένη** κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 1 & a\\ 4 & -2 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

και στην συνέχεια ως εφαρμογή

β) (*5 μονάδες*) να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x-\ \ y+z+w&=1\\ 3x-\ \ y-z+w&=a\\ 4x-2y+\ \ 2w&=3\end{aligned}$$

(βλ. π.χ. Παράδειγμα 3 , Παρ. 1.4 στο βιβλίο του ΕΑΠ).

ΛΥΣΗ 2α)

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1&1\\3&-1&-1&1&a\\4&-2&0&2&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&1&1\\0&2&-4&-2&a-3\\0&2&-4&-2&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&1&1\\0&1&-2&-1&\frac{a-3}{2}\\0&2&-4&-2&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&1&1\\0&1&-2&-1&\frac{a-3}{2}\\0&0&0&0&2-a\end{pmatrix}$$

1^{η} περιπτωση) Αν 2- a =0 δηλαδή $\boxed{a=2}$ τότε συνεχίζουμε ως εξής:

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&1&1\\0&1&-2&-1&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0&\frac{1}{2}\\0&1&-2&-1&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2^{η} περιπτωση) Αν 2- a $\neq$0 δηλ. $\boxed{a\neq 2}$ τότε συνεχίζουμε ως εξής

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&1&1\\0&1&-2&-1&\frac{a-3}{2}\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ 2β)

Επειδή ο πίνακας A του προηγούμενου ερωτήματος είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστηματος

$$\begin{aligned}x-\ \ y+z+w&=1\\3x-\ \ y-z+w&=a\\4x-2y+\ \ \ 2w&=3\end{aligned}$$

η διερευνηση για το συστημα έχει ως εξής:

1^{η} περιπτωση) Αν $\boxed{a=2}$ τότε $A\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}\boxed{1}&0&-1&0&\frac{1}{2}\\0&\boxed{1}&-2&-1&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$. Αρα θεωρούμε τις τιμές των z, w αυθαίρετες ισες προς κ, λ αντίστοιχα και λύνουμε ως προς x, y : x = ½+κ, y = - ½ +2κ+ λ.

Δηλαδή το συνολο των λύσεων είναι $\{(x, y, z, w)= (½, - ½ ,0,0)+ κ (1, 2,1,0) +λ (0,1,0,1), κ, λ\in \mathbb{R} \}$.

2^{η} περιπτωση) Αν $\boxed{a\neq 2}$ τότε $A\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$ οπότε το συστημα είναι αδύνατο καθώς οι τάξεις (rank) του πίνακα συντελεστών και του επαυξημένου είναι διαφορετικές.

Υπολογισμός Ορίζουσας με μέθοδο Laplace ή και με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών/στηλών

3.

3. (*13 μονάδες*)

α) (*7 μονάδες*) Να υπολογισθούν οι ορίζουσες των παρακάτω πινάκων :

$T_1=[2], T_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}, T_3=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}, T_4=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}$. Σε τι συμπέρασμα οδηγείστε για την ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα $T_n=\begin{pmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{pmatrix}$ και πώς υπολογίζεται αυτή;

Υπόδειξη. Να χρησιμοποιήσετε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών/γραμμών. **(Βλ.** π.χ. Λυμένη Άσκηση 12 από το Κεφ4 ΕΔΥ Ορίζουσες).

β) (***6 μονάδες*****)** Αν d_n ισούται προς την ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα

$$D_n=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

(δηλ. $a_{ii}=\alpha$ για $i=1,\ldots,n$, $a_{i+1\,i}=\beta$, $a_{i\,i+1}=\beta$ για $i=1,\ldots,n-1$ και όλα τα άλλα στοιχεία 0) να δειχθεί ότι $d_n=\alpha\,d_{n-1}-\beta^2 d_{n-2}$, *για* $n\geq 3$. (**Υπόδειξη:** Αναπτύξτε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή**. Βλ.** Λυμένη Άσκηση 13 από το Κεφ4 ΕΔΥ Ορίζουσες).

ΛΥΣΗ 3α)

Προσθέτουμε όλες τις γραμμές στην τελευταία γραμμή

$$|T_n|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}=(n+1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Αφαιρούμε την τελευταία γραμμή από κάθε άλλη γραμμή

$$=(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=(n+1)$$

Αφαιρούμε την τελευταία στήλη από κάθε άλλη στήλη

(Είναι δυνατόν επίσης να δειχθεί ο αναδρομικός τυπος $|T_n|=2|T_{n-1}|-|T_{n-2}|,\quad n\geq 3$ και στην συνεχεια ότι $|T_n|=n+1,\quad n\geq 1$).

ΛΥΣΗ 3β)

Ανάπτυγμα κατά την πρώτη γραμμή

$$|D_n|=\underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_{n\times n}=\alpha\underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}-\beta\underbrace{\begin{vmatrix} \beta & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}==\alpha|D_{n-1}|-\beta^2\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)}=\alpha|D_{n-1}|-\beta^2|D_{n-2}|$$

Ανάπτυγμα κατά την πρώτη στήλη

Αντίστροφος πίνακα με μέθοδο προσαρτημένου ή μέθοδο Gauss– Λύση γραμμικού συστήματος

4. **(*****15 μονάδες*****)** Έστω ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ όπου $a\in\mathbb{R}$.

α) (***5 μονάδες*****)** Να βρεθούν οι τιμές του *a* για τις οποίες ο *A* είναι αντιστρέψιμος και για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί ο A^{-1}, με χρήση της ορίζουσας και του προσαρτημένου πίνακα του *A* (**βλ.** Παράδειγμα σελ 10, Λυμενη Ασκηση 10 από το Κεφ4 ΕΔΥ Ορίζουσες).

β) (***5 μονάδες*****) Να** βρεθούν οι τιμές του *a* για τις οποίες ο *A* είναι αντιστρέψιμος και για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί ο A^{-1} με την μέθοδο απαλοιφής Gauss (βλ. ΣΕΥ Πίνακες σελίδα 43, ή Παράδειγμα 6 στην Ενότητα 1.4 του βιβλίου του ΕΑΠ).

γ) (*5 μονάδες*) Εφαρμόστε τις δύο μεθόδους **α), β)** στην διερεύνηση και λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2x + 2y + 6z &= 2 \\ 3x + y + az &= 3 \end{aligned}$$

(Υπενθυμίζεται ότι: η λύση του συστήματος $AX = b$, με A τετραγωνικό πίνακα, είναι $X = A^{-1}b$ εάν ο A είναι αντιστρέψιμος. Σε διαφορετική περίπτωση κάνουμε διερεύνηση για το αν το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση).

ΛΥΣΗ 4α) Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να υπάρχει ο αντίστροφος του A είναι $\det(A) \neq 0$.
Υπολογίζουμε την ορίζουσα του A (π.χ. αναπτυσσοντας ως προς την πρωτη γραμμή) και βρίσκουμε $\det(A)=2(a-5)$.
Αρα ο Α αντιστρέφεται όταν και μόνο $a \neq 5$ και τότε ο αντίστροφος ισούται προς $A^{-1} = (\det A)^{-1}\ adj(A)$, με $adj(A)$ να υπολογίζεται με τα αλγεβρικά συμπληρώματα $A_{ij} = (-1)^{ij} D_{ij}$,
όπου D_{ij} η ελάσσων ορίζουσα που αντιστοιχεί στο στοιχείο a_{ij}: $A_{11}=2a-6$, $A_{12}=18-2a$, $A_{13}=-4$, $A_{21}=1$, $A_{22}=a-3$
$A_{23}=-1$, $A_{31}=-2$, $A_{32}=-4$, $A_{33}=2$.

$$adj(A)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-6 & 1 & -2 \\ 18-2a & a-3 & -4 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ οπότε } A^{-1} = \frac{1}{2(a-5)}\begin{pmatrix} 2a-6 & 1 & -2 \\ 18-2a & a-3 & -4 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon} & \frac{1}{2\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon} & \frac{\varepsilon+2}{2\varepsilon} & -\frac{2}{\varepsilon} \\ \frac{-2}{\varepsilon} & \frac{-1}{2\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \text{ όπου θεσαμε } \varepsilon = a-5 .$$

ΛΥΣΗ 4β) Θεωρούμε τον πίνακα Α επαυξημένο με τον ταυτοτικό πίνακα και με πράξεις στις γραμμές έχουμε:

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & a-5 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$1^{η}$) αν $a-5 \neq 0$ τότε, θέτοντας (για ευκολία) $\boxed{a-5 = \varepsilon}$, με $\boxed{\varepsilon \neq 0}$, συνεχίζουμε ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{\varepsilon} & \frac{-1}{2\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon} & \frac{1}{2\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon} & \frac{\varepsilon+2}{2\varepsilon} & -\frac{2}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{\varepsilon} & \frac{-1}{2\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right) = \left(I \mid A^{-1}\right)$$

$$\text{δηλαδή} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon} & \frac{1}{2\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon} & \frac{\varepsilon+2}{2\varepsilon} & -\frac{2}{\varepsilon} \\ \frac{-2}{\varepsilon} & \frac{-1}{2\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

2^{η}) αν a-5 = 0, δηλ. a=5, τότε ο πίνακας στο αριστερό μέρος του πίνακα $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$

είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και επειδή δεν είναι ο *I,* έπεται ότι ο Α δεν αντιστρέφεται για a=5.

ΛΥΣΗ 4γ) Λύση του συστήματος $\begin{array}{l} x + \quad\;\; z = 1 \\ 2x + 2y + 6z = 2 \\ 3x + \;\; y + az = 3 \end{array}$.

Εχοντας ακολουθήσει την **μέθοδο α)** έχουμε ότι:

Αν *a-5* ≠0 τότε το συστημα έχει μοναδική λύση την (x y z) ^{T} $= A^{-1}b$ όπου b η στήλη (1 2 3)^{T} . Δηλαδή υπολογίζοντας

$$\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon+2}{\varepsilon} & \frac{1}{2\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon} & \frac{\varepsilon+2}{2\varepsilon} & -\frac{2}{\varepsilon} \\ \frac{-2}{\varepsilon} & \frac{-1}{2\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ έχουμε ότι η μοναδική λύση είναι (x, y, z)= (1, 0, 0).

Αν *a-5* =0 τότε σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα, για *a=5* και με πράξεις στις γραμμές θα βρούμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του (βλ. δευτερη περίπτωση παρακάτω).

Εχοντας ακολουθήσει την **μέθοδο β)** έχουμε ότι

- αν *a-5* ≠0 τότε το συστημα έχει μοναδική λύση (x, y, z)= (1, 0, 0) την οποία βρίσκουμε πολλαπλασιάζοντας τον αντίστροφο του *A* με *b* =(1 2 3)^{T} (όπως πριν).
- αν *a-5* =0 τότε σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα (A| b) και εκτελούμε πράξεις στις γραμμές για να βρούμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του. **Ομως στην περίπτωση της β) μεθόδου έχουμε το πλεονέκτημα ότι γνωρίζουμε μέρος της διαδικασίας για την κλιμακωτή μορφή :**

Συγκεκριμενα εχουμε βρεί ότι $(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$

Οπότε αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την στήλη b =(1 2 3)^{T} με τον πίνακα στο δεξί μέρος του επαυξημένου $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ για να βρούμε ότι και (A| b) = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Ετσι από τον τελευταίο πίνακα διαβάζουμε το συνολο λύσεων του συστήματος στην περίπτωση a=5:

x=1-λ, y= -2λ, z= λ, οπου λ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός ή $\boxed{(x, y, z) = (1,0,0) + \lambda(-1,-2,1).}$

Διανυσματικοί Χώροι-Υπόχωροι – Βάση – Διάσταση – Συμπληρωματικός υπόχωρος

5. (***15 μονάδες***) Δίδονται τα παρακάτω υποσύνολα αντίστοιχων διανυσματικών χώρων:

$$U = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ x = 2z, 2y = z^2, x, y, z, w \in \mathbb{R}\} \subset M_{22}(\mathbb{R})$$

$$V = \{(a+b, a-b, b), a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$W = \{ax^2 + 1, a \in \mathbb{R}\} \subset P_2[x]$$

Για κάθε περίπτωση να εξετάσετε αν το υποσύνολο είναι υπόχωρος και, αν είναι, να βρείτε
α) μια βάση του και
β) δυο διαφορετικα συμπληρώματα αυτού.

(**Βλ**. Λυμένη Άσκηση 11 από το Κεφ7 ΕΔΥ Βάση και Διάσταση).

ΛΥΣΗ 5)

$$U = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ x = 2z, 2y = z^2, x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 2z & z^2/2 \\ z & w \end{pmatrix}, z, w \in \mathbb{R}\}$$

Θα εξετάσουμε αν ισχύει ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in U$, $\lambda\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in U$.

Όμως $\lambda\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2z & z^2/2 \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda z & \lambda z^2/2 \\ \lambda z & \lambda w \end{pmatrix}$ και για να ανήκει το στοιχειο αυτό στο U πρέπει $(\lambda z)^2 = \lambda z^2$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$. Όμως αυτό δεν ισχύει (π.χ. λ =2 και z =1), άρα ο U δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M_{22}(\mathbb{R})$. $V = \{(a+b, a-b, b), a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

Επειδή $(a+b, a-b, b) = a(1,1,0) + b(1,-1,1)$

το συνολο V είναι το συνολο ολων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων v_1 =(1,1,0) και v_2 = (1,-1,1) του τρισδιάστατου χώρου άρα είναι διανυσματικός υποχωρος. Καθως τα παραπάνω διανύσματα παραγουν τον V και είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού δεν είναι συγγραμμικά, αποτελούν βάση του.

Ενας υποχωρος του $\mathbb{R}^3$, M, λεγεται συμπληρωμα ή συμπληρωματικός υπόχωρος του V ως προς τον χώρο $\mathbb{R}^3$, αν $\mathbb{R}^3 = V \oplus M$, δηλαδή $\mathbb{R}^3 = V + M$ και $V \cap M = \{0\}$ οπότε και θα ισχύει ότι $\dim V + \dim M = 3$ και συνεπώς $\dim M = 3-2 = 1$. Αρκεί λοιπόν να προσδιορίσουμε ένα διανυσμα που παράγει τον M. Το διάνυσμα $v = (x,y,z)$ παράγει τον M αν και μονο αν μία βαση του V συπληρωμένη με το v αποτελεί βάση όλου του πραγματικού τρισδιάστατου χώρου $\mathbb{R}^3$.

Το τελευταίο όμως μπορεί να ελεγχθεί από την τάξη του πίνακα με στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων
v_1 =(1,1,0) , v_2 = (1,-1,1) και $v = (x,y,z)$:

Με πράξεις στις γραμμές του πίνακα αυτού

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y-x \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & -2 & y-x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & y-x-2z \end{pmatrix}$$

εχουμε οτι το $v = (x,y,z)$ παράγει ένα συμπληρωματικό υπόχωρο του V όταν και μόνον όταν $y - x + 2z \neq 0$.

Μπορουμε λοιπόν να επιλέξουμε x=1, y=2, $z\neq 1/2$ π.χ. z =1 και τότε ο υποχωρος που παράγεται από το διάνυσμα (1,2,1) είναι συμπληρωματικός του V όπως και αυτός που παράγεται από το διάνυσμα (1,2,-1). Προφανώς οι τελευταιοι δυο υπόχωροι είναι διαφορετικοί καθώς τα διανυσματα (1,2,1) και (1,2,-1) δεν είναι συγγραμμικά.

Σημειωση:Με την παραπάνω λύση ουσιαστικά βρίσκουμε όλα τα συμπληρώματα του V ως προς τον χώρο $\mathbb{R}^3$. Θα μπορουσαμε να εξετασουμε και μεμονωμενες περιπτωσεις για παραδειγμα να επισυναψουμε στα (1,2,1) και (1,2,-1) ένα από τα στοιχεια της συνηθους βασης $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ και να εξετασουμε αν αποκτουμε βαση του χωρου.

Ο W δεν είναι γραμμικός υποχωρος του $P_2[x]$ καθώς δεν περιέχει το μηδενικό πολυώνυμο.

6. (***12 μονάδες***) Θεωρούμε τα σύνολα W_1 και W_2 :

$$W_1=\{(x-y,2x+y+2z,-2x+z,-x+y+4z),x,y,z\in\mathbb{R}\}$$
$$W_2=\{(6x-y,5x-8y,-5x+3y,-2x+3z),x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

α) (*3 μονάδες*) Δείξτε ότι W_1 και W_2 είναι υπόχωροι του χώρου $\mathbb{R}^4$.
β) (*9 μονάδες*) Βρείτε τις διαστάσεις και βάσεις των W_1 ,W_2, W_1+W_2 και $W_1\cap W_2$. (**Βλ**. Λυμένη Άσκηση 12 από το Κεφ7 Βάση και Διάσταση).

ΛΥΣΗ 6.

α) Επειδή $(x-y,2x+y+2z,-2x+z,-x+y+4z)$ = x (1,2,-2,-1) + y (-1,1,0,1) + z (0,2,1,4) το σύνολο W_1 είναι υπόχωρος αφού είναι το σύνολο ολων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων α_1=(1,2,-2,-1), β_1=(-1,1,0,1), γ_1 =(0,2,1,4), δηλ. το W_1 είναι ο υποχωρος που παράγεται από τα διανύσματα α_1, β_1, γ_1.

Παρόμοια επειδή $(6x-y,5x-8y,-5x+3y,-2x+3z)$ = x (6, 5,-5,-2) + y (-1,-8,3,0) + z (0,0,0,3) το W_2 είναι ο υποχωρος που παράγεται από τα α_2= (6, 5,-5,-2), β_2=(-1,-8,3,0), γ_2 = (0,0,0,3).

β) Ο χώρος $W_1 + W_2$ παράγεται από το σύνολο των διανυσμάτων α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2

Για να βρούμε βασεις για κάθε ένα από τους W_1 ,W_2, W_1+W_2 , καθώς γνωριζουμε ηδη ένα πεπερασμενο συνολο γεννητορων για τον καθενα, μπορουμε να ακολουθησουμε δυο αλγορίθμους (σελ. 112 βιβλιου). Ο πρωτος χρησιμοποιει πινακα με γραμμες τα διανυσματα των γεννητορων κάθε υποχωρου.
.
Ενας τρόπος που στηρίζεται στον δευτερο αλγόριθμο ευρεσης βάσης ενός υποχωρου συνδυάζει τις απαντήσεις και στα τεσσερα ερωτηματα του **β**) είναι ο εξής
Σχηματίζουμε τον πίνακα Π με στήλες τις συντεταγμένες των α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 (ως προς την συνήθη βάση) και με πράξεις στις γραμμες,

$$\Pi=\begin{pmatrix}1&-1&0&6&-1&0\\2&1&2&5&-8&0\\-2&0&1&-5&3&0\\-1&1&4&-2&0&3\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0&3&0&45/29\\0&\boxed{1}&0&-3&0&24/29\\0&0&\boxed{1}&1&0&27/29\\0&0&0&0&\boxed{1}&21/29\end{pmatrix}=\Pi'$$

βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του, Π΄.

Από τον τελευταίο πίνακα Π΄ είναι φανερό ότι:

1^o . Το σύνολο διανυσμάτων που αντιστοιχεί στις στήλες $1^η$, $2^η$, $3^η$ και $5^η$ είναι ένα από τα μεγαλύτερα γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα στηλών του πίνακα Π΄. Αρα τα διανύσματα $α_1$, $β_1$, $γ_1$, $β_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν (γεννούν) τον χώρο $W_1 + W_2$ άρα μια βάση του $W_1 + W_2$ είναι η $\{ α_1, β_1, γ_1, β_2 \}$ και συνεπώς $\dim (W_1 + W_2)= 4$.

2^o . Το σύνολο διανυσμάτων που αντιστοιχεί στις στήλες $1^η$, $2^η$ και $3^η$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Αρα τα διανύσματα $α_1$, $β_1$, $γ_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν (γεννούν) τον χώρο W_1, άρα μια βάση του W_1 είναι η $\{ α_1, β_1, γ_1\}$ και συνεπώς η διάσταση του W_1 ισούται προς 3 ($\dim W_1=3$)

3^o . Το σύνολο που απαρτίζεται από τις στήλες $4^η$, $5^η$ και $6^η$, καθως με επιπλέον πράξεις στις γραμμες του αντιστοιχου τμηματος (block) του πίνακα Π΄ γινεται

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 45/29 \\ -3 & 0 & 24/29 \\ 1 & 0 & 27/29 \\ 0 & 1 & 21/29 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

,είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Αρα τα διανύσματα $α_2$, $β_2$, $γ_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα μια βάση του W_2 είναι η $\{ α_2, β_2, γ_2\}$ και συνεπώς $\dim W_2=3$.

Απο την σχέση για την διάσταση του αθροίσματος υποχώρων έχουμε ότι $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)=3+3-4=2$. Για να βρούμε μία βάση της τομής $W_1 \cap W_2$ εργαζόμαστε ως εξης:

Ένα τυχόν διάνυσμα v ανήκει στην τομή $W_1 \cap W_2$ αν και μονο αν υπαρχουν πραγματικοί αριθμοί $κ_1$, $λ_1$, $μ_1$, $κ_2$, $λ_2$, $μ_2$ ετσι ώστε $κ_1 α_1+ λ_1β_1+ μ_1γ_1 = κ_2 α_2 +λ_2 β_2 +μ_2γ_2$ ή ισοδυναμα $κ_1 α_1+ λ_1β_1+ μ_1γ_1 +(- κ_2) α_2 +(-λ_2) β_2 +(-μ_2) γ_2 = 0$. Η τελευταια εξισωση αντιστοιχεί σε ομογενές συστημα γραμμικών εξισώσεων με πίνακα συντελεστών τον Π ως προς τους αγνώστους $κ_1$, $λ_1$, $μ_1$, $-κ_2$, $-λ_2$, $-μ_2$.

Αρα έχοντας ηδη την ανηγμενη κλιμακωτη μορφή του Π, Π΄= $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 0 & 45/29 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 0 & 24/29 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 27/29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 21/29 \end{pmatrix}$ μπορουμε αμεσα να δώσουμε την γενική λυση του αντιστοιχου ομογενους συστήματος :

$κ_1 =3 κ_2 + (45/49) μ_2$, $λ_1= -3 κ_2 + (24/49) μ_2$, $μ_1 = κ_2 + (27/49) μ_2$, $λ_2 = -(21/29) μ_2$ με $κ_2$, $μ_2$ αυθαίρετα.

Ετσι η τομή $W_1 \cap W_2$ αποτελείται από τα διανυσματα $κ_2 α_2 +λ_2 β_2 +μ_2γ_2 = κ_2 α_2 - (21/29) μ_2 β_2 +μ_2γ_2 = κ_2 α_2 + μ_2 (-(21/29) β_2 +γ_2)$ με $κ_2$, $μ_2$ αυθαίρετα και συνεπώς μια βάση της τομης είναι το συνολο $\{ α_2, -21β_2 +29γ_2 \}= \{(6, 5, -5, 2), (21, 168,-63, 87)\}$.

7. (***10 μονάδες***) Έστω $S=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ μία βάση του $\mathbb{R}^4$. Θεωρούμε το σύνολο $T=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ με $v_1 = u_1+ u_2$, $v_2 = u_2 + u_3$, $v_3 = u_3+ u_4$, $v_4 = \alpha\, u_4+ u_1$, όπου α πραγματική παράμετρος.

α) (***4 μονάδες***) Να βρεθούν όλες οι τιμές του α για τις οποίες το σύνολο T είναι βάση του $\mathbb{R}^4$ και για τις τιμές αυτές του α:

β) (***3 μονάδες***) να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S στην T,

γ) (***3 μονάδες***) να γραφεί το διάνυσμα $v = u_1 - u_2 + u_3 - u_4$ στην βάση T.

(**Βλ**. Παραδείγματα της Παραγράφου 2.9 του βιβλίου του ΕΑΠ).

ΛΥΣΗ 7)

Για να είναι το σύνολο T βάση του $\mathbb{R}^4$ αρκεί τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4, να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (καθώς η διάσταση του χώρου $\mathbb{R}^4$ είναι τέσσερα και το σύνολο T αποτελείται από 4 στοιχεία).

Επιπλέον με την υποθεση ότι τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4, αποτελούν βάση, οι συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ικανοποιούν την σχέση

$$v = \lambda_1 v_1+ \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$

αν και μόνο αν ισχύει

$$[v]_S = \lambda_1 [v_1]_S + \lambda_2 [v_2]_S + \lambda_3 [v_3]_S + \lambda_4 [v_4]_S$$

όπου $[v]_S$ ο πίνακας στήλη συντεταγμένων του διανύσματος v ως προς την βάση S.

Άρα μπορούμε να εργαστούμε με τα διανύσματα (στήλες) συντεταγμένων ως προς την βάση S *και να* απαντήσουμε σε όλα τα ερωτήματα θεωρώντας τον επαυξημένο πίνακα Α με στήλες τα διανύσματα συντεταγμένων των v_1, v_2, v_3, v_4 και v ως προς την βάση S.

Προχωρούμε στην κλιμακωτή του μορφή:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&-1\\ 0&1&1&0&1\\ 0&0&1&a&-1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&0&-1&-2\\ 0&1&1&0&1\\ 0&0&1&a&-1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&0&-1&-2\\ 0&0&1&1&3\\ 0&0&1&a&-1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1}&0&0&1&1\\ 0&\boxed{1}&0&-1&-2\\ 0&0&\boxed{1}&1&3\\ 0&0&0&a-1&-4 \end{array}\right)$$

και στο σημείο αυτό είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι:

Για να αποτελούν τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4, βάση του $\mathbb{R}^4$, πρέπει και αρκεί $\boxed{\alpha\neq 1}$.

Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S στην T είναι ο πίνακας που απαρτίζεται από τις 4 πρώτες στήλες του A δηλαδή ο $B=\begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&a \end{pmatrix}$ και οι συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ βρίσκονται προχωρώντας στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A:

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1}&0&0&1&1\\ 0&\boxed{1}&0&-1&-2\\ 0&0&\boxed{1}&1&3\\ 0&0&0&a-1&-4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1}&0&0&1&1\\ 0&\boxed{1}&0&-1&-2\\ 0&0&\boxed{1}&1&3\\ 0&0&0&\boxed{1}&4/(1-a) \end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1}&1&1&0&(3+a)/(a-1)\\ 0&\boxed{1}&0&0&2(a+1)/(1-a)\\ 0&0&\boxed{1}&0&(1+3a)/(a-1)\\ 0&0&0&\boxed{1}&4/(1-a) \end{array}\right).$$

Αρα $\lambda_1=(3+a)/(a-1)$, $\lambda_2=2(a+1)/(1-a)$, $\lambda_3=(1+3a)/(a-1)$, $\lambda_4=4/(1-\alpha)$

και $$\boxed{v=\frac{1}{a-1}((3+a)v_1-2(a+1)v_2-(1+3a)v_3-4v_4)}.$$

Ενας άλλος τρόπος για να γράψουμε το διάνυσμα v στην βάση T είναι να βρούμε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την T στην S που είναι ο αντίστροφος του B:

$$B^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a & -1 & 1 & -1 \\ -a & a & -1 & 1 \\ a & -a & a & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{(π.χ. με την μέθοδο Gauss)}$$

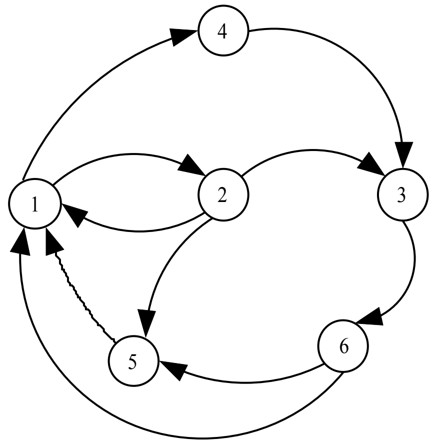
και να τον πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα στήλη συντεταγμένων του v ως προς την βάση S:

$$\frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a & -1 & 1 & -1 \\ -a & a & -1 & 1 \\ a & -a & a & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} 3+a \\ -(2+a) \\ 3a+1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Έτσι βρίσκουμε ότι $\boxed{v = \frac{1}{a-1}((3+a)v_1 - 2(a+1)v_2 - (1+3a)v_3 - 4v_4)}$.

Εφαρμογή με αριθμητικό/συμβολικό πακέτο υπολογισμού

8. **(*10 μονάδες*)** Η αναπαράσταση ενός κατευθυνομένου γραφήματος όπως το παρακάτω



δίνεται με την μορφή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{υπάρχει κατευθυνόμενο τόξο από τον κόμβο } i \text{ στον κόμβο } j \\ 0 & \text{δεν υπάρχει κατευθυνόμενο τόξο από τον κόμβο } i \text{ στον κόμβο } j \end{cases}$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων μετάβασης (συνδέσεων) από τον κόμβο i στον κόμβο j διατρέχοντας ακριβώς *2* κατευθυνόμενα τόξα (ακολουθώντας την φορά τους) είναι ίσος προς τον αριθμό:

$$a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{i6}a_{6j}$$

(δηλαδή μέσω του κόμβου 1 ή μέσω του κόμβου 2 ή … ή μέσω του κόμβου 6). Από τον ορισμό του γινομένου πινάκων διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός αυτός είναι το στοιχείο (i,j) του πίνακα A^2. Παρόμοια, ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων μετάβασης από τον κόμβο i στον κόμβο j διατρέχοντας ακριβώς *3* κατευθυνόμενα τόξα (ακολουθώντας την φορά τους) είναι ίσος προς το στοιχείο (i,j) του πίνακα A^3 κ.ο.κ..

Με την χρήση του Matlab/Octave προσπαθήστε να βρείτε :

α) τον αριθμό συνδέσεων μέσω *3* τόξων του κόμβου *i* με τον κόμβο *j* δηλ. τον πίνακα A^3.

β) αν όλα τα στοιχεία του πίνακα $I + A + A^2 + \cdots + A^5$ είναι μη μηδενικά (δηλ. αν υπάρχει άμεση ή έμμεση σύνδεση μεταξύ όλων των κόμβων).

Το τελευταίο ερώτημα μπορεί να λυθεί στον υπολογιστή σας με τη βοήθεια του MATLAB ή του προγράμματος «κλώνου» του Octave με τις ίδιες εντολές.

ΛΥΣΗ 8.

(α) Πρώτα δημιουργούμε τον πίνακα A στο Matlab

```
>> a=[
0 1 0 1 0 0 ;
1 0 1 0 1 0;
0 0 0 0 0 1;
0 0 1 0 0 0;
1 0 0 0 0 0;
1 0 0 0 1 0]

a =

     0     1     0     1     0     0
     1     0     1     0     1     0
     0     0     0     0     0     1
     0     0     1     0     0     0
     1     0     0     0     0     0
     1     0     0     0     1     0
```

και στη συνέχεια υπολογίζουμε τον A^3

```
>> a^3

ans =

     1     1     0     1     0     2
     2     1     2     1     2     0
     1     1     0     1     0     0
     1     0     0     0     1     0
     1     0     2     0     1     0
     1     1     2     1     1     0
```

Άρα για παράδειγμα ο αριθμός συνδέσεων μέσω *3* τόξων μεταξύ των κόμβων 5 και 3 δίνεται από το στοιχείο (5,3) του πίνακα A^3 δηλ. είναι 2 ($5 \to 1 \to 2 \to 3$ και $5 \to 1 \to 4 \to 3$).

(β)

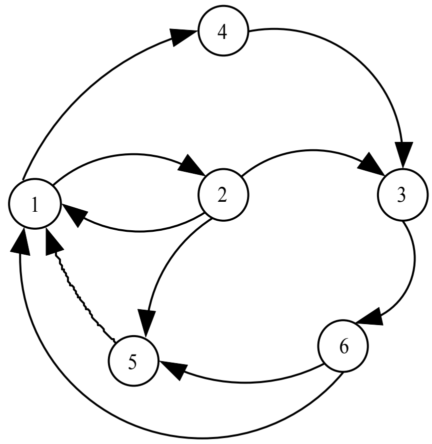
```
>> eye(6)+a+a^2+a^3+a^4+a^5

ans =

    10     6     6     6     5     4
    12     8     9     7     8     5
     5     3     5     3     3     3
     3     2     3     3     2     1
     6     3     4     3     5     2
```

```
     9     5     6     5     6     5
```

Επειδή όλα τα στοιχεία του πίνακα $I + A + A^2 + \cdots + A^5$ είναι μη μηδενικά, υπάρχει άμεση ή έμμεση σύνδεση μεταξύ όλων των κόμβων.



$1 \to 2 \to 1$	$2 \to 1$	$3 \to 6 \to 1$
$1 \to 2$	$2 \to 1 \to 2$	$3 \to 6 \to 1 \to 2$
$1 \to 2 \to 3$	$2 \to 3$	$3 \to 6 \to 1 \to 2 \to 3$
$1 \to 4$	$2 \to 1 \to 4$	$3 \to 6 \to 1 \to 4$
$1 \to 2 \to 5$	$2 \to 5$	$3 \to 6 \to 5$
$1 \to 2 \to 3 \to 6$	$2 \to 3 \to 6$	$3 \to 6$
$4 \to 3 \to 6 \to 1$	$5 \to 1$	$6 \to 1$
$4 \to 3 \to 6 \to 1 \to 2$	$5 \to 1 \to 2$	$6 \to 1 \to 2$
$4 \to 3$	$5 \to 1 \to 2 \to 3$	$6 \to 1 \to 2 \to 3$
$4 \to 3 \to 6 \to 1 \to 4$	$5 \to 1 \to 4$	$6 \to 1 \to 4$
$4 \to 3 \to 6 \to 5$	$5 \to 1 \to 2 \to 5$	$6 \to 5$
$4 \to 3 \to 6$	$5 \to 1 \to 2 \to 3 \to 6$	$6 \to 1 \to 2 \to 3 \to 6$

Μια άλλη λύση δίνεται παρακάτω με χρήση της επαναληπτικής εντολής for.

```
>> s=[
0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 ;
0 0 0 0 0 0 ]

s =

     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
```

ή

```
>> s=zeros(6,6);

>> for i=0:5
s=s+a^i;
end
>> s

s =

    10     6     6     6     5     4
    12     8     9     7     8     5
     5     3     5     3     3     3
     3     2     3     3     2     1
     6     3     4     3     5     2
     9     5     6     5     6     5
```

Αρχικά θέτουμε το αποτέλεσμα του αθροίσματος των πινάκων s να είναι ο μηδενικός πίνακας, ενώ στη συνέχεια η μεταβλητή i θα πάρει τις τιμές 0, 1, 2,3,4,5 και για κάθε μια από αυτές θα προστίθεται στον πίνακα s ο πίνακας a^i. Το ερωτηματικό στο τέλος κάθε εντολής δηλώνει ότι δεν θέλουμε να εμφανίζονται τα αποτελέσματα, ενώ η τελευταία εντολή θα εκτυπώσει την τιμή του s.