ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

Άσκηση 1. (10 μον)

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q = X^T AX$ **όπου** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

α) (4 μον) Να προσδιοριστεί το είδος της
β) (6 μον) Να προσδιοριστεί αλλαγή μεταβλητών που διαγωνοποιεί την Q
(βλ. Βοηθητικό υλικό: ΕΔΥ Κεφ 11 Τετραγωνικές μορφές)

Λύση
α) Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$\Rightarrow 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$. Άρα η Q είναι αόριστη.

β) Για να προσδιορίσουμε αλλαγή μεταβλητών $X = PX'$ που διαγωνοποιεί την Q βρίσκουμε τα ιδιοδυανύσματα

Για $\lambda_1 = -1$

$$(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0,\ u_1 = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda_1 = 3$

$$(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,\ u_2 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας P θα έχει τη μορφή $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα η ζητούμενη αλλαγή μεταβλητών θα είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}.$$ Πράγματι $Q = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

Αν θέσουμε $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2'$ και $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2'$ έχουμε:

$$Q = \frac{1}{2}x_1'^2 + \frac{1}{2}x_2'^2 + \frac{2}{2}x_1'x_2' + 4\left(\frac{1}{2}x_2'^2 - \frac{1}{2}x_1'^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}x_1'^2 + \frac{1}{2}x_2'^2 - \frac{2}{2}x_1'x' = -x_1'^2 + 3x_2'^2 = (x_1', x_2') \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. (8 μον)
Δίνεται η τετραγωνική μορφή : Q = $2x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12xy + 8xz + 4yz$.
α) (5 μον) Να βρεθεί ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας A της Q και να προσδιορισθεί διαγωνιοποιημένη μορφή της Q σε νέες συντεταγμένες X, Y, Z.
β) (3 μον) Δοθέντος ότι Q = 0 προσδιορίζει μια επιφάνεια στον 3-διάστατο χώρο των X, Y, Z περιγράψτε τη μορφή της επιφάνειας αυτής, θεωρώντας τομές της για διαφορετικές (σταθερές) τιμές του Z ≥ 0.

Λύση

α) Ο συμμετρικός πίνακας A είναι: $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$|A-\lambda I| = \left\| \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 60\lambda - 100 \text{ με ρίζες } \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = 10 .$$

Αρα οι ιδιοτιμές του Α είναι $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = 10$ με αντίστοιχα ιδιοδιανυσματα $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Τα τρία ιδιοδιανύσματα αποτελούν μια ορθογώνια βάση από την οποία σχηματίζεται ορθοκανονική βάση αν διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του. Ετσι έχουμε τον ορθογώνιο πίνακα P που σχηματίζεται έχοντας ως στήλες του τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε.

$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.Η αλλαγή συντεταγμένων από τις (x,y,z) στις (X,Y,Z) γίνεται μέ τον πίνακα P:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$ από όπου προκύπτει:

$$x = \frac{X+2Y+2Z}{3}, y = \frac{-2X-Y+2Z}{3}, z = \frac{2X-2Y+Z}{3}$$

Αν αντικαταστήσουμε τα (x,y,z) στη Q , προκύπτει διαγώνια μορφή της Q η οποία ήταν ήδη γνωστή από την στιγμή που βρήκαμε τις ιδιοτιμές. **Q = $-2X^2 - 5Y^2 + 10Z^2$.**

β) Παίρνοντας την «ανηγμένη» έκφραση της τετραγωνικής μορφής στην οποία μόλις καταλήξαμε, η εξίσωση **Q=0** γράφφεται ως εξής: **$Z^2 = 0.2X^2 + 0.5Y^2$** . Όπως βλέπουμε για **Z > 0 ή Z < 0** προκύπτουν 2 επιφάνειες στον χώρο **X, Y, Z** , συμμετρικές ως προς το **Z** = 0. Θεωρώντας, επομένως μόνο διαφορετικές (σταθερές) τιμές του Z ≥ 0 παίρνουμε την συνάρτηση

$$Z = \sqrt{0.2X^2 + 0.5Y^2} \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει για Z = ρ > 0 μια οικογένεια ελλείψεων της μορφής

$$\frac{X^2}{5\rho^2}+\frac{Y^2}{2\rho^2}=1 \quad . \qquad (2)$$

Θέτοντας τώρα στη σχέση (1) X=0 (αντίστοιχα Y=0), παρατηρούμε ότι οι ελλείψεις αυτές τέμνουν το επίπεδο Y, Z (αντίστοιχα το επίπεδο X, Y) σε ευθείες γραμμές. Επομένως, η επιφάνεια που περιγράφει η (1) στο χώρο είναι μία κωνική επιφάνεια (ένας ανεστραμμένος, άπειρα μεγάλος κώνος με κορυφή το (0,0,0) και τομές τις ελλείψεις (2)). Τελικά για την επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση **Q=0** θεωρούμε και τον συμμετρικό κώνο $Z=-\sqrt{0.2X^2+0.5Y^2}$ (διπλό χωνί).

Παρατήρηση: Στο ερώτημα 2β, για τον προσδιορισμό της επιφάνειας που αντιστοιχεί στη διαγωνοποιημένη τετραγωνική μορφή, αυτή εξαρτάται από την διάταξη των ιδιοτιμών του αρχικού πίνακα στην διαγώνια μορφή. Ετσι αν κανείς θεωρήσει με άλλη σειρά τις ιδιοτιμές, χρησιμοποιώντας προφανώς και διαφορετικό μετασχηματισμό, οι τομές της επιφάνειας με οριζόντια επίπεδα θα είναι υπερβολές (π.χ. Q = 10 X^2 - 5Y^2 -2 Z^2). Η επιφάνεια όμως που αντιστοιχεί στην εξίσωση Q=0 είναι η ίδια (διπλή) κωνική επιφάνεια.

Άσκηση 3. (8 μον)

Αν $z_1=1-i,\quad z_2=-\sqrt{3}+i,\quad z_3=1+\sqrt{3}\,i,$ **να υπολογισθεί ο μιγαδικός αριθμός** $z=\dfrac{z_1^4 z_2^6}{z_3^{12}}$.**(Υπόδειξη: Γράψτε τους μιγαδικούς αυτούς αριθμούς σε πολική μορφή** $z_k=\rho_k\exp(i\theta_k)$**, για *k = 1,2,3*. Αν θέλετε μπορείτε να χρησιμοποιήστε τον τύπο του De Moivre).**

Λύση. Εφαρμόζουμε τον τύπο του De Moivre για να υπολογίσουμε τις δυνάμεις των z_1, z_2, z_3.

Για τον $z_1=1-i$ έχουμε

$r_1=|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ και

$$\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{συνεπώς}\ \theta_1=-\frac{\pi}{4}.$$

Άρα $z_1=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$ και

$$z_1^4=\sqrt{2}^4\left[\cos 4(-\frac{\pi}{4})+i\sin 4(-\frac{\pi}{4})\right]=2^2\left[\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right]=2^2\left[\cos\pi+i\sin\pi\right].$$ Για τον

$z_2=-\sqrt{3}+i$ έχουμε

$r_2=|z_2|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$ και

$$\cos\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta_2=\frac{1}{2},\ \text{συνεπώς}\ \theta_2=\frac{5\pi}{6}.$$

Άρα $z_2=2\left[\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$ και

$$z_2^6=2^6\left[\cos 6\frac{5\pi}{6}+i\sin 6\frac{5\pi}{6}\right]=2^6\left[\cos\pi+i\sin\pi\right].$$

Για τον $z_3=1+\sqrt{3}\,i$ έχουμε

$r_3=|z_3|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$ και

$\cos\theta_3 = \frac{1}{2}$, $\sin\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, συνεπώς $\theta_3 = \frac{\pi}{3}$.

Άρα $z_3 = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$ και

$$z_3^{12} = 2^{12}\left[\cos 12\frac{\pi}{3} + i\sin 12\frac{\pi}{3}\right] = 2^{12}\left[\cos 4\pi + i\sin 4\pi\right] = 2^{12}\left[\cos 0 + i\sin 0\right].$$

Μετατρέπουμε τους αριθμούς που υπολογίσαμε στην κλασσική τους μορφή:

$$z_1^4 = 2^2\left[-1+0i\right] = -2^2,\ z_2^6 = 2^6\left[-1+0i\right] = -2^6,\ z_3^{12} = 2^{12}\left[1+0i\right] = 2^{12}.$$

Τελικά:

$$z = \frac{z_1^4 z_2^6}{z_3^{12}} = \frac{2^2 2^6}{2^{12}} = 2^{-4} = \frac{1}{16}(1+0i).$$

Άσκηση 4. (10 μον)

Έστω η εξίσωση $z^4 + \lambda z^2 + 1 = 0$, **όπου** $\lambda^2 < 4, \lambda \in \mathbb{R}$

α) Βρείτε τις 4 ρίζες της εξίσωσης και δείξτε ότι κείνται πάνω σε ένα κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο. Προσδιορίστε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

β) Αν το όρισμα μιας ρίζας είναι το $\frac{\pi}{6}$ **υπολογίστε την τιμή του** λ **και βρείτε την ακριβή θέση όλων των ριζών πάνω στον κύκλο του α).**

(βλ. Βοηθητικό υλικό: Εισαγωγικές έννοιες της ΘΕ § 1.4 και ΕΔΥ Εισαγωγικές έννοιες)

Λύση

α) Θέτουμε $y = z^2$ και η εξίσωση γράφεται $y^2 + \lambda y + 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = \lambda^2 - 4 < 0$, άρα:

$$y = z^2 = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{-(4-\lambda^2)}}{2} = \frac{-\lambda \pm i\sqrt{4-\lambda^2}}{2} = \frac{-\lambda}{2} \pm \frac{i\sqrt{4-\lambda^2}}{2}$$ με

$\frac{-\lambda}{2}, \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}$ πραγματικούς καθώς $4 - \lambda^2 > 0$. Επομένως

$$\left|z^2\right| = \sqrt{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{4-\lambda^2}{4}} = 1 \Rightarrow |z| = 1$$ και άρα οι εικόνες των ριζών ανήκουν σε κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ=1.

Για να προσδιορίσουμε τις ρίζες εργαζομαστε ως εξης:

Έστω $z = x + iy$, όπου *x, y* πραγματικοί. Τότε

$$z^2 = (x+iy)(x+iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy) = \frac{-\lambda}{2} \pm \frac{i\sqrt{4-\lambda^2}}{2}$$. Συνεπώς λύνουμε το σύστημα :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -\frac{\lambda}{2} \\ 2xy = \pm\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = 1 - \frac{\lambda}{2} \\ 2y^2 = 1 + \frac{\lambda}{2} \\ 2xy = \pm\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = \frac{2-\lambda}{4} \\ y^2 = \frac{2+\lambda}{4} \\ 2xy = \pm\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \pm\frac{\sqrt{2-\lambda}}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{2+\lambda}}{2} \end{array}\right\}$$

από όπου προκύπτουν οι τέσσερις λύσεις: $z = \pm\alpha \pm i\beta$, με $\alpha = \frac{\sqrt{2-\lambda}}{2}, \beta = \frac{\sqrt{2+\lambda}}{2}$

οι οποίες βρισκονται στις τεσσερις κορυφές $A(\alpha,\beta)$, $B(\alpha,-\beta)$, $C(-\alpha,-\beta)$, $D(-\alpha,\beta)$ ορθογωνίου παραλληλογράμμου εγγεγραμμενου στον μοναδιαίο κύκλο.

β) Αν z_1 ρίζα με όρισμα $\dfrac{\pi}{6}$, η πολική της μορφή είναι: $z_1 = |z_1| e^{i\frac{\pi}{6}} \overset{|z_1|=1}{=} \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ και άρα $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2-\lambda}}{2}$ οπότε $\lambda = -1$. Οι άλλες ρίζες δινονται από τους τύπους $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z_3 = -\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6} = e^{i(\pi+\frac{\pi}{6})}$, $z_4 = -\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = e^{i(\pi-\frac{\pi}{6})}$.

Άσκηση 5. (14 μον)

Ορίζουμε δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών u_n, v_n αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}, \quad \forall n = 1,2,3,.... \text{ με αρχικές τιμές } \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 12 \end{cases}$$

Οι δυο (ανεξάρτητες) μεθόδοι που ακολουθούν έχουν σκοπό να προσδιορίσουν τα όρια των ακο-λουθιών αυτών:
Α μέθοδος)
α) (3 μον) Θέτοντας $w_n = v_n - u_n$, δείξτε ότι η ακολουθία w_n είναι μια γεωμετρική πρόοδος θετικών όρων και βρείτε το όριό της.
β) (3 μον) Δείξτε ότι η ακολουθία u_n είναι αύξουσα, η ακολουθία v_n φθίνουσα και ότι οι ακολουθίες u_n, v_n συγκλίνουν.
γ) (2 μον) Θέτοντας $t_n = 3u_n + 8v_n$, n =1,2,3,…, δείξτε ότι η ακολουθία t_n είναι σταθερή και υπολογίστε έτσι τα όρια των ακολουθιών u_n, v_n.
(βλ. ΣΕΥ Ακολουθίες, Παραδείγματα 2.8.7)

Β μέθοδος)
α) (1 μον) Γράψτε τους τύπους που ορίζουν αναδρομικά τις παραπάνω ακολουθίες σε μορφή πινάκων ως εξής (δηλ. προσδιορίστε τα στοιχεια του πινακα Α ώστε οι παρακάτω σχέσεις να ισοδυναμούν με τους δυο αναδρομικούς τύπους):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}}_{X_n}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

β) (3 μον) Η τιμή του X_n υπολογίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$X_n = AX_{n-1} = A(AX_{n-2}) = A^2 X_{n-2} = \cdots A^{n-1} X_1$$

Επομένως, αρκεί να βρεθεί η *n*-οστή δύναμη του πίνακα *A* την οποία και ζητούμε να υπολογίσετε μέσω διαγωνοποίησής του.

γ) (2 μον) Εφόσον έχετε υπολογίσει το X_n, οι *n*-οστοί όροι των ακολουθιών u_n, v_n προκύπτουν άμεσα. Στην συνέχεια υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών αυτών.

Λύση
Α μέθοδος

(α) $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{-u_n + v_n}{12} = \frac{1}{12} w_n$

Επομένως η ακολουθία w_n είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\frac{1}{12}$ και κατά συνέπεια $w_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} w_1 = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} > 0$,($w_1 = v_1 - u_1 = 11$).

Έχουμε: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} w_n = 0$

β) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3} w_n$, με $w_n > 0$ άρα η ακολουθία u_n είναι γνησίως αύξουσα. Ομοίως $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = -\frac{1}{4} w_n < 0$, η ακολουθία v_n είναι γνησίως φθίνουσα.
Έχουμε: $u_1 < u_2 < \ldots < u_n < v_n < \ldots < v_2 < v_1$, η ακολουθία u_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το $v_1 = 12$, ενώ η v_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το $u_1 = 1$, άρα συγκλίνουν (βλ. Θεώρημα σελ. 23).

γ) $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\frac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 8v_n = t_n$, άρα η ακολουθία είναι σταθερή. Επειδή $t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 99 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = 99$. Επίσης, επειδή από το α) γνωρίζουμε ότι ισχύει $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, συμπεραίνουμε ότι οι ακολουθίες u_n, v_n έχουν κοινό όριο, λ. Όμως από τη σχέση $t_n = 3u_n + 8v_n$ προκύπτει $\lim_{n\to\infty} t_n = 3\lim_{n\to\infty} u_n + 8\lim_{n\to\infty} v_n \Rightarrow 99 = 3\lambda + 8\lambda \Rightarrow \lambda = 9$.

Β μέθοδος

α) Υπό μορφή πινάκων έχουμε

$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, επομένως $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ και το σύστημα γράφεται

$X_{n+1} = AX_n, X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ και αναδρομικά προκύπτει $X_n = A^{n-1}X_1$. Για να λύσουμε την άσκηση, επομένως, θέλουμε να υπολογίσουμε τη δύναμη A^n και κυρίως το όριό της καθώς $n \to \infty$.
β) Για να το επιτύχουμε αυτό θα χρειαστούμε τις ιδιοτιμές του Α, οι οποίες είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{13}{12}\lambda + \frac{1}{12} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{12}, \lambda_2 = 1$
Ως γνωστόν οι ιδιόχωροι προκύπτουν από την επίλυση των αντίστοιχων ομογενών συστημάτων:

$$\left(A-\frac{1}{12}I\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

άρα το διάνυσμα $\begin{pmatrix}8 & -3\end{pmatrix}^t$ είναι μια βάση του ιδιόχωρου της ιδιοτιμής λ_1=1/12. Ομοίως, για τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής λ_2 =1,

$$\left(A-I\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

παίρνουμε το διάνυσμα $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^t$ είναι μια βάση του ιδιόχωρου. Έτσι, μέσω του θεμελιώδους πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων $P=\begin{pmatrix}8 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, έχουμε $P^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 8\end{pmatrix}$ και $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

γ) Αφού λοιπόν έχουμε $A=P\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$, η δύναμη του A που ζητάμε μπορεί εύκολα να υπολογισθεί

$$A^n=P\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{12}\right)^n & 0\\ 0 & 1^n\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}8\left(\frac{1}{12}\right)^n+3 & -8\left(\frac{1}{12}\right)^n+8\\ -3\left(\frac{1}{12}\right)^n+3 & 3\left(\frac{1}{12}\right)^n+8\end{pmatrix}$$

και έτσι παίρνουμε

$$X_n=A^{n-1}X_1\Leftrightarrow X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}+\frac{3}{11}-\frac{8.12}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}+\frac{8.12}{11}\\ -\frac{3}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}+\frac{3}{11}+\frac{3.12}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}+\frac{8.12}{11}\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}u_n=\frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}+\frac{3}{11}-\frac{8.12}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}+\frac{8.12}{11}\\ v_n=-\frac{3}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}+\frac{3}{11}+\frac{3.12}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}+\frac{8.12}{11}\end{cases}$$

Λαμβάνοντας τέλος το όριο $n\to\infty$, *έχουμε* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}=0$, από όπου προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n=\frac{3}{11}+\frac{8\times12}{11}=9$, που συμφωνεί με αυτό που βρήκαμε πιο πάνω με τη μέθοδο Α.

Άσκηση 6. (15 μον)

α) (6 μον.) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$, **ii)** $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{2x^3+4x^2+3x+6}$

β) (5 μον.) Θεωρήστε τις ακολουθίες $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, **και** $v_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n=1,2,3,....$ **και δείξτε ότι** $u_n<v_n$ **για κάθε *n = 1,2,3,….***
Ακολουθώντας τις οδηγίες των Κεφαλαίων 3 και 4 των σημειώσεων για το MATLAB (ή αντίστοιχες εντολες Octave) ορίστε τους 100 πρώτους όρους των ακολουθιών

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \text{ και } v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

και παραστήστε τους γραφικώς. Τι παρατηρείτε ως προς την μονοτονία τους; Με την υπόθεση ότι η ακολουθία $\{u_n\}$ **είναι γνησίως αύξουσα, ενώ η** $\{v_n\}$ **είναι γνησίως φθίνουσα δείξτε ότι τα όρια** $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ **και** $\lim_{n\to\infty}v_n=v$ **υπάρχουν (στο συνολο των πραγματικών αριθμών) και είναι ίσα.**

γ) (4 μον.) Χρησιμοποιώντας το δυωνυμικό ανάπτυγμα $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

, $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

δείξτε ότι: $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1+1+\dfrac{n(n-1)}{2!n^2}+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+....+\dfrac{1}{n^n}$ **, ενώ για την** $\{v_n\}$ **ισχύει:**

$v_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=1+\dfrac{n+1}{n}+\dfrac{(n+1)n}{2!n^2}+\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3!n^3}+....+\dfrac{1}{n^{n+1}}$ **. Παίρνοντας τώρα το όριο των δύο αυτών εκφράσεων δείξτε ότι:** $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+....+\dfrac{1}{k!}+....=e$ **, ο γνωστός αριθμός *e = 2.71828182845890….* της Μαθηματικής Ανάλυσης. Μέχρι ποιό *k* πρέπει να φτάσετε στη σειρά αυτή για να υπολογίσετε με ακρίβεια τα πρώτα 14 ψηφία του *e* ;**

Λύση.

(α) (i) Η άσκηση λύνεται με το γνωστό τέχνασμα του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης της παράστασης με την «συζυγή» της, οπότε με απλές πράξεις βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}-\left(x-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}\right)=1$$

όπου στο προτελευταίο βήμα διαιρέσαμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{x}$. Παρατήρηση: Η άσκηση λύνεται με απλούστερες παραστάσεις (αλλά με τον ίδιο τρόπο) αν χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $t=\sqrt{x}$.

(ii) Για να υπολογίσουμε το όριο αυτό παρατηρούμε πρώτα ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής μηδενίζονται για *x*=-2, επομένως έχουμε την αόριστη μορφή 0/0. Παραγοντοποιούμε λοιπόν αριθμητή και παρονομαστή, αναζητώντας τον παράγοντα (x+2), οποίος μπορεί να απαλειφεί και από τους δύο. Έτσι βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{2x^3+4x^2+3x+6}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(2x^2+3)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{2x^2+3}=\frac{12}{11}$$

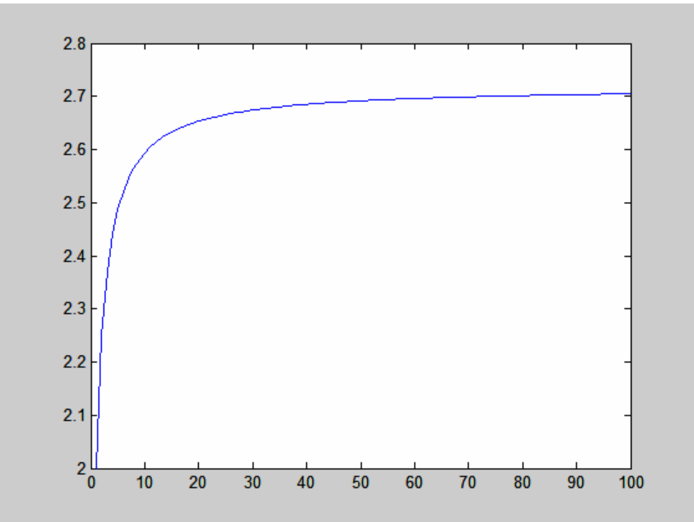
(β)

Η ακολουθία u_n είναι φραγμένη άνωθεν από την ακολουθία v_n αφού ισχύει για κάθε n =1,2,3,..:

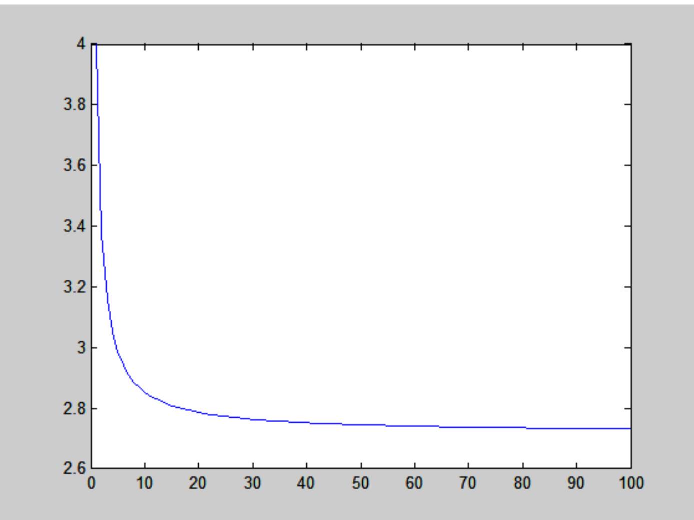
$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=v_n \quad \textbf{(1)}$$

Με τους παρακάτω αριθμητικούς υπολογισμούς

```
>> n=1:100;
>> un=(1+1./n).^n;
>> plot(n,un)
```

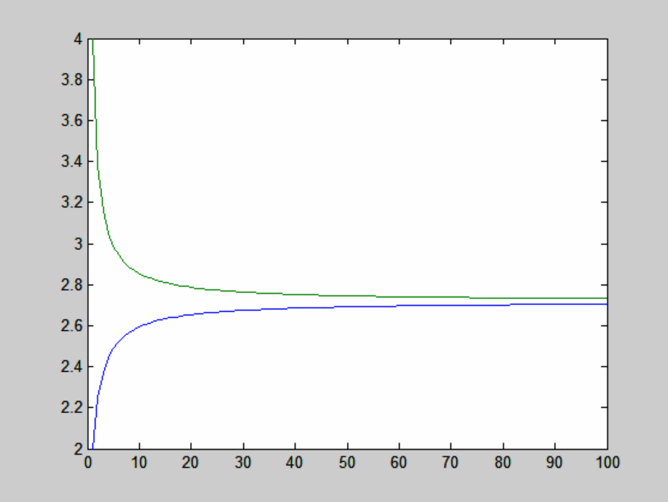



```
>> vn=(1+1./n).^(n+1);
>> plot(n,vn)
```



Ή μαζί

>>plot(n,un,n,vn)



παρατηρούμε ότι οι δύο δοθείσες ακολουθίες είναι η μεν u_n γνησίως αύξουσα, η δε v_n γνησίως φθίνουσα βλ. (γ) για την απόδειξη). Από τον υπολογισμό αυτό παρατηρούμε επίσης ότι και οι δύο φαίνεται να έχουν όριο και μάλιστα να τείνουν προς τον ίδιο αριθμό. Αυτό μπορούμε να το υποστηρίξουμε και με τους κάτωθι συλλογισμούς:

Υποθέτοντας ότι η u_n είναι αύξουσα και η v_n φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι και οι δύο έχουν όριο αφού είναι και φραγμένες. Η u_n άνωθεν (π.χ. από τον πρώτο όρο της v_n) και η v_n κατωθεν (π.χ. από τον πρώτο όρο της u_n). Εφόσον όμως **υπάρχουν τα όρια αυτά, πρέπει να είναι και ίσα** αφού ισχύει: $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .1 = \lim\limits_{x\to\infty} u_n$

(γ) Για την απόδειξη του ότι $e = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{k!}+....$

παραπέμπουμε στο Συνοδευτικό Υλικό: Πρόταση 2.9.1, σελ. 42 και Πρόταση 2.9.3, σελ. 45 του κεφαλαίου «Ακολουθίες» του Λογισμού.

(Σημειώστε ότι η ανισότητα Bernoulli που χρησιμοποιείται εκεί βρίσκεται στην Πρόταση 2.5.2 της σελ. 21). Στις προτάσεις αυτές βρίσκεται και απόδειξη της μονοτονίας των ακολουθιών u_n και v_n.

Για να υπολογίσουμε αριθμητικά το άπειρο άθροισμα της σειράς $e = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ (και άρα το κοινό όριο των ακολουθιών) με ακρίβεια 14 ψηφίων όπως ζητάει η άσκηση χρειάζεται να προσθέσουμε τους όρους της, για k = 0,1,2,…K, και να παρατηρήσουμε τον αριθμό των ψηφίων του αποτελέσματος, που σταθεροποιούνται για κάθε K:

K	2	4	6	8	12	16
Αθροισμα	2.5	2,708333333	2,7180555	2,7182787698	2.71828182828	***2.7182818284590***

Άσκηση 7. (10 μον)

α) (5 μον.) Αποδείξτε ότι η σειρά $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}$ συγκλίνει και βρείτε το άθροισμά της. (Υπόδειξη: Η *S* είναι τηλεσκοπική σειρά.)

β) (5 μον) Δίνεται ο περιοδικός δεκαδικός αριθμός *s*=4,513513513.... Να βρεθεί ο ρητός αριθμός από τον οποίον παράγεται ο *s*.
(Υπόδειξη: Εκφράστε τον *s* με τη βοήθεια μιας γεωμετρικής σειράς).

Λύση.
α) Παρατηρώντας ότι η σειρά είναι τηλεσκοπική γράφουμε το δοθέν άθροισμα:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-.....-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}$$

αφού οι όροι του μερικού αθροίσματος S_n στην τελευταία παρένθεση αλληλοαναιρούνται, εκτός από τον πρώτο και τον τελευταίο: Έτσι, ο μεν τελευταίος τείνει στο μηδέν, στο όριο $n\to\infty$, ο δε πρώτος αποτελεί το άθροισμα της σειράς S.

β) Ο αριθμός *s* γράφεται ως εξής:

$$s=4+\frac{513}{1000}+\frac{513}{1000^2}+\frac{513}{1000^3}+\cdots=4+513\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000^n}$$

Παρατηρώντας ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1000^n}-1.$$

διαπιστώνουμε ότι η σειρά του δεύτερου μέρους είναι γεωμετρική, δηλαδή έχει πρώτο όρο το 1 και οι όροι της σχηματίζουν μια ακολουθία γεωμετρικής προόδου με λόγο r=1/1000. Έτσι, επειδή $|r|<1$, αυτή η σειρά συγκλίνει και το άθροισμά της είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1000^n}=\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{1000}{999}.$$

Άρα, τελικά:

$$s=4+513\left(\frac{1000}{999}-1\right)=4+\frac{513}{999}=\frac{4509}{999}=\frac{501}{111}.$$

Συμπερασματικά, η παρούσα άσκηση μας δείχνει πως μπορούμε να γράψουμε σαν κλάσμα κάθε αριθμό του οποίου η δεκαδική αναπαράσταση καταλήγει σε μία επ'άπειρον επαναλαμβανόμενη σειρά ψηφίων.

Άσκηση 8. (10 μον)

Μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(i) $a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}\frac{1}{2^n}$ **(ii)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n^n}{n!}$, **για διάφορες τιμές του** $a>0$

Λύση.

(i) Θέτουμε $a_n=\frac{n+1}{n+2}\frac{1}{2^n}$. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου, σύμφωνα με το οποίο:

Αν για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως. Στην προκειμένη περίπτωση $a_n > 0$, για κάθε n, άρα εξετάζουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}.\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{1}{2} < 1$$

και αφού παίρνουμε αριθμό μικρότερο του 1, συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου.

(ii)

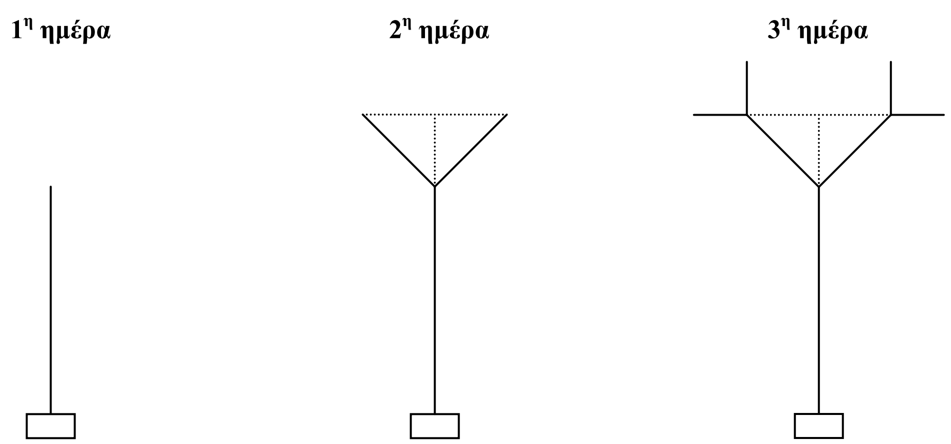
Θέτουμε $a_n = \frac{a^n n^n}{n!}$. Θα εφαρμόσουμε και εδώ το κριτήριο του λόγου, σύμφωνα με το οποίο, αφού $a_n > 0$, για κάθε n, αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει. Εξετάζοντας το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{a^n n^n} = a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}.\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = a\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = a\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae$$

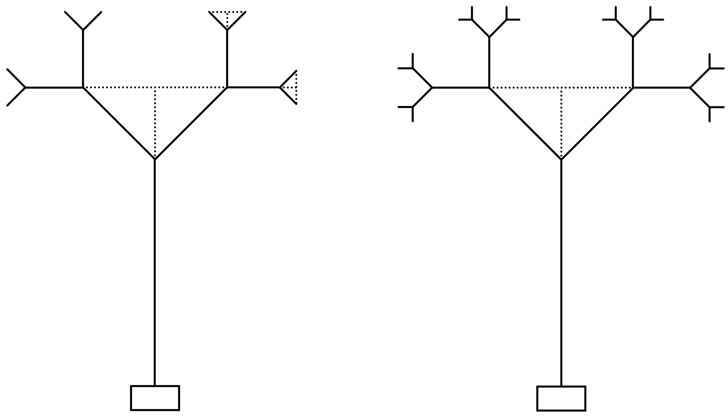
όπου θεωρήσαμε *a* >0 και χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα της άσκησης 6(β), παρατηρούμε ότι για να είναι αυτό μικρότερο του 1, πρέπει να ισχύει 0 < *ae*<1, δηλαδή *a* <1/*e*. Σύμφωνα με το ίδιο κριτήριο, συμπεραίνουμε επίσης ότι η σειρά αποκλίνει αν *a* >1/*e* , ενώ για *a* =1/*e δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση της σειράς*..

Άσκηση 9. (10 μον)

Το «*απειρόδενδρο*» είναι ένα φανταστικό φυτό εσωτερικού χώρου που μεγαλώνει με τον ακόλουθο τρόπο: Την 1η ημέρα υψώνεται κατά 1μ. Τη 2η αναπτύσσονται δύο καινούργια κλαδιά μήκους 1/2μ. το καθένα, κάθετα μεταξύ τους και με γωνία 45^o από το αρχικό κλαδί, όπως δείχνει η παρακάτω εικόνα. Τη 3η ημέρα εμφανίζονται, με τον ίδιο τρόπο, σε κάθε άκρο, δύο καινούργια κλαδιά, μισού μήκους από τα κλαδιά που είχαν εμφανισθεί την προηγούμενη ημέρα (δηλ. μήκους 1/4μ. το καθ' ένα) και αυτό συνεχίζεται καθημερινά.



4^{η} ημέρα **5^{η} ημέρα**



Εικόνα: Κατασκευάζοντας ένα «απειρόδενδρο» εσωτερικού χώρου!

α) Ποιό είναι το πλήθος των καινούργιων κλάδων που εμφανίστηκαν τη *n* – οστή μέρα και ποιό είναι το μήκος καθενός από αυτά;
β) Ποιό είναι το ολικό πλήθος και ποιο το ολικό μήκος των κλάδων ως συνάρτηση του αριθμού των ημερών *n* ;
γ) Αν η διαδικασία αυτή συνεχισθεί, για ένα αριθμό ημερών που τείνει στο άπειρο, είναι δυνατόν ένα τέτοιο δένδρο να χωρέσει στο σαλόνι σας χωρίς να εμποδίζεται ο περιβάλλων χώρος;

Λύση
Έστω n είναι το πλήθος των ημερών (βημάτων), δηλ. n =1, 2, 3, … .
α) Όπως φαίνεται και από το σχήμα, στο βήμα n το πλήθος των καινούργιων κλάδων είναι 2^{n-1}, ενώ το μήκος ενός καινούργιου κλάδου είναι $1/2^{n-1}$
β) Επομένως, το ολικό πλήθος των κλάδων είναι μια γεωμετρική σειρά που εύκολα αθροίζεται κατά τα γνωστά: $A_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^n - 1$. Το μήκος των κλάδων την n ημέρα για n=1, 2, 3, … είναι $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = n$. Άρα, το ολικό μήκος των κλάδων είναι $G = \lim_{n\to\infty} G_n = \infty$!!
γ) Έστω l το μήκος μίας διαδρομής από τη ρίζα έως το τελευταίο φύλλο του. Τότε

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2 .$$

Επομένως, ένα τέτοιο δένδρο είναι δυνατόν να χωρέσει στο σαλόνι μας, διότι παρ’ όλο το άπειρο μήκος των κλάδων του περιέχεται σε μία επιφάνεια πεπερασμένου εμβαδού και συγκεκριμένα εντός κύκλου με κέντρο το σημείο της πρώτης διακλάδωσης και ακτίνα 1.

Άσκηση 10. (5 μον)

Ακολουθώντας τις οδηγίες των Κεφαλαίων 3 και 4 των σημειώσεων για το MATLAB (ή αντιστοιχες εντολές Octave) γραψτε ένα κώδικά που να υπολογίζει τα μερικά αθροίσματα των σειρών πραγματικών αριθμών

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}\quad \textbf{και}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}.$$

Τι παρατηρείτε ως προς τη σύγκλισή τους;

Λύση

Αν προγραμματίσουμε το Matlab/Octave ως εξής:

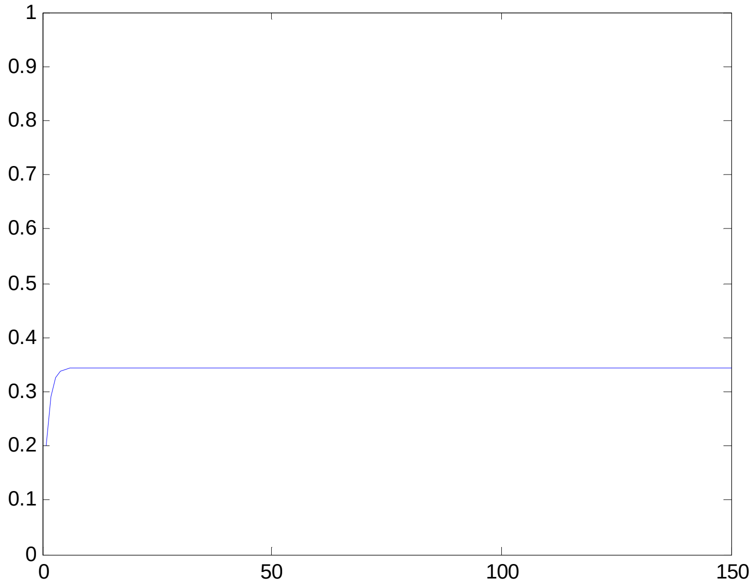
```
>> clear all
>> syms n
>> symsum(1/3^n,1,Inf)
```

παίρνουμε για την πρώτη σειρά τη σωστή απάντηση που γνωρίζουμε ότι είναι ½. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες εντολές όμως παρατηρούμε για τις δύο τελευταίες σειρές ότι δεν συγκλίνουν σε κάποιον πραγματικό αριθμό παρ' όλο που η δεύτερη είναι γνωστό ότι συγκλίνει, αφού φράσσεται άνωθεν από συγκλίνουσα σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2}$. Αντίστοιχα η τρίτη σειρά αποκλίνει, αφού φράσσεται κάτωθεν από αποκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+2}>\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\infty$. Αυτό πρέπει να οφείλεται στο ότι με την εντολή symsum( ) ο αλγόριθμος προσπαθεί να κατατάξει τη σειρά που του δίνουμε σε κάποιες γνωστές, οπότε εμφανίζει αδυναμία και …εγκαταλείπει την προσπάθεια! Αν όμως χρησιμοποιήσουμε την εντολή cumsum( ), η οποία απλώς εκτελεί το άθροισμα, τότε παίρνουμε σωστά αποτελέσματα:

Για τη δεύτερη σειρά η λύση σε Matlab/Octave είναι:

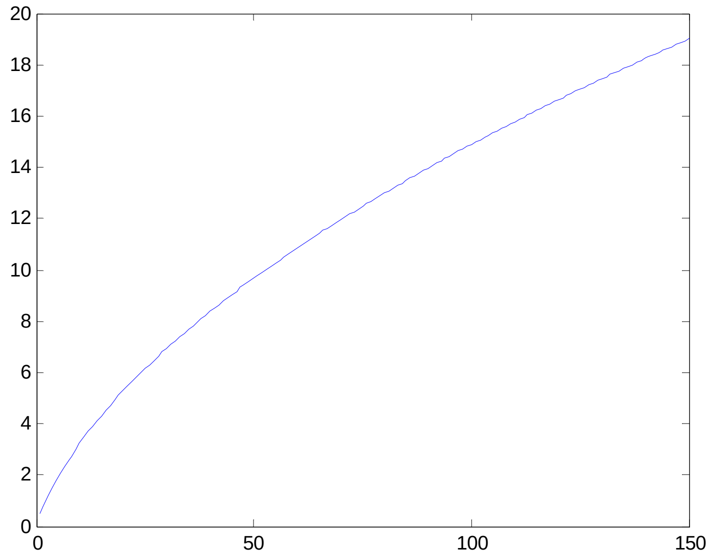
```
>> clear all
>> n=1:150;
>> s1=cumsum(1./(3.^n+2));
>> plot(s1)
>> axis([0 150 0 1])
```

οπότε σχεδιάζοντας το αποτέλεσμα, βρίσκουμε για 150 επαναλήψεις ότι η σειρά συγκλίνει πολύ γρήγορα, στο αποτέλεσμα 0.343575, όπως δείχνει το κάτωθι σχήμα:



Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για την τρίτη σειρά βρίσκουμε ότι μετά από 150 επαναλήψεις το άθροισμα εξακολουθεί να αυξάνει:

```
>> clear all
>> n=1:150;
>> s1=cumsum(1./(sqrt(n)+1));
>> plot(s1)
>>
```



Ακόμα και αν αυξήσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων σε 3000, ή και 50000, παρατηρούμε την ίδια αύξηση του αθροίσματος πράγμα που δείχνει ότι η σειρά αποκλίνει, όπως άλλωστε γνωρίζουμε ότι συμβαίνει από την σύγκρισή της με την αποκλίνουσα σειρά που παραθέσαμε πιο πάνω.
