ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: **9 Φεβουαρίου 2007**
Ημερομηνία Παράδοσης της Εργασίας από τον Φοιτητή: **16 Μαρτίου 2007**

Οι ασκήσεις της εργασίας αναφέρονται στα θέματα :

Ενότητα 4 (Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης)
Ενότητα 5 (Παράγωγος)
Ενότητα 6 (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)
Ενότητα 7 (Ακρότατα)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γενικά Μαθηματικά Ι Λογισμός μιας Μεταβλητής Τόμος Α’, του Γεωργίου Δάσιου, καθώς και

Στοιχεία Πιθανοτήτων 1

από το Κεφάλαιο Πιθανότητες 1 που περιέχεται στο Συνοδευτικό Υλικό, στη διεύθυνση της ΠΛΗ12: http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm

Βοηθητικό υλικό: Συμβουλευτείτε επίσης το κάτωθι υλικό που υπάρχει στη διεύθυνση της ΠΛΗ12:

Από το ΣΕΥ: **Λογισμός:** Συναρτήσεις , Όρια και Συνέχεια, Παράγωγοι , Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού

Άσκηση 1. (10 μον.)

(α) (6 μον.) Να υπολογιστούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ όπου $ab \neq 0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x\sin x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to e^+}\left(\ln(x-e)\cdot(\ln x-1)\right)$

(β) (4 μον.) Να προσδιοριστεί το $a\in\mathbb{R}$ ώστε η κάτωθι συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x = 1$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x-1}+a^2x-1, & \text{αν } x<1\\[2mm] 2x^2-\dfrac{a}{2}, & \text{αν } x\geq 1\end{cases}$$

ΛΥΣΗ:

(α)

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin ax}{ax}\dfrac{bx}{\sin bx})=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}$. Για το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}$, θέτουμε $u=ax\to 0$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$. Όμοια $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=\dfrac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}}=1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$

(ii) Εδώ χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\cos a-\cos b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{b-a}{2}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{2x+4x}{2}\sin\dfrac{4x-2x}{2}}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\sin x}{x\sin x}=$

$=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=6\cdot 1=6$

(iii) $\lim\limits_{x\to e^+}\ln(x-e)\cdot(\ln x-1)\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to e^+}\ln(x-e)\cdot(\ln\dfrac{x}{e})\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln(x-e)}{1/\ln(x/e)}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\left(\ln(x-e)\right)'}{\left(1/\ln(x/e)\right)'}$

$$= \lim_{x \to e^+} \frac{\frac{1}{x-e} \cdot (x-e)'}{-\frac{\left(\ln \frac{x}{e}\right)'}{\left(\ln \frac{x}{e}\right)^2}} = \lim_{x \to e^+} \frac{\frac{1}{x-e}}{-\frac{\frac{1}{x}}{\left(\ln \frac{x}{e}\right)^2}} = \lim_{x \to e^+} \frac{x\left(\ln \frac{x}{e}\right)^2}{-(x-e)} \overset{\frac{0}{0}}{=} - \lim_{x \to e^+} \frac{\left(x\left(\ln \frac{x}{e}\right)^2\right)'}{(x-e)'}$$

$$= - \lim_{x \to e^+} \frac{1 \cdot \left(\ln \frac{x}{e}\right)^2 + x \cdot 2 \ln \frac{x}{e} \cdot \frac{1}{\frac{x}{e}} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)'}{1} = - \lim_{x \to e^+} \left(\left(\ln \frac{x}{e}\right)^2 + x \cdot 2 \ln \frac{x}{e} \cdot \frac{1}{\frac{x}{e}} \cdot \frac{1}{e}\right) =$$

$$= - \lim_{x \to e^+} \left(\left(\ln \frac{x}{e}\right)^2 + 2 \ln x - 2\right) = 0$$

β) Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (\frac{2x - \sqrt{x^2+3}}{x-1} + a^2 x - 1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x - \sqrt{x^2+3}}{x-1} + a^2 - 1$

Αλλά, $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x - \sqrt{x^2+3}}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{4x^2 - x^2 - 3}{(x-1)(2x + \sqrt{x^2+3})} = \lim_{x \to 1^-} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x + \sqrt{x^2+3})} =$

$= \lim_{x \to 1^-} \frac{3(x+1)}{2x + \sqrt{x^2+3}} = \frac{6}{2 + \sqrt{4}} = \frac{3}{2}$. Επομένως $\lim_{x \to 1^-} f(x) = a^2 + \frac{1}{2} = f(1)$.

Ακόμη, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x^2 - \frac{a}{2}) = 2 - \frac{a}{2}$. Για να υπάρχει το όριο $\lim_{x \to 1} f(x)$ και να είναι η f συνεχής στο 1 θα πρέπει

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, δηλαδή, $a^2 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{a}{2} \Leftrightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$

Άρα $a = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$

Άσκηση 2. (10 μον.)

(α) (5 μον.) Δίνονται δύο συναρτήσεις *f(x)* και *g*(*x*), παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β) και ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in (\alpha, x_0) \\ g(x), \ x \in [x_0, \beta) \end{cases}$$

Αν $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$, να δειχθεί ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και αντιστρόφως,
αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$.

(β) (5 μον.) Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί *a*,*b* ώστε η συνάρτηση φ που ορίζεται παρακάτω να είναι παραγωγίσιμη στο 0:

$$\varphi(x)=\begin{cases} a(x+1), & x\in(-3,0) \\ 2e^{bx}, & x\in[0,4) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ:

(α) Έστω $f(x_0)=g(x_0)$ και $f'(x_0)=g'(x_0)$. Έχουμε τότε ότι

$$\varphi'_\alpha(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_a{}'(x_0)=f'(x_0)$$

$$\varphi'_\delta(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'_\delta(x_0)=g'(x_0)=f'(x_0)$$

Άρα $\varphi_a{}'(x_0)=\varphi'_\delta(x_0)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f(x_0)=g(x_0)$ και $f'(x_0)=g'(x_0)$.

Εφ' όσον η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι και συνεχής στο x_0, άρα

$$\lim_{x\to x_0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0^+}\varphi(x)=\varphi(x_0) \text{ δηλαδή } \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}g(x)=\varphi(x_0)$$

Επειδή οι *f*, *g* είναι παραγωγίσιμες, είναι και συνεχείς. Επομένως $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ και $\lim_{x\to x_0^+}g(x)=g(x_0)$. Άρα $f(x_0)=g(x_0)$.

Επειδή η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι $\varphi'_a(x_0)=\varphi'_\delta(x_0)$ άρα

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Leftrightarrow$$

$$f_\alpha{}'(x_0)=g_\delta{}'(x_0)\Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0).$$

(β) Η φ παραγωγίσιμη στο 0 τότε και μόνο, εάν $f(0)=g(0)$ και $f'(0)=g'(0)$ όπου $f(x)=a(x+1)$ και $g(x)=2e^{\beta x}$, $f'(x)=\alpha$ και $g'(x)=2\beta e^{\beta x}$, άρα $f(0)=g(0)\Leftrightarrow\alpha=2$
$f'(0)=g'(0)\Leftrightarrow\alpha=2\beta$, $\alpha=2,\beta=1$.

Άσκηση 3. (8 μον)

Μια μελέτη αποδοτικότητας στην πρωινή βάρδια ενός εργοστασίου δείχνει ότι ένας μέσος εργαζόμενος που φθάνει στην εργασία του στις 8 π.μ. παράγει $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$ μονάδες έργου t ώρες μετά.

α) Να υπολογιστεί ο ρυθμός παραγωγής του εργαζόμενου στις 11 π.μ.
β) Με ποιο *ρυθμό μεταβάλλεται* ο ρυθμός παραγωγής του εργαζόμενου συναρτήσει του t στις 11 π.μ.
γ) Να εκτιμηθεί η *μεταβολή* του ρυθμού παραγωγής ανάμεσα στις 11 και 11:10 π.μ. (Υπόδειξη: Η μεταβολή μια συνάρτησης f(x) στο διάστημα Δx ορίζεται ως Δf(x)= f '(x) Δx)
δ) Να υπολογίσετε την *πραγματική μεταβολή* του ρυθμού παραγωγής ανάμεσα στις 11 και 11:10 π.μ. και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό του γ).

ΛΥΣΗ:

1ος τρόπος

α) Ο ρυθμός παραγωγής των εργαζομένων δίνεται από την σχέση $Q'(t) = -3t^2 + 12t + 24$. Στις 11 π.μ. θα έχουν περάσει 3 ώρες άρα t=3 και ο ρυθμός παραγωγής θα είναι
$Q'(3) = -3(3)^2 + 12(3) + 24 = 33$ μονάδες ανά ώρα.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του ρυθμού παραγωγής δίνεται από την δεύτερη παράγωγο δηλαδή
$Q''(t) = -6t + 12$

Στις 11 π.μ. ο ρυθμός μεταβολής του ρυθμού παραγωγής θα είναι $Q''(3) = -6(3) + 12 = -6$, μονάδες ανά ώρα, δηλαδή η παραγωγικότητα μειώνεται κατά 6 κομμάτια ανά ώρα.

γ) Τα 10 λεπτά αντιστοιχούν στο 1/6 της ώρας. Για να εκτιμηθεί η μεταβολή του ρυθμού παραγωγής $Q'(t)$ που οφείλεται στη μεταβολή του χρόνου t κατά Δt=1/6 της ώρας. Εφαρμόζουμε τον παρακάτω προσεγγιστικό τύπο:

$\Delta Q' \approx Q''(t)\Delta t$ όπου t=3 και Δt=1/6 δηλαδή $\Delta Q' = -6(\frac{1}{6}) = -1$ μονάδες ανά ώρα. Άρα ο ρυθμός παραγωγής από 33 μονάδες ανά ώρα στις 11 θα μειωθεί προσεγγιστικά 1 μονάδα την ώρα, δηλαδή σε 32 μονάδες τα υπόλοιπα 10 λεπτά.

δ) Για τον υπολογισμό της πραγματικής μεταβολής από $t = 3$ στο $t = 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$

Η πραγματική μεταβολή του ρυθμού παραγωγής είναι :

$Q'(\frac{19}{6}) - Q'(3) = [-3(\frac{19}{6})^2 + 12(\frac{19}{6}) + 24] - [-3(3)^2 + 12(3) + 24] \approx 31.92 - 33 = -1.08$ μονάδες ανά ώρα άρα η πραγματική παραγωγή θα είναι 31.92 μονάδες ανά ώρα στις 11 και 10 λεπτά.

2ος τρόπος

Η παραγωγή μονάδων έργου στο χρόνο *t* είναι

$$Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$$

α) Ο ρυθμός (μεταβολής της) παραγωγής ενός εργαζομένου μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t_0 είναι

$$q_\mu(t)=\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}=-\left(t^2+tt_0+t_0^2\right)+6\left(t+t_0\right)+24.$$

Αυτή είναι η μεταβολή της παραγωγής ανά μονάδα του χρόνου. Όταν $t = t_0$, τότε

$$q_\mu(t)=-3t^2+12t+24.$$

Επομένως, ο ρυθμός παραγωγής στη διάρκεια των τριών πρώτων ωρών είναι

$$q_\mu(3)=33.$$

β) Ο λόγος (ρυθμός) μεταβολής του ρυθμού παραγωγής είναι

$$\lambda_\mu(t)=\frac{q_\mu(t)-q_\mu(t_0)}{t-t_0}=-3\left(t+t_0\right)+12$$

και για $t = t_0$ έχουμε

$$\lambda_\mu(t)=-6t+12.$$

Επομένως, $\lambda_\mu(3)=-6$.

γ) Η εκτίμηση της μεταβολής είναι $\lambda_\mu(t+1/6)-\lambda_\mu(t)=-1$.

δ) Η πραγματική μεταβολή είναι $\Delta q_\mu(t)=q_\mu(t+1/6)-q_\mu(t)=-t+23/12$. Άρα για $t = 3$, $\Delta q_\mu(3)=-13/12=-1,08\overline{3}$.

Άσκηση 4. (10 μον)

α) (6 μον.) Υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

(i) $f(x)=\ln\dfrac{x^4}{(3x^2+4)^2}$ (ii) $f(x)=e^{\cos^2(x^2)}$

(iii) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $x\neq 0$ (Υπόδειξη: Παραγωγίστε πρώτα τον λογάριθμο της συνάρτησης).

β) (4 μον.) Να αποδειχθεί ότι $x+1\le e^x\le xe^x+1, x\in\mathbb{R}$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

ΛΥΣΗ:

α)

(i) $\forall x\in\mathbf{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{\dfrac{x^4}{(3x^2+4)^2}}\cdot\left(\frac{x^4}{(3x^2+4)^2}\right)'=\frac{(3x^2+4)^2}{x^4}\cdot\frac{4x^3(3x^2+4)^2-x^4\cdot 2(3x^2+4)\cdot 6x}{(3x^2+4)^4}$$

$$f'(x)=\frac{4(3x^2+4)-12x^2}{x(3x^2+4)}=\frac{16}{x(3x^2+4)}$$

(ii) $\forall x \in \mathbf{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=e^{\cos^2(x^2)}\cdot 2\cos(x^2)\cdot\left(\cos(x^2)\right)'=e^{\cos^2(x^2)}\cdot 2\cos(x^2)\cdot\left(-\sin(x^2)\cdot 2x\right)$$

$$f'(x)=-4xe^{\cos^2(x^2)}\cdot\cos(x^2)\cdot\sin(x^2)=-2xe^{\cos^2(x^2)}\cdot\sin(2x^2)$$

(iii) $\forall x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

1^{ος} τρόπος

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\left(e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)'=e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(ln\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\ln x^{-1}+1\right)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot(1-\ln x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x-1}{x^2}$$

2^{ος} τρόπος

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]'=\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]'\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\ln x-1}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\frac{\ln x-1}{x^2}$$

β) Αν $x>0$, τότε η ανισότητα $x+1\le e^x\le xe^x+1$ γράφεται:

$$x\le e^x-1\le xe^x \quad \text{ή} \quad 1\le\frac{e^x-1}{x}\le e^x \ (1)$$

Για τη συνάρτηση $f(t)=e^t$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[0,x]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{e^x-e^0}{x-0}=f'(\xi) \quad \text{ή} \quad \frac{e^x-1}{x}=e^{\xi} \ (2)$$

επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα και $0<\xi<x$, έχουμε

$$e^0<e^{\xi}<e^x \text{ ή λόγω της (2) } 1<\frac{e^x-1}{x}<e^x$$

- Αν $x<0$, τότε η απόδειξη είναι ανάλογη, μόνο που τώρα χρησιμοποιούμε το διάστημα $[x,0]$

Αν $x=0$, η ανισότητα γίνεται $0+1\le e^0\le 0\cdot e^0+1$ που ισχύει.

Άσκηση 5. (12 μον)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 1)|x^2 - 4|$, με $x \in (-\infty, \infty)$. Να προσδιορίσετε:

(i) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι α) αύξουσα, β) φθίνουσα

(ii) Τα ακρότατά της (μέγιστα και ελάχιστα).

(iii) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία α) στρέφει τα κοίλα άνω, β) στρέφει τα κοίλα κάτω.

(iv) Τα σημεία καμπής.

(v) Τα σημεία της τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy.

(vi) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία δώστε μία γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ΛΥΣΗ:

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f = $ Ρ και

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-1)(x^2-4), & \alpha\nu\ x \le -2\ \acute{\eta}\ x \ge 2 \\ -(x^2-1)(x^2-4), & \alpha\nu\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο Ρ. Επομένως η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Η f είναι και άρτια, διότι $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in$Ρ, άρα η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Επί πλέον, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, άρα δεν υπάρχουν ασύμπτωτες στα $+\infty$ και $-\infty$.

Για να βρούμε τα ακρότατα, δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbf{R} - \{\pm 2\}$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x^2-1)(x^2-4)-0}{x-2} = -12$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x^2-1)(x^2-4)-0}{x-2} = 12$$

Άρα δεν ορίζεται το $f'(2)$. Ομοίως δεν ορίζεται το $f'(-2)$. Επομένως

$$f'(x) = \begin{cases} 4x\left(x^2 - \dfrac{5}{2}\right), & \alpha\nu\ x < -2\ \acute{\eta}\ x > 2 \\ -4x\left(x^2 - \dfrac{5}{2}\right), & \alpha\nu\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

απ' όπου για $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm\sqrt{5/2}$. Τελικώς

- $f'(x) > 0$ στα $(-2, -\sqrt{5/2})$, $(0, \sqrt{5/2})$, $(2, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ στα $(-\infty, -2)$, $(-\sqrt{5/2}, 0)$, $(\sqrt{5/2}, 2)$.

ii) Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (τ.μ) στα $\pm\sqrt{5/2}$ το 9/4, τοπικό ελάχιστο (τ.ε.) στα ± 2 το 0 και ολικό ελάχιστο (ο.ε) στο 0 το -4.

iii) Ακόμη

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 - 10, & \alpha\nu\ x < -2\ \acute{\eta}\ x > 2 \\ -12x^2 + 10, & \alpha\nu\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

δηλαδή

- $f''(x) > 0$ στα $(-\infty, -2)$, $(-\sqrt{5/6}, \sqrt{5/6})$, $(2, +\infty)$

o $f''(x) < 0$ στα $(-2, -\sqrt{5/6})$, $(\sqrt{5/6}, 2)$.

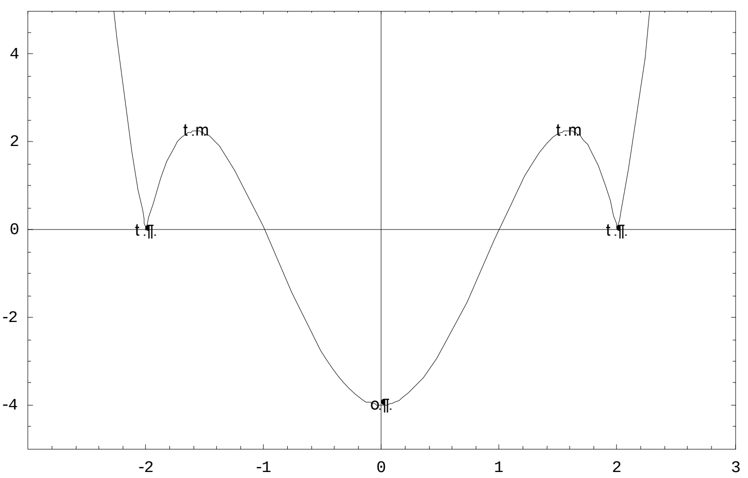
iv) Τα σημεία καμπής είναι τα $\pm\sqrt{5/6}$

v) Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι τα

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$ ή $x = 2$ ή $x = -2$
για $x = 0 \Rightarrow f(x) = -4$

vi) Γραφική παράσταση

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{5/2}$		-1		$-\sqrt{5/6}$		0		$\sqrt{5/6}$		1		$\sqrt{5/2}$		2	$+\infty$
f'	–		+	0	–		–		–	0	+		+		+	0	–		+
f''	+		–		–		–	0	+		+	0	–		–		–		+
f		0		9/4		0								0		9/4		0	
		τ. ε		τ. μ.				σ. κ.		ο. ε.		σ. κ.				τ. μ.		τ. ε.	



Άσκηση 6. (10 μον)

Ένα σούπερμαρκετ θέλει να εφαρμόσει μια βέλτιστη πολιτική αποθέματος στην πώληση χυμών από πορτοκάλι για το επόμενο έτος. Ο υπεύθυνος πωλήσεων κάνει την εκτίμηση ότι 1200 κιβώτια χυμών θα πουληθούν σε σταθερό ρυθμό κατά την διάρκεια του έτους. Η διεύθυνση του Supermarket σχεδιάζει κατά τη διάρκεια του έτους ένα αριθμό παραγγελιών (της ίδιας ποσότητας παραγγελίας κάθε φορά) για να αντιμετωπίσει την ζήτηση. Χρησιμοποιώντας το δεδομένο ότι

- το κόστος παραγγελίας είναι 75 € και
- το μέσο κόστος διατήρησης αποθέματος ενός κιβωτίου χυμών για ένα έτος είναι 4 €

(α) (8 μον.) Καθορίστε τον αριθμό παραγγελιών που ελαχιστοποιεί το κόστος αποθέματος. Το κόστος αποθέματος υπολογίζεται ως το άθροισμα του κόστους παραγγελίας και του κόστους διατήρησης, ως εξής: Ονομάστε x τον αριθμό παραγγελιών και y τον αριθμό των πακέτων που παραγγέλλουμε κάθε φορά και δείξτε ότι το συνολικό κόστος αποθέματος είναι C(x)=75x + 4800/x .

(β) (2μον.) Πως πρέπει να αλλάξει τις παραγγελίες του το σούπερμαρκετ αν οι πωλήσεις τετραπλασιαστούν, δηλαδή πουληθούν 4800 κιβώτια χυμών ενώ τα άλλα δεδομένα παραμένουν τα ίδια.

ΛΥΣΗ:

(α) Θέτουμε x>0 το πλήθος των παραγγελιών που τοποθετούνται κατά την διάρκεια του έτους και y το πλήθος των κιβωτίων που παραγγέλλουμε κάθε φορά. Ο αριθμός των κιβωτίων στο απόθεμα κάθε φορά κατά την διάρκεια μιας χρονικής περιόδου μειώνεται από y σε 0 κιβώτια. Επειδή το μέσο κόστος διατήρησης αποθέματος ενός κιβωτίου χυμών για ένα χρόνο είναι 4 € το συνολικό κόστος διατήρησης για όλα τα κιβώτια θα ανέρχεται σε $4y$ € (δηλαδή σαν να έχουμε ποσότητα y πακέτων όλη την διάρκεια του χρόνου στο σούπερμαρκετ).

Αφού x παραγγελίες τοποθετούμε των y κιβωτίων κάθε μία ο συνολικός αριθμός πακέτων κατά την διάρκεια του χρόνου είναι xy. Άρα $xy = 1200 \Rightarrow y = 1200/x$.

Ισχύει ότι:

Κόστος αποθέματος = Κόστος παραγγελίας + Κόστος διατήρησης , δηλαδή
C(x) = 75x+4 (1200/x)=75x+4800/x

Το κόστος γίνεται ελάχιστο ($C'(x) = 0$) όταν $75 - \frac{4800}{x^2} = 0$ και $C''(x) > 0$, δηλαδή όταν ο αριθμός των παραγγελιών είναι x=8 κατά την διάρκεια του χρόνου και άρα παραγγέλλουμε 150 κιβώτια κάθε φορά.

(β) Η μόνη αλλαγή στα προηγούμενα δεδομένα είναι ότι έχει τετραπλασιαστεί η ζήτηση δηλαδή $xy = 4800$, άρα y=4800/x, τότε το κόστος $C(x) = 75x + 4\frac{4800}{x}$. Θέτοντας $C'(x) = 0$ έχουμε $75 - \frac{19200}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 16$ και $C''(x) > 0$, άρα η βέλτιστη πολιτική είναι 16 παραγγελίες στην διάρκεια του χρόνου των 300 κιβωτίων ανά παραγγελία. Σημειώνουμε ότι αν και οι πωλήσεις τετραπλασιάσθηκαν η ποσότητα παραγγελίας διπλασιάσθηκε.

Άσκηση 7. (16 μον)

α) (2 μον.) Δίδεται η εξίσωση $f(x) = 0$, όπου $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ζητείται να υπολογίσουμε μια ρίζα αυτής ρ . Δοσμένης μιας αρχικής προσέγγισης της ρίζας, x_0 , δείξτε ότι μπορούμε να λάβουμε την επόμενη προσέγγιση, x_1, ως την τομή της εφαπτομένης ευθείας της $f(x)$ στο x_0 με τον άξονα των x, από τον τύπο: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

β) (2 μον.) Επαναλαμβάνοντας την ως άνω διαδικασία παίρνουμε την ακολουθία:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{n=0,1,2,3,….} \qquad (*)$$

η οποία παράγει διαδοχικά αριθμούς που προσεγγίζουν την ρίζα ρ και ονομάζεται επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson. Δουλεύοντας όπως στο παράδειγμα της σελ. 94 του βιβλίου, εξετάστε αν ικανοποιείται η συνθήκη που εξασφαλίζει την σύγκλιση της μεθόδου.

(γ) (2 μον.) Δίνεται η εξίσωση $\mathrm{f(x) = e^x - 4x^2 = 0}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bolzano, (σελ. 58 του βιβλίου), αποδείξτε ότι η ως άνω εξίσωση έχει ρίζες στο διάστημα (0,1) και (4,5).

(δ) (2 μον.) Χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία που περιγράφεται στις σελίδες 91-95 του βιβλίου, γράψτε την f(x) = 0 υπό τη μορφή προβλήματος εύρεσης σταθερού σημείου μιας συνάρτησης, $g(x)$, $g(x) = x$ και δείξτε ότι μια τέτοια επιλογή είναι και η $g(x) = 0.5\exp(x/2)$.

(ε) (3 μον.) Ελέγξτε αν για αυτή τη $g(x)$ είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση σε καθένα από τα διαστήματα (0,1) και (4,5) και αν ναι, προσδιορίστε την αντίστοιχη ρίζα με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων με χρήση του Matlab/Octave.

στ) (3 μον.) Εφαρμόστε τώρα τη μέθοδο Newton-Raphson επαναλαμβάνοντας την ως άνω σχέση (*) και προσδιορίστε πάλι τις ρίζες της f(x) = 0 με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων, χρησιμοποιώντας Matlab/Octave.

ζ) (2 μον.) Πόσες επαναλήψεις χρειαστήκατε με κάθε μια από τις ως άνω μεθόδους για να επιτύχετε την ακρίβεια αυτή; Πως συγκρίνετε την αποτελεσματικότητα των δύο μεθόδων;

ΛΥΣΗ:

α) Σχεδιάζοντας τη συνάρτηση $y = f(x)$ κοντά στο (άγνωστο) σημείο ρ όπου $f(\rho) = 0$, θεωρούμε ένα σημείο $x = x_0$ κοντά στο ρ, ως πρώτη προσέγγιση της ρίζας. Κατόπιν φέρουμε την ευθεία που εφάπτεται της $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, της οποίας η εξίσωση είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, και βρίσκουμε την τομή της ευθείας αυτής με τον άξονα των x θέτοντας $x = x_1$. Η ζητούμενη σχέση $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ προκύπτει κατόπιν πολύ εύκολα από απλή εφαρμογή της γεωμετρικής έννοιας της παραγώγου.

β) Γράφοντας $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$, n=0,1,2,…και παραγωγίζοντας την συνάρτηση $g(x_n)$, βρίσκουμε ότι $g'(x_n) = \dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2}$.

Με την προϋπόθεση λοιπόν ότι για x_n κοντά στο ρ το πηλίκο $\dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2}$ είναι φραγμένο, επειδή $f(\rho) = 0$, η παράγωγος $g'(x_n)$ μπορεί να γίνει πολύ μικρή ώστε να εξασφαλίζεται ότι $|g'(x_n)| < \mathrm{K} < 1$, που ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της μεθόδου.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - 4x^2$ που είναι συνεχής στο P άρα και στο [0,1]. Ακόμη $\mathrm{f(0)\cdot f(1) = 1\cdot(e-4) < 0}$. Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f στο (0,1). Η συνάρτηση $f(x) = e^x - 4x^2$ είναι συνεχής και στο [4,5] με $\mathrm{f(4)\cdot f(5) = (e^4 - 64)\cdot(e^5 - 100) < 0}$. Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της *f* και στο (4,5).

δ) Σύμφωνα με την επαναληπτική διαδικασία που περιγράφεται στις σελίδες 91-95 του βιβλίου σας, για την εύρεση μιας θετικής ρίζας της *f* έχουμε:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow e^x-4x^2=0 \Leftrightarrow 4x^2=e^x \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}e^x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, x>0$$

ε) Θεωρούμε την επαναληπτική διαδικασία $x_n=g(x_{n-1}), n=1,2,...(2)$. Η g είναι συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1) με $g'(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{x}{2}}$. Για την g υπάρχει η δεύτερη παράγωγος $g''(x)=\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}>0, \forall x\in \mathbf{R} \Rightarrow g'$ γν. αύξουσα στο [0,1]. Άρα

$$\begin{aligned}&g'(0)<g'(x)<g'(1), \forall x\in(0,1)\Rightarrow\\&0.25<g'(x)<0.4122,\ \forall x\in(0,1)\Rightarrow\\&|g'(x)|<0.4122<1,\ \forall x\in(0,1)\end{aligned}$$

Οπότε η g είναι συνάρτηση συστολής στο (0,1). Ακόμη επειδή η g είναι συνεχής στο [0,1] και η g' είναι θετική στο (0,1), η g θα είναι γν. αύξουσα στο [0,1], άρα:

$$g([0,1])=[g(0),g(1)]=[0.5,0.82]\subset[0,1]$$

Σύμφωνα λοιπόν με γνωστό θεώρημα η επαναληπτική διαδικασία (2) για κάθε αρχικό σημείο $x_0\in(0,1)$ θα συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της g στο (0,1), δηλαδή στη μοναδική ρίζα της *f* στο (0,1).

Ανάλογα για το διάστημα [4,5] έχουμε ότι η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [4,5] και ακόμη ότι η g'' είναι θετική στο (4,5), άρα η g' γν. αύξουσα στο [4,5] άρα:

$$\begin{aligned}&g'(4)<g'(x)<g'(5), \forall x\in(4,5)\Rightarrow\\&1.847<g'(x)<3.045,\ \forall x\in(4,5)\Rightarrow\\&|g'(x)|>1,\ \forall x\in(4,5)\end{aligned}$$

Άρα δεν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας (2) για την εύρεση της ρίζας της *f* που υπάρχει στο διάστημα (4,5).

Η μεταβλητή **xold** αντιστοιχεί στο x_{n-1} και παίρνει αρχική τιμή ίση με άπειρο ώστε να μπορέσει να ξεκινήσει η δομή επανάληψης while και να εκτελεστεί τουλάχιστον μία φορά, η μεταβλητή **xnew** αντιστοιχεί στο x_n και παίρνει αρχική τιμή 0.5. Το διάνυσμα x έχει ως στοιχεία τα σημεία της προσέγγισης.

Η δομή επανάληψης **while** εκτελείται όσο η απόλυτη διαφορά του δύο διαδοχικών προσεγγίσεων είναι μεγαλύτερη του 10^{-9}. Μόλις ικανοποιηθεί το κριτήριο η επαναληπτική διαδικασία σταματά. Μέσα στο while η xold παίρνει την τιμή της τελευταίας προσέγγισης, η xnew παίρνει την τιμή της νέας προσέγγισης και τοποθετείται ως τελευταίο στοιχείο στο διάνυσμα των προσεγγίσεων.

```
» format long
» xold=inf;
» xnew=0.5;
» x=[xnew];
» while abs(xold-xnew)>1e-09,
xold=xnew;
xnew=0.5*exp(xold/2);
x=[x;xnew];
```

```
end
» x

x =

   0.50000000000000
   0.64201270834387
   0.68925717009153
   0.70573279143778
   0.71157049650107
   0.71365049998119
   0.71439308382027
   0.71465838144806
   0.71475318632243
   0.71478706816849
   0.71479917742376
   0.71480350527972
   0.71480505206469
   0.71480560488977
   0.71480580247102
   0.71480587308714
   0.71480589832555
   0.71480590734583
   0.71480591056971
   0.71480591172193
   0.71480591213374
```

στ) Έστω $f(x) = e^x - 4x^2$. Τότε $f'(x) = e^x - 8x$ και

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-1)e^x - 4x^2}{e^x - 8x}$$

```
>> format long
>> xold=inf;
>> xnew=0.5;
>> x=[xnew];
>> while abs(xold-xnew)>1e-09,
xold=xnew;
xnew=xold-(exp(xold)-(4*xold^2))/(exp(xold)-8*xold);
x=[x;xnew];
end
>> x

x =

   0.50000000000000
   0.77590147548917
   0.71752170285783
   0.71481185992294
   0.71480591239145
```

0.71480591236278

ζ) Παρατηρούμε ότι για την πρώτη μέθοδο μετά από 21 επαναλήψεις οι δύο τελευταίες επαναλήψεις συμπίπτουν σε 8 δεκαδικά ψηφία, ενώ για τη Newton-Raphson χρειαστήκαμε 6 επαναλήψεις.

Σχόλια: Αν επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο στο διάστημα [4,5] παρόλο που δεν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση, για αρχική τιμή $x_0 = 4.5$ θα πάρουμε την αποτυχημένη προσπάθεια:

```
x =

  1.0e+003
   0.00450000000000
   0.00474386791818
   0.00535905031062
   0.00728908464291
   0.01913262782833
   7.13784888695490
                Inf
                Inf
```

ενώ για $x_0 = 4.1$ θα λάβουμε

```
x =

   4.10000000000000
   3.88395055315339
   3.48625500645796
   2.85759488766956
   2.08683854586570
   1.41945371858444
   1.01671788435083
   0.83128029847381
   0.75767023716005
   0.73029109651138
   0.72036184385464
   0.71679437937016
   0.71551694975952
   0.71506008440911
   0.71489675997612
   0.71483838230580
   0.71481751731060
   0.71481006001747
   0.71480739474836
   0.71480644217196
   0.71480610171817
   0.71480598003896
   0.71480593655045
   0.71480592100752
   0.71480591545243
```

0.71480591346703
0.71480591275744

δηλ. σύγκλιση μετά από 27 επαναλήψεις.

Άσκηση 8. (8 μον)

α) (6 μον.) Δίνεται η συνάρτηση f(x)=sinx-2x, x $\in$ R. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, με πιθανότητες P(A) και P(B) αντίστοιχα.
i) Αν A$\subseteq$B να αποδείξετε ότι 2P(A)+sin(P(B)) ≤ 2P(B)+sin(P(A)),
ii) Αν P(A) = π/4 δείξτε ότι $2f(P(A\bigcap B)) \geq \sqrt{2}-\pi$,
iii) Να αποδείξετε ότι $f(P(A-B)) \leq 0$

β) (2 μον.) Έστω η συνάρτηση f(x)=x^2+$(1-x)^2$, x$\in$[0,1]. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f. Αν A,B δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι $P^2(A)+P^2(B) \geq ½$.

ΛΥΣΗ:
α) Είναι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2 \prec 0$, για κάθε x $\in$ R. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.
Κατόπιν, έχουμε
i)
$$2P(A)+\eta\mu P(B) \leq 2P(B)+\eta\mu P(A) \Leftrightarrow \eta\mu P(B)-2P(B) \leq \eta\mu P(A)-2P(A) \Leftrightarrow f(P(B)) \leq f(P(A))$$
$\Leftrightarrow P(B) \geq P(A)$ που ισχύει αφού A$\subseteq$B.
ii) Στη συνέχεια, είναι $A\bigcap B \subseteq A$ οπότε
$$P(A\cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow f(P(A\cap B)) \geq f(P(A)) \Leftrightarrow f(P(A\cap B)) \geq \eta\mu\frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow f(P(A\bigcap B)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2f(P(A\bigcap B)) \geq \sqrt{2}-\pi$$
iii) Έχουμε $P(A-B) \geq 0$ οπότε $f(P(A-B)) \leq f(0) = 0$

β) Έχουμε $f(x) = x^2+(1-x)^2$, $x \in [0,1]$
$f'(x) = 2x + 2(1-x)(1-x)' = 2(2x-1)$
Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$,
$f'(x) \prec 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{2})$ και $f'(x) \succ 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{2}, 1]$

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο [0,1] είναι το $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
Επειδή τα A και B είναι συμπληρωματικά έχουμε ότι $B = A'$
Άρα $P(B) = P(A') = 1-P(A)$
Έστω $P(A) = x, x \in [0,1]$
$P^2(A)+P^2(B) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+(1-x)^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}$, που ισχύει από το προηγούμενο ερώτημα.

Άσκηση 9. (6 μον)

Μία πηγή στέλνει τρία γράμματα x,y,z με συχνότητα 30%, 20% και 50% αντίστοιχα. Ένας δέκτης λαμβάνει τα γράμματα με ένα σφάλμα, έτσι ώστε: Η πιθανότητα να πάρει κάποιος x, y, z, όταν στέλνεται x, είναι 0.7, 0.2, 0.1 αντίστοιχα, η πιθανότητα να πάρει κάποιος x, y, z, όταν στέλνεται y, είναι 0.3, 0.6, 0.1 αντίστοιχα και τέλος, η πιθανότητα να πάρει κάποιος x, y, z, όταν στέλνεται z, είναι 0.1, 0.5, 0.4 αντίστοιχα. Τα γράμματα εκπέμπονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και παίρνονται από το δέκτη στη σειρά που στάλθηκαν. Ορίζοντας τα γεγονότα:

X: η πηγή στέλνει x, Y: η πηγή στέλνει y, Z: η πηγή στέλνει z και

A: ο δέκτης λαμβάνει x, B: ο δέκτης λαμβάνει y, Γ: ο δέκτης λαμβάνει z ,

παρατηρήστε ότι από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξής πιθανότητες:

$$P(X) = 0.3 \quad , \quad P(Y) = 0.2 \quad , \quad P(Z) = 0.5 \quad ,$$
$$P(A|X) = 0.7 \quad , \quad P(B|X) = 0.2 \quad , \quad P(\Gamma|X) = 0.1$$
$$P(A|\mathrm{Y}) = 0.3 \quad , \quad P(B|\mathrm{Y}) = 0.6 \quad , \quad P(\Gamma|\mathrm{Y}) = 0.1,$$
$$P(A|Z) = 0.1 \quad , \quad P(B|Z) = 0.5 \quad , \quad P(\Gamma|Z) = 0.4$$

και απαντήστε στα κάτωθι ερωτήματα:

(α) Ποια η πιθανότητα να πάρουμε το σήμα yyx όταν εκπέμπεται yyx;
(β) Ποια η πιθανότητα να πάρουμε το σήμα yyx; (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Ολικής
Πιθανότητας).

ΛΥΣΗ:

Χρησιμοποιώντας τους ως άνω ορισμούς έχουμε:

(α) P(να πάρουμε το σήμα yyx όταν εκπέμπεται yyx)=P(να πάρουμε το σήμα y όταν εκπέμπεται y ΚΑΙ να πάρουμε το σήμα y όταν εκπέμπεται y ΚΑΙ να πάρουμε το σήμα x όταν εκπέμπεται x)=P((B|Y)$\cdot$(B|Y) $\cdot$(A|X))=0.6$\cdot$0.6$\cdot$0.7=0.252

(β) P(η πιθανότητα να πάρουμε το σήμα yyx;**)=**P(η πιθανότητα να πάρουμε το σήμα y ΚΑΙ η πιθανότητα να πάρουμε το σήμα y ΚΑΙ η πιθανότητα να πάρουμε το σήμα x)=P(B)P(B)P(A)
Για να υπολογίσουμε την P(B) θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας.

$$P(B) = P(X)P(B \mid X) + P(Y)P(B \mid Y) + P(Z)P(B \mid Z) =$$
$$0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.43$$

ομοίως βρίσκουμε ότι P(A)=0.32 και άρα τελικά
P(B)P(B)P(A)= $(0.43)^2 \cdot 0.32 = 0.06$.

Άσκηση 10. (10 μον)

α) (5 μον.) Το υπάρχον τέστ για συγκεκριμένη μορφή καρκίνου του εντέρου κάνει ορθή διάγνωση στο 95% των περιπτώσεων, δηλαδή το τέστ είναι θετικό με πιθανότητα 0.95 εάν ο εξεταζόμενος πράγματι πάσχει από καρκίνο και είναι αρνητικό με πιθανότητα 0.95 εάν δεν έχει την ασθένεια. Γνωρίζουμε ότι το ποσοστό των πασχόντων από αυτή τη μορφή του καρκίνου στη χώρα μας είναι 1 στις 10.000. Δεδομένου ότι το τέστ για το κύριο Χ είναι θετικό, είναι δικαιολογημένος ο υπερβολικός φόβος του κύριου Χ; Ποια είναι η πιθανότητα αυτός πράγματι να πάσχει από καρκίνο; Ποια ερμηνεία δίνετε στο αποτέλεσμά σας;
Υπόδειξη: Έστω Α το ενδεχόμενο «πάσχει από την ασθένεια» και Θ το ενδεχόμενο «το τέστ είναι θετικό». Παρατηρήστε ότι
$\mathrm{P(A) = 1/10000 = 0.0001,\ \ P(A') = P(1 - A) = 9999/10000 = 0.9999}$ και χρησιμοποιήστε τον τύπο του Bayes.

β) (5 μον.) Το 10% του πληθυσμού μιας αφρικανικής χώρας πάσχει από σοβαρή ασθένεια. Ένα άτομο για το οποίο υπάρχει υποψία ότι πάσχει από την ασθένεια υποβάλλεται σε δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους τέστ καθένα από τα οποία κάνει σωστή διάγνωση με πιθανότητα 90%. Ποια η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από τη ασθένεια i) Δεδομένου ότι και τα δύο τέστ είναι θετικά, ii) Δεδομένου ότι μόνο το ένα τέστ είναι θετικό; Τι παρατηρείτε;

Υπόδειξη: Έστω Α το ενδεχόμενο «πάσχει από την ασθένεια», Θ_1 το ενδεχόμενο «το τέστ 1 είναι θετικό», και Θ_2 το ενδεχόμενο «το τέστ 2 είναι θετικό» και αξιοποιήστε τις πιθανότητες:
$\mathrm{P(A) = 0.1,\ \ P(A') = 0.9,\ \ P(\Theta_1/A) = P(\Theta_2/A) = P(\Theta/A) = 0.9}$,
$\mathrm{P(\Theta_1'/A') = P(\Theta_2'/A') = P(\Theta'/A') = 0.9}$
και $\mathrm{P(\Theta_1\Theta_2/A) = \left[P(\Theta/A)\right]^2 = 0.81,\ \ P(\Theta_1\Theta_2/A') = \left[P(\Theta/A')\right]^2 = 0.01}$.

ΛΥΣΗ:

α) Έστω Α το ενδεχόμενο ότι ο κύριος Χ «πάσχει από την ασθένεια» και Θ το ενδεχόμενο «το τέστ είναι θετικό». Σύμφωνα με το τύπο Bayes έχουμε:

$$P(\mathrm{A}/\Theta) = \frac{P(A)\cdot P(\Theta/\mathrm{A})}{P(A)\cdot P(\Theta/\mathrm{A}) + P(A')\cdot P(\Theta/\mathrm{A}')} \qquad \begin{array}{l} P(A) = 1/10000 = 0.0001, \\ P(A') = 9999/10000 = 0.9999 \end{array}$$

$$P(\Theta/\mathrm{A}) = 0.95,\ \ P(\Theta/\mathrm{A}') = 0.05 \ \text{ και } \ P(\mathrm{A}/\Theta) = \frac{0.0001\times 0.95}{0.0001\times 0.95 + 0.9999\times 0.05} = 0.0019$$

Άρα λιγότεροι από δύο στους χίλιους εξεταζόμενους με θετικό τέστ τελικά πάσχουν από την ασθένεια, οπότε είναι αδικαιολόγητος ο φόβος του κυρίου Χ.

β) Έστω Α το ενδεχόμενο «πάσχει από την ασθένεια» και Θ_1 το ενδεχόμενο «το τέστ 1 είναι θετικό», και Θ_2 το ενδεχόμενο «το τέστ 2 είναι θετικό».
i)

$$P(A) = 0.1,\ P(A') = 0.9,\ P(\Theta_1/A) = P(\Theta_2/A) = P(\Theta/A) = 0.9$$
$$P(\Theta_1'/A') = P(\Theta_2'/A') = P(\Theta'/A') = 0.9$$

$$P(\Theta_1\Theta_2 / A) = \left[P(\Theta / A)\right]^2 = 0.81,\ P(\Theta_1\Theta_2 / A') = \left[P(\Theta / A')\right]^2 = 0.01$$

Σύμφωνα με το τύπο Bayes έχουμε:

$$P(\mathrm{A} / \Theta_1\Theta_2) = \frac{P(A)\cdot P(\Theta_1\Theta_2 / \mathrm{A})}{P(A)\cdot P(\Theta_1\Theta_2 / \mathrm{A}) + P(A')\cdot P(\Theta_1\Theta_2 / \mathrm{A}')} = \frac{0.1\cdot 0.81}{0.1\cdot 0.81 + 0.9\cdot 0.01} = 0.9$$

ii) Ορίζω Η το γεγονός «μόνο το ένα τεστ είναι θετικό» και ζητάμε $P(\mathrm{A}/H)$. Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bayes έχουμε:

$$P(\mathrm{A}/H)) = \frac{P(H/\mathrm{A})\cdot P(A)}{P(H/\mathrm{A})\cdot P(A) + P(H/\mathrm{A}')\cdot P(A')}$$

Περιοριζόμαστε στο δειγματικό χώρο αυτών που πάσχουν, παρατηρούμε ότι για αυτόν τον δειγματικό χώρο

$$H = (\Theta_1 \cap \Theta_2{}') \cup (\Theta_2 \cap \Theta_1{}')$$

Τα $(\Theta_1 \cap \Theta_2{}'), (\Theta_2 \cap \Theta_1{}')$ είναι ξένα μεταξύ τους οπότε

$$P(H) = P(\Theta_1 \cap \Theta_2{}') + P(\Theta_2 \cap \Theta_1{}')$$

επειδή τα τεστ είναι ανεξάρτητα

$P(\Theta_1 \cap \Theta_2{}') = P(\Theta_1)P(\Theta_2{}')$ και $P(\Theta_2 \cap \Theta_1{}') = P(\Theta_2)P(\Theta_1{}')$

οπότε έχουμε

$$P(H) = P(\Theta_1 \cap \Theta_2{}') + P(\Theta_2 \cap \Theta_1{}') = P(\Theta_1)P(\Theta_2{}') + P(\Theta_2)P(\Theta_1{}')$$

και επειδή μιλάμε για το δειγματοχώρο αυτών που πάσχουν ισχύει

$$P(H \mid A) = P(\Theta_1 \mid A)P(\Theta_2{}' \mid A) + P(\Theta_2 \mid A)P(\Theta_1{}' \mid A) = 0.9\times 0.1 + 0.9\times 0.1 = 0.18$$

Παρόμοια για το δειγματοχώρο αυτών που δεν πάσχουν έχουμε

$$P(H \mid A') = P(\Theta_1 \mid A')P(\Theta_2{}' \mid A') + P(\Theta_2 \mid A')P(\Theta_1{}' \mid A') = 0.9\times 0.1 + 0.9\times 0.1 = 0.18$$

Οπότε

$$P(\mathrm{A}/H) = \frac{P(A)\cdot P(H/\mathrm{A})}{P(A)\cdot P(H/\mathrm{A}) + P(A')\cdot P(H/\mathrm{A}')} = \frac{0.1\cdot 0.18}{0.1\cdot 0.18 + 0.9\cdot 0.18} = 0.1$$