ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: **23 Νοεμβρίου 2006**
Ημερομηνία Παράδοσης της Εργασίας από τον Φοιτητή: **15 Δεκεμβρίου 2006**

Οι ασκήσεις της εργασίας αναφέρονται στα θέματα :

Κεφάλαιο 3 (Χώροι εσωτερικού γινομένου)
Κεφάλαιο 4 (Γραμμικοί μετασχηματισμοί)
Κεφάλαιο 5.1, 5.2 (Χαρακτηριστικά μεγέθη- Διαγωνοποίηση)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «*Γραμμική Άλγεβρα*» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.

Βοηθητικό υλικό: Για την εργασία 2 μπορείτε να συμβουλευθείτε το υλικό που υπάρχει στη διεύθυνση http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm

- Από το ΕΔΥ:

  Κεφ 7, Βάση και Διάσταση

  Κεφ 8, Γραμμικές Απεικονίσεις,

  Κεφ 9, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα,

  Κεφ 10, Διαγωνοποίηση,

- Από το ΣΕΥ: Οι Χώροι R^n, Διανυσματικοί Χώροι ,

  Γραμμικές απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα,

  Διαγωνοποίηση

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΕΙΝΑΙ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ

1. (15 μον)

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 5 & -4\end{bmatrix}$ και θεωρούμε το σύνολο

$N(A)=\left\{\mathbf{X}\in\mathbb{R}^4 : A\mathbf{X}=\mathbf{0}\right\}$.

i) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $N(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, και να βρείτε μία βάση του. (5 μον)

ii) Να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του $N(A)$ χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Gram-Schmidt. (5 μον)

iii) Έχει λύση το σύστημα $A\mathbf{X}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}^T$; (5 μον)

<u>Λύση</u>

i) Αν $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in N(A) \Rightarrow A\mathbf{X}=\mathbf{0}$ και $A\mathbf{Y}=\mathbf{0}$. Έτσι για κάθε $k,\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$A(k\mathbf{X}+\lambda\mathbf{Y})=k(A\mathbf{X})+\lambda(A\mathbf{Y})=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad N(A) \text{ υπόχωρος.}$$

Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 5 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

Συνεπώς το σύστημα $A\mathbf{X}=\mathbf{0}$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\left.\begin{aligned}x_1 \quad +3x_3-x_4&=0\\ x_2+x_3+2x_4&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}x_1&=-3x_3+x_4\\ x_2&=-x_3-2x_4\end{aligned}.$$

Από όπου έχουμε ότι $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3x_3+x_4\\ -x_3-2x_4\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-3\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

είναι η γενική λύση του συστήματος, και συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$$

είναι βάση του $N(A)$.

ii) Θέτουμε $\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ και $\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}_2+\lambda\boldsymbol{\xi}_1$.

Από την ισότητα $\boldsymbol{\xi}_1\cdot\boldsymbol{\xi}_2=0 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1\cdot\boldsymbol{\eta}_2}{\boldsymbol{\eta}_1\cdot\boldsymbol{\eta}_1}=\dfrac{1}{11}$. Συνεπώς,

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}^T+\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\frac{8}{11} & -\frac{23}{11} & \frac{1}{11} & 1\end{bmatrix}^T.$$

Η ορθοκανονική βάση είναι :

$$\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \frac{11}{\sqrt{715}}\begin{bmatrix} \frac{8}{11} & -\frac{23}{11} & \frac{1}{11} & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{715}} & -\frac{23}{\sqrt{715}} & \frac{1}{\sqrt{715}} & \frac{11}{\sqrt{715}} \end{bmatrix}^T.$$

iii) Ο επαυξημένος πίνακας $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right]$ έχει κλιμακωτή μορφή

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Το σύστημα είναι συμβιβαστό και έχει λύση :

$$x_1 = 2 - 3x_3 + x_4,\ \ x_2 = 3 - x_3 - 2x_4,\ \text{για κάθε}\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

----

2. (20 μον)

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z) = (x+2y+z,\ y^a + b,\ 2x+y+2z).$$

A) Να βρεθούν :

i) οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι γραμμική (2 μον)

Για τις τιμές αυτές των a , b να προσδιορισθούν:

ii) ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, και η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα αυτού, (5 μον)

iii) βάση και διάσταση των υπόχωρων $\ker f$, και $\operatorname{Im} f$ (5 μον)

iv) οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της f (5 μον)

B) Είναι η f αντιστρέψιμη; Είναι η f επί; (3 μον)

Υπόδειξη: οι απαντήσεις στο B) μπορούν να βασιστούν στα αποτελέσματα του A).

<u>Λύση :</u>

A) i) Από την ισότητα

$$f(k\mathbf{w}_1 + \lambda\mathbf{w}_2) = kf(\mathbf{w}_1) + \lambda f(\mathbf{w}_2),$$

όπου $\mathbf{w}_i = (x_i, y_i, z_i)$, έχουμε

$$(ky_1 + \lambda y_2)^a + b = ky_1^a + \lambda y_2^a + (k+\lambda)b,\ \text{για κάθε}\ k, \lambda \in \mathbb{R},$$

η οποία ισχύει ακριβώς όταν $a = 1, b = 0$.

ii) Επειδή

$$f(\mathbf{e}_1)=(1,0,2)=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3$$
$$f(\mathbf{e}_2)=(2,1,1)=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$$
$$f(\mathbf{e}_3)=(1,0,2)=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3$$

ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης είναι $F=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&1&2\end{bmatrix}$. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του είναι :

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&-3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

iii) $\ker f=\{\mathbf{x}:\ \ f(\mathbf{x})=\mathbf{0}\}=\{\mathbf{x}:\ \ F\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$

$$=\left\{\mathbf{x}:\ \begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&1&2\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}$$

$$=\left\{\mathbf{x}:\ \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}=\{\mathbf{x}:\ \ x_2=0,\ x_1+x_3=0\}$$

$$=\left\{\mathbf{x}:\ \ \mathbf{x}=c\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}^T,\ c\in\mathbb{R}\right\}$$

και από εδώ συμπεραίνουμε ότι $\dim(\ker f)=1$.

Από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πινακα F έχουμε ότι οι δύο πρώτες στηλες του πινακα Φ αποτελουν βάση του χώρου στηλών. Αρα $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)\}$ είναι βάση του $\operatorname{Im} f$ και συνεπώς $\dim(\operatorname{Im} f)=2$.

iv) Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της f είναι εκείνα του πίνακα F.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του F είναι

$$\det(F-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\0&1-\lambda&0\\2&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\2&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda)(\lambda-3).$$

και οι ρίζες του είναι οι ιδιοτιμές : $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$.

- Για $\lambda_1=0$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα που προκύπτει από τη λύση του συστήματος $F\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\ \mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}^T$.
- Για $\lambda_2=1$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα που προκύπτει από τη λύση του συστήματος $(F-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\ \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1&2&-4\end{bmatrix}^T$.

- Για $\lambda_3 = 3$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα που προκύπτει από τη λύση του συστήματος $(F-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}^T$.

B) Επειδή $\ker f \neq \mathbf{0}$ η απεικόνιση f είναι ιδιάζουσα, (Ορισμός 4.3.1, σελ. 219) και από το θεώρημα 4.3.5 συμπεραίνουμε ότι η f είναι μη αντιστρέψιμη. Επιπλέον επειδή η f δεν αντιστρέφεται δεν είναι και επί (βλέπε ισοδυναμίες του θεωρήματος 4.3.7, σελ. 221).

----

3. (15 μον)
A) (10 μον) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, που ορίζεται από τη σχέση $f(A) = A + A^T$, είναι γραμμική και να βρείτε βάση του πυρήνα και της εικόνας της f.
B) (5 μον) Δείξτε ότι κάθε πίνακας $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα (Συμμετρικός είναι ένας πίνακας B με στοιχεία $b_{i,j} = b_{j,i}$ και αντισυμμετρικός είναι ένας πίνακας C με στοιχεία $c_{i,j} = -c_{j,i}$).

<u>**Λύση :**</u>
A) Αν $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, η f είναι γραμμική, διότι

$$f(kA+\lambda B) = (kA+\lambda B) + (kA+\lambda B)^T = k\left(A + A^T\right) + \lambda\left(B + B^T\right) = kf(A) + \lambda f(B).$$

- Για τον πυρήνα έχουμε:

$$\ker f = \{A : \ f(A) = \mathbf{O}\} = \{A : \ A + A^T = \mathbf{O}\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} : \ a \in \mathbb{R}\right\}.$$

Προφανώς ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι βάση του $\ker f$.

- Για την εικόνα

$$\operatorname{Im} f = \{A + A^T : \ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\} = \left\{\begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix} : \ a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= a\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + (b+c)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ είναι βάση του υποχώρου $\operatorname{Im} f$.

B) Έστω $A = X + Y$, όπου $X = X^T$, $Y = -Y^T$. Τότε $A^T = X^T + Y^T = X - Y$ με συνέπεια

$$2X = A + A^T \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$

και

$$2Y = A - A^T \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right).$$

----

4. (15 μον)

A) (10 μον) Για τον πίνακα $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$, να αποδείξετε ότι :

i) αντιστρέφεται, και να υπολογίσετε τον A^{-4}.

ii) διαγωνοποιείται και να βρείτε τη διαγώνια μορφή του, D, και έναν πίνακα P που διαγωνιοποιεί τον A μέσω της σχέσης $P^{-1}AP=D$.

iii) Να υπολογίσετε τον A^k, $k\in\mathbb{N}$ και με βάση το αποτέλεσμα αυτό να υπολογίσετε τον πίνακα $I+A+A^2+\cdots+A^{2006}$.

B) (5 μον) Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι

$$A^{2k}-3A^{2m+1}+2I=3(I-A),$$

για κάθε $k,m\in\mathbb{N}$.

<u>Λύση :</u>

A) i) Ο πίνακας A αντιστρέφεται, διότι $\det A=-4+3=-1\neq 0$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν εφαρμόσουμε τη σχέση (5), της σελίδας 268, αφού υπολογίσουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 3 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1,$$

οπότε η (5) δίνει $(-1)^2\det A=-1\neq 0$, άρα ο πίνακας A αντιστρέφεται.

Από το θεώρημα 5.1.3 (Cayley – Hamilton , σελ. 272) έχουμε $A^2-I=\mathbf{O}$. Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα επί A^{-1} έχουμε

$$A-A^{-1}=\mathbf{O}\ \Rightarrow\ A^{-1}=A\ \Rightarrow\ A^{-4}=\left(A^{-1}\right)^4=A^4=\left(A^2\right)^2=I^2=I.$$

ii) Επειδή ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1$, διαγωνοποιείται, (Παρατήρηση 1, σελ. 284).

- Για $\lambda_1=1$, έχουμε το σύστημα $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ x_1=x_2\ \Rightarrow\ \mathbf{x}=[1\ \ 1]^T$, αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.
- Για $\lambda_2=-1$, έχουμε το σύστημα $(A+I)\mathbf{y}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ y_2=3y_1\ \Rightarrow\ \mathbf{y}=[1\ \ 3]^T$, αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Συνεπώς,

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

iii) Επειδή $D^2 = I$, από την ισότητα $A = PDP^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^2 = PD^2P^{-1} = PIP^{-1} = I$,

$A^3 = A^2A = A$, $A^4 = A^2A^2 = I$, …, και γενικά $A^{2k} = I$, $A^{2k-1} = A$, $k \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς,

$I + A + A^2 + \cdots + A^{2006} = I + A + I + A + \cdots + A + I = I + 1003\left(A + I\right) = 1003A + 1004I$.

B) Έχουμε $\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$.

Συνεπώς από το θεώρημα Cayley – Hamilton έχουμε $A^2 - I = \mathbf{O}$ και επιπλέον

$$A^{2k} - 3A^{2m+1} + 2I = \left(I\right)^k - 3\left(I\right)^m A + 2I = 3I - 3A = 3\left(I - A\right).$$

---

5. (15 μον)

A) (10 μον) Βρείτε λύσεις της εξίσωσης $X^2 = A$, όπου $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

Υπόδειξη: Βρείτε έναν πίνακα *P* που διαγωνιοποιεί τον *A* μέσω της σχέσης $P^{-1}AP = D$. Κατόπιν, ορίστε έναν πίνακα $Y = P^{-1}XP$ και δείξτε ότι $Y^2 = D$. Προσδιορίστε έτσι κάποιες λύσεις για το *Y* και από αυτές υπολογίστε τα αντίστοιχα *X*.

B) (5 μον) Να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα A με 1η γραμμή $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. και βρείτε ορθομοναδιαίο πίνακα P τέτοιον ώστε $A = PDP^{-1}$ όπου D είναι διαγώνιος πίνακας.

Υπόδειξη: Για την επίλυση του ερωτήματος Β) θα πρέπει πρώτα να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ και τα ιδιοδιανύσματα $\{u_1, u_2\}$ του πίνακα A. Στη συνέχεια, θα πρέπει να δημιουργήσετε μια ορθοκανονική βάση τα διανύσματα της οποίας θα αποτελέσουν τις στήλες του πίνακα P.

Λύση :

A) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται, διότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$

άρα οι ρίζες του είναι διακεκριμένες, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.

- Για $\lambda_1 = 4$, αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,
- και $\lambda_2 = 9$, αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Συνεπώς, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$, και οι 4 πίνακες

$$X=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pm 2 & 0\\ 0 & \pm 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}^{-1}$$

επαληθεύουν την εξίσωση.

Β) Αν $\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}$ είναι η 2^{η} γραμμή του πίνακα A, πρέπει αυτή να είναι κάθετη στην 1^{η} γραμμή και να έχει μέτρο 1. Έτσι έχουμε $\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=0 \Rightarrow a+2b=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}$. Για $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ η 2^{η} γραμμή είναι $\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$.

Για τον πίνακα $A=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\det(A-\lambda I)=\lambda^2-\frac{2}{\sqrt{5}}\lambda+1=0$, άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1+2i)$, $\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1-2i)$ και αντίστοιχα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$. Συνεπώς

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}, \qquad D=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1+2i & 0\\ 0 & 1-2i\end{bmatrix}.$$

----

6. (10 μον)

Αφού μελετήσετε τις παραγρ. 3.1 – 5 του Κεφαλαίου 3 του βιβλίου απαντήστε στα ακόλουθα ζητήματα:

Α) (4 μον) Επαληθεύστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2+\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2=2\|\mathbf{a}\|^2+2\|\mathbf{b}\|^2$$

για δύο διανύσματα ενός n – διάστατου Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου: $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$.

Β) (6 μον) Αν ισχύει για τα δύο διανύσματα του Α) ότι $\|\mathbf{a}\|=\|\mathbf{b}\|$: Δείξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ και $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Κατόπιν, θέτοντας n = 2 και υποθέτοντας ότι τα διανύσματα $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ είναι διαδοχικές πλευρές ενός ρόμβου, δείξτε ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετοι μεταξύ τους και ότι διχοτομούν την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων.

<u>Λύση :</u> **Α)** Για $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, σύμφωνα με την (20) σελ. 152 και την (10) σελ. 146, έχουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^T(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{b}^T\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\end{aligned}$$

διότι $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Όμοια,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^T(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}^T\mathbf{a} - \mathbf{b}^T\mathbf{a} - \mathbf{a}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\end{aligned}$$

Προσθέτοντας, συμπεραίνουμε άμεσα τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Β) Πράγματι, τα διανύσματα $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ είναι ορθογώνια, διότι

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^T(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{b}^T\mathbf{a} - \mathbf{a}^T\mathbf{b} - \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2 = 0.$$

Αν $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ είναι διαδοχικές πλευρές ρόμβου, τότε $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι τα διανύσματα $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ και $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, που όπως αποδείχθηκε είναι κάθετα.

Επειδή

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= (a_1, a_2)\cdot(a_1+b_1,\, a_2+b_2) \\ &= a_1(a_1+b_1) + a_2(a_2+b_2) = a_1^2 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_2^2\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= (b_1, b_2)\cdot(a_1+b_1,\, a_2+b_2) \\ &= b_1(a_1+b_1) + b_2(a_2+b_2) = b_1^2 + b_1a_1 + b_2a_2 + b_2^2\end{aligned}$$

έχουμε $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, διότι $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$. Συνεπώς,

$\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}) = \measuredangle(\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b})$, δηλαδή $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ διχοτομεί τη γωνία των $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$, δηλαδή, ότι $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

----

7. (10 μον)

Στην ιστοσελίδα της θεματικής μας ενότητας υπάρχει υλικό σχετικό με το MATLAB. Βοήθεια για τη χρήση μίας εντολής, π.χ. της inv( ) μπορεί να βρεθεί με τη χρήση της εντολής

help inv

Στη άσκηση που ακολουθεί θα παραδώσετε ως λύση τόσο τις εντολές που πληκτρολογήσατε όσο και τα αποτελέσματα που σας επέστρεψε το πρόγραμμα. όπου χρειάζεται συμπληρώστε τα σχόλιά σας.

Ορίστε στο MATLAB ή στην Octave τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

1. Με τη χρήση της συνάρτησης poly( ) να βρεθούν οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα. Στη συνέχεια, με τη χρήση της εντολής roots( ) να υπολογιστούν οι ρίζες του δηλαδή, οι ιδιοτιμές του πίνακα.
2. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα με τη χρήση της συνάρτησης eig( ). Να δημιουργήσετε έναν πίνακα P ο οποίος να έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα που υπολογίσθηκαν. Τι συμπέρασμα προκύπτει για τη διαγωνοποίηση του πίνακα;
3. Με βάση τα αποτελέσματα της eig( ) και τη χρήση της εντολής inv( ) που υπολογίζει τον αντίστροφο πίνακα, να υπολογιστεί ο πίνακας $B = \mathrm{A} - P \cdot D \cdot P^{-1}$. Είναι το αποτέλεσμα το αναμενόμενο;

<u>Λύση :</u>

Στο MATLAB ή στην Octave ορίζουμε τον πίνακα

>> **A=[2 2 0 5 -3;1 3 6 -4 0;0 0 4 6 0;0 0 -3 -5 0;0 0 -3 -6 -5]**

Το περιβάλλον μας παρουσιάζει

A =

```
    2    2    0    5   -3
    1    3    6   -4    0
    0    0    4    6    0
    0    0   -3   -5    0
    0    0   -3   -6   -5
```

1. Με τη χρήση της poly( ) μας δίνονται οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που στην περίπτωσή μας είναι το $p(x) = x^5 + x^4 - 23x^3 - x^2 + 62x - 40$

> >p=poly(A)

p =

```
   1.0000    1.0000  -23.0000   -1.0000   62.0000  -40.0000
```

Η εντολή roots( ) υπολογίζει τις ρίζες ενός πολυωνύμου, οπότε εδώ θα είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

```
>> roots(p)
ans =

  -5.0000
   4.0000
  -2.0000
   1.0000
   1.0000
```

2. Η εντολή eig( ) υπολογίζει τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ενός τετραγωνικού πίνακα A όταν γράφεται με την ακόλουθη μορφή :

```
>> [P D]=eig(A)

P =

  -0.8944  -0.7071  -0.8944  -0.7236   0.4056
   0.4472  -0.7071   0.4472   0.5789  -0.0507
        0        0  -0.0000  -0.2171   0.0000
        0        0   0.0000   0.2171  -0.0000
        0        0  -0.0000  -0.2171   0.9126

D =

   1.0000        0        0        0        0
        0   4.0000        0        0        0
        0        0   1.0000        0        0
        0        0        0  -2.0000        0
        0        0        0        0  -5.0000
```

Ο πίνακας **D** είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία την ιδιοτιμές του πίνακα. Ο πίνακας **P** περιέχει τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, επειδή κάθε στήλη του αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή της αντίστοιχης στήλης του **D**. Ο πίνακας έχει πέντε ιδιοτιμές με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα γραμμικώς εξαρτημένα, παρατηρήστε ότι ο πίνακας **P** έχει την $1^{η}$ και την $3^{η}$ στήλη ίσες, άρα η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδέν.

Σύμφωνα με την μεθοδολογία διαγωνοποίησης σελίδα 286, ο πίνακας *A* δε διαγωνοποιείται.

Ωστόσο, αν πληκτρολογήσουμε την εντολή

>> **d=det(P)**

d =

-1.5997e-017

το τελευταίο αποτέλεσμα δίνει στο MATLAB τη δυνατότητα να υπολογίσει και αντίστροφο πίνακα στον **P**, όπως παρατηρούμε στη συνέχεια.

3. Φυσικά ο πίνακας **B** δεν ορίζεται μια και ο **P** δεν είναι αντιστρέψιμος, ωστόσο λόγω σφαλμάτων της προσέγγισης και της αριθμητικής του υπολογιστή, αν πληκτρολογήσουμε την εντολή

>> **d=det(P)**

d =

-1.5997e-017

το οποίο σημαίνει ότι η ορίζουσα του **P είναι σχεδόν μηδέν**, αυτό το αποτέλεσμα δίνει στο MATLAB τη δυνατότητα να υπολογίσει και αντίστροφο πίνακα στον **P**, αφού βέβαια μας προειδοποιήσει, όπως παρατηρούμε στη συνέχεια.

>> **inv(P)**

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.

Results may be inaccurate. RCOND = 2.178369e-017.

ans =

1.0e+016 *

-0.0000	**0.0000**	**1.1749**	**1.1749**	**-0.0000**
-0.0000	**-0.0000**	**-0.0000**	**-0.0000**	**0.0000**
0	**0**	**-1.1749**	**-1.1749**	**0**
0	**0**	**0.0000**	**0.0000**	**0**
0	**0**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**

Οπότε

>> **B=A-P*D*inv(P)**

B =

0	**0**	**-4.4444**	**-3.8889**	**-1.2278**
0.0000	**0**	**1.0556**	**1.1111**	**0.6139**
0	**0**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**
0	**0**	**-0.0000**	**-0.0000**	**-0.0000**
0	**0**	**-0.0000**	**-0.0000**	**0**
