ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 5η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή**:**	**23 Μαρτίου 2007**
Ημερομηνία Παράδοσης της Εργασίας από τον Φοιτητή**:**	**4 Μαΐου 2007**

Οι ασκήσεις της εργασίας αυτής αναφέρονται στα θέματα:
Ενότητα 8: (Το ανάπτυγμα Taylor)
Ενότητα 9: (Το ολοκλήρωμα)
Ενότητα 10: (Γενικευμένη ολοκλήρωση)
Ενότητα 11.1: (Εμβαδά)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γενικά Μαθηματικά Ι Λογισμός μιας Μεταβλητής Τόμος Α', του Γεωργίου Δάσιου, καθώς και
Στοιχεία Πιθανοτήτων 2
από το Κεφάλαιο Πιθανότητες 2 που περιέχεται στο Συνοδευτικό Υλικό, στη διεύθυνση της ΠΛΗ12:
http://edu.eap.gr/pli/pli12/shmeiwseis/pi8anothtes2.pdf

Βοηθητικό υλικό: Μπορείτε να συμβουλευθείτε το υλικό που υπάρχει στη διεύθυνση:
http://edu.eap.gr/pli/pli12/. Από το ΣΕΥ (Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό) :

- Σειρές Taylor
- Ολοκληρώματα 1
- Ολοκληρώματα 2
- Σειρές Fourier
- Πιθανότητες 2

Άσκηση 1. (6 μον.)

Α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{e^x-1}{e^x+2}\,dx$, $I=\int \frac{e^x-1}{e^x+2}\,dx$ χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό.

Β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int \sin^5 x\,\cos^4 x\,dx$ χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό *cosx=t*.

Λύση:

Α) Ο κατάλληλος μετασχηματισμός είναι: $0<u=e^x$, οπότε $du=\left(e^x\right)'dx$, δηλαδή $du=e^x dx$ και τελικά $dx=\frac{du}{e^x}$. Με αντικατάσταση λοιπόν έχουμε $\frac{e^x-1}{e^x+2}\,dx=\frac{e^x-1}{e^x+2}\frac{du}{e^x}=\frac{u-1}{u\left(u+2\right)}du$

και το ολοκλήρωμα γίνεται: $I=\int\frac{u-1}{u\left(u+2\right)}du$. Γράφοντας την υπό ολοκλήρωση ποσότητα υπό μορφή αθροίσματος παίρνουμε $\frac{u-1}{u\left(u+2\right)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+2}=\frac{\left(A+B\right)u+2A}{u\left(u+2\right)}$. Για να ισχύει η ισότητα αρκεί:

$$\left.\begin{array}{l}A+B=1\\2A=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A=-\frac{1}{2}\\B=\frac{3}{2}\end{array}\right\}$$ Τελικά το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I=\int\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u}+\frac{3}{2}\frac{1}{u+2}\right)du=-\frac{1}{2}\ln\left|u\right|+\frac{3}{2}\ln\left|u+2\right|+c=-\frac{1}{2}\ln e^x+\frac{3}{2}\ln\left(e^x+2\right)+c\Rightarrow$$
$$I=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\ln\left(e^x+2\right)+c$$

Β) Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό έχουμε:
cosx=t απ' όπου *-sinx dx=dt* οπότε

$$I=\int\sin x\cdot\sin^4 x\cdot\cos^4 x dx=\int\sin x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)^2\cdot\cos^4 x dx=$$
$$=-\int\left(1-t^2\right)^2 t^4dt=-\int(t^4+t^8-2t^6)dt=-\frac{t^5}{5}-\frac{t^9}{9}+2\frac{t^7}{7}+c\Rightarrow$$
$$I=-\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^9 x}{9}+2\frac{\cos^7 x}{7}+c$$

Άσκηση 2. (15 μον.)

Α) (6 μον.) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα $I=\int_0^{\pi/2}\left(e^x\cos x\right)^2dx$ και $J=\int_0^{\pi/2}\left(e^x\sin x\right)^2dx$ ως εξής:

α) Υπολογίστε πρώτα το *I+J*.

β) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, υπολογίστε το *I-J* (κάνοντας χρήση της ταυτότητας $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$) και προσδιορίστε τέλος τα *I* και *J*.

Β) (9 μον.) Να υπολογιστούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

i) $I_1=\int_0^4\frac{dx}{\sqrt[3]{\left|x-1\right|}}$ ii) $I_2=\int_0^1\ln x dx$ iii) $I_3=\int_3^\infty\frac{2}{x^2-2x}dx$

Λύση:

Α) Για τον υπολογισμό των I και J απαντάμε στα υποερωτήματα της άσκησης με τη σειρά που μας δίνονται.

α) Έχουμε

$$I+J=\int_0^{\pi/2}\left[\left(e^x\cos x\right)^2+\left(e^x\sin x\right)^2\right]dx=\int_0^{\pi/2}e^{2x}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}e^{2x}1dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(e^{\pi}-1\right)$$

β) Έστω $A=I-J=\int_0^{\pi/2}e^{2x}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\pi/2}e^{2x}\cos 2x dx$. Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(e^{2x}\right)'\cos 2x dx=\frac{1}{2}\left\{\left[e^{2x}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}+2\int_0^{\pi/2}e^{2x}\sin 2x dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-e^{\pi}-1\right)+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(e^{2x}\right)'\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)+\frac{1}{2}\left\{\left[e^{2x}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}e^{2x}\cos 2x dx\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)+\frac{1}{2}\left(0-0\right)-A$$

Εξισώνοντας το πρώτο και το τελευταίο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$2A=-\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)\Rightarrow A=-\frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{4}\Rightarrow I-J=-\frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{4}$$

γ) Από τα αποτελέσματα των δυο πρώτων ερωτημάτων έχουμε το σύστημα

$$I+J=\frac{1}{2}e^{\pi}-\frac{1}{2}$$

$$I-J=-\frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{4}$$

απ' όπου με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$I=\frac{1}{8}e^{\pi}-\frac{3}{8}\quad \text{και}\quad J=\frac{3}{8}e^{\pi}-\frac{1}{8}$$

Β) i) Το πεδίο ορισμού της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης είναι το Ρ - $\{1\}$. Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ασυνεχής στο $x = 1$. Έτσι $I_1=\int_0^{1^-}\frac{dx}{\sqrt[3]{|x-1|}}+\int_{1^+}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{|x-1|}}=\int_0^{1^-}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}+\int_{1^+}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

$$\int_0^{1^-}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}+\int_{1+\varepsilon}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}\quad \text{και}\quad \int_0^{1^+}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}\ .$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{|x-1|}}=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\int_1^{\varepsilon}\frac{-du}{u^{\frac{1}{3}}}=-\frac{3}{2}\left[u^{2/3}\right]_1^{\varepsilon}=-\frac{3}{2}(\varepsilon^{2/3}-1)\quad \text{όπου u=1-x}$$

οπότε στο όριο έχουμε: $-\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon^{2/3}-1)=\frac{3}{2}$.

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$\int_{1+\varepsilon}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}=\int_{\varepsilon}^{3}u^{-1/3}du=\left[\frac{3}{2}u^{2/3}\right]_{\varepsilon}^{3}=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-\varepsilon^{2/3})$ όπου u=x-1, οπότε στο όριο έχουμε $\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$.

Αθροίζοντας εχουμε ότι $I_1 = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}+1)$.

ii) $I_2 = \int_0^1 \ln x dx = \int_{0^+}^1 \ln x dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \ln x dx$. Το πεδίο ορισμού της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης είναι το P_+. Πρώτα υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^1 \ln x dx$ με 0 <α <1:

$$\int_a^1 \ln x dx = \int_a^1 (x)' \ln x dx = [x\cdot \ln x]_a^1 - \int_a^1 x\cdot(\ln x)' dx = -a\ln a - \int_a^1 1dx = -a\ln a - [x]_a^1 =$$
$$= -a\ln a - (1-a) = a - 1 - a\ln a$$

Οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι:

$$I_1 = \lim_{a\to 0^+}(a - 1 - a\ln a) = -1 - \lim_{a\to 0^+}\frac{\ln a}{1/a} = -1 - \lim_{a\to 0^+}\frac{1/a}{-1/a^2} = -1 + \lim_{a\to 0^+}\frac{a^2}{a} = -1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα L'Hospital στον υπολογισμό του ορίου.

iii)

$I_3 = \int_3^{+\infty}\frac{2}{x^2-2x}dx$. Το πεδίο ορισμού της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης είναι το P - {0, 2}. Πρώτα αναλύουμε το κλάσμα σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{x^2-2x} = \frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow 1 = A(x-2) + Bx$$

Για x = 0 ⇒ 1 = -2A ⇒ A = $-\frac{1}{2}$. Θέτοντας x = 2 ⇒ 1 = 2B ⇒ B = $\frac{1}{2}$. Επομένως

$$\frac{1}{x^2-2x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}\right) \quad \text{και έτσι έχουμε:} \quad I_3 = \int_3^{+\infty}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\right)dx$$

Πρώτα υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα με β>3:

$$\int_3^{\beta}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\right)dx = \left[-\ln x + \ln(x-2)\right]_3^{\beta}$$
$$= -\ln\beta + \ln(\beta-2) + \ln 3 - \ln 1$$
$$= \ln 3 + \ln\left(\frac{\beta-2}{\beta}\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του λογάριθμου $\ln A - \ln B = \ln(\frac{A}{B})$. Έτσι βρίσκουμε τελικά:

$$I_3 = \lim_{\beta\to+\infty}\left[\ln 3 + \ln\frac{\beta-2}{\beta}\right] = \ln 3 + \lim_{\beta\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2}{\beta}\right) = \ln 3 + \ln\left[\lim_{\beta\to+\infty}\left(1-\frac{2}{\beta}\right)\right] = \ln 3 + \ln 1 = \ln 3.$$

Άσκηση 3. (14 μον.)

Πολλές φορές για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε κάποια **αλγοριθμική διαδικασία** για τον **προσεγγιστικό υπολογισμό** (π.χ. χρησιμοποιώντας το Matlab ή το Octave σε έναν Η/Υ). Μία τέτοια διαδικασία είναι και ο λεγόμενος **σύνθετος τύπος του Τραπεζίου,** τα βασικά βήματα του οποίου είναι τα εξής:

Δοσμένου ενός ορισμένου ολοκληρώματος $I = \int_a^b f(x)dx$:

- Αρχικά χωρίζετε το διάστημα [α,b] σε n υποδιαστήματα ίσου πλάτους: $h = \frac{b-a}{n}$ και υπολογίζετε αντίστοιχες τετμημένες: $x_0 = \alpha$, $x_1 = \alpha + h$, $x_2 = \alpha + 2h, \ldots, x_{n-1} = \alpha + (n-1)h$, $x_n = b$.

- Υπολογίζετε τις αντίστοιχες τεταγμένες αυτών, δηλαδή: $y_0 = f(\alpha)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$,…,$y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(b)$.
- Μια προσέγγιση του ολοκληρώματος I δίνεται από τη σχέση: $I \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-2} + y_{n-1})$.

A) (10 μον.) Γράψτε ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή σας που να υλοποιεί την ως άνω διαδικασία και με αυτό να υπολογιστεί το ακόλουθο ολοκλήρωμα, με 4 διαδοχικές εφαρμογές (για n=1,2,3,4 διαμερίσεις, αντίστοιχα) του σύνθετου τύπου του Τραπεζίου:

$$I = \int_1^2 (x^3 + 5)dx.$$

Τι παρατηρείτε σχετικά με την ακρίβεια των λύσεων (σε σχέση με την αναλυτική λύση) καθώς αυξάνεται ο αριθμός των διαμερίσεων;
Να γίνει η γραφική παράσταση της προσεγγιστικής τιμής του παραπάνω ολοκληρώματος σύμφωνα με τον κανόνα του Τραπεζίου, όταν η μεταβλητή n, που παριστάνει τον αριθμό των διαμερίσεων είναι: $n \in [1,50]$.

B) (4 μον.) Συμβουλευθείτε το συνημμένο αρχείο και εφαρμόστε το θεώρημα στη σ. 3 για να προσδιορίσετε τον αριθμό των υποδιαστημάτων $n = 1, 2, ...$ του [1,2] που απαιτούνται, ώστε το σφάλμα του αποτελέσματός σας να είναι $\leq 10^{-6}$. Συμφωνούν τα θεωρητικά με τα αριθμητικά σας αποτελέσματα;

Λύση:
A) Για να υπολογίσουμε την πρώτη προσέγγιση του ολοκληρώματος I (για n=1), γράφουμε τις ακόλουθες εντολές:

```
a = 1;
b = 2;
n = 1;
h = (b - a)/n;
ya = a.^3. + 5;
yb = b.^3. + 5;
I = (ya + yb)/2;
for k = 1:(n-1)
   x = a + h*k;
   I = I + x.^3. + 5;
end
I = h*I
```

Έτσι λαμβάνουμε την απάντηση:
I =
   9.5000
Στη συνέχεια αλλάζουμε την τρίτη γραμμή (γράφοντας: `n = 2;`) και έτσι υπολογίζουμε μια προσέγγιση για n=2. Η απάντηση αυτή τη φορά είναι:
```
I =
   8.9375
```
Ομοίως, για n=3 και n=4 παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:
I =
   8.8333
και
I =
   8.7969
Ο ακόλουθος πίνακας συνοψίζει τα αποτελέσματά μας για διαφορετικό αριθμό διαμερίσεων:

n	1	2	3	4
I	9.5000	8.9375	8.8333	8.7969

Γνωρίζουμε όμως ότι η ακριβής λύση του ολοκληρώματος I είναι:

$$I = \int_1^2 (x^3 + 5)dx = \left[\frac{x^4}{4} + 5x \right]_1^2 = 8.75$$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε τον αριθμό των διαμερίσεων, τόσο καλύτερα προσεγγίζουμε την ακριβή λύση.

2ος τρόπος

Η άσκηση αυτή θα μπορούσε εναλλακτικά να αντιμετωπιστεί και με έναν πιο αποδοτικό τρόπο. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια νέα συνάρτηση με το όνομα `trapezio(f, a, b, n)`, την οποία θα αποθηκεύσουμε σε ένα αρχείο με το όνομα `trapezio.m`. Το αρχείο αυτό θα πρέπει να περιέχει τις ακόλουθες εντολές:

```
function I = trapezio(f, a, b, n)
%Είσοδος: - f είναι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση (ορισμένη στο αρχείο f.m)
%         - a και b είναι τα άκρα ολοκλήρωσης
%         - n είναι ο αριθμός των διαμερίσεων
%Έξοδος:  - I είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος, σύμφωνα με τον κανόνα του τραπεζίου
h = (b - a)/n;
I = 0;
for k = 1:(n-1)
   x = a + h*k;
   I = I + feval(f,x);
end
I = h*(feval(f,a) + feval(f,b))/2 + h*I;
```

Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει μια προσέγγιση, σύμφωνα με τον κανόνα του Τραπεζίου, του ολοκληρώματος της συνάρτησης f(x). Η συνάρτηση f(x) ορίζεται σε ένα άλλο αρχείο με όνομα `f.m`, όπως στη συνέχεια:

```
function y = f(x)
y = x.^3 + 5;
```

Τώρα δίνοντας στο Matlab ή στο Octave τις εντολές:

```
for i = 1:4
   trapezio('f', 1, 2, i)
end
```

έχουμε τις 4 ζητούμενες προσεγγίσεις του ολοκληρώματος της f(x). Ο τρόπος αυτός είναι προτιμότερος προγραμματιστικά καθώς μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα για οποιαδήποτε άκρα ολοκλήρωσης και αριθμό διαμερίσεων. Π.χ. η εντολή:

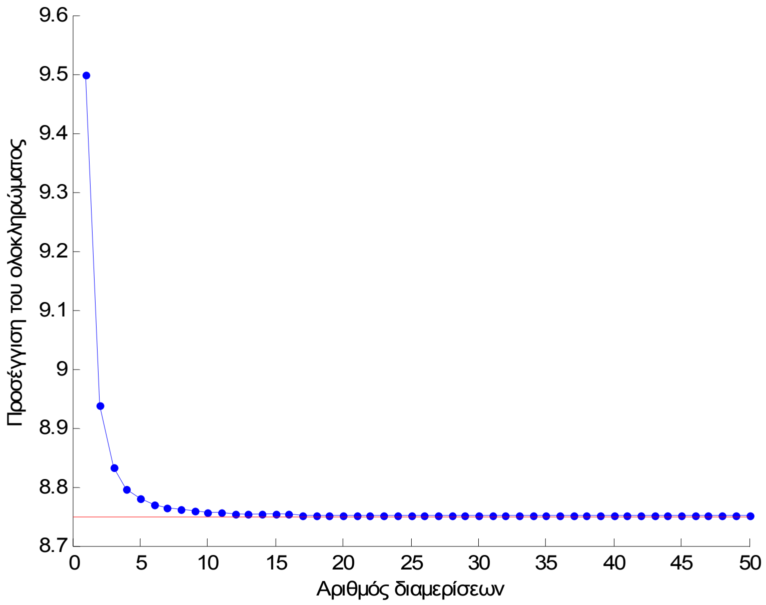
```
trapezio('f', 10, 12, 80)
```

θα επιστρέψει την προσέγγιση του:

$I' = \int_{10}^{12} (x^3 + 5)dx,$ για 80 διαμερίσεις. Επίσης, τροποποιώντας το αρχείο `f.m` μπορούμε να υπολογίσουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο το ολοκλήρωμα *οποιασδήποτε* άλλης συνάρτησης f(x).

Οι ακόλουθες εντολές δίνουν ένα γράφημα σαν το ακόλουθο, όπου φαίνεται η προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος για διάφορες τιμές της μεταβλητής n, που παριστάνει τον αριθμό των διαμερίσεων:

```
s = [];
for n = 1:50
   s = [s trapezio('f', 1, 2, n)];
end
plot(s)
```



Β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο P με $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ η μέγιστη τιμή της $f''(x)$ είναι $f(2) = 12 = M$.
Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του συνημμένου αρχείου το σφάλμα E_n ικανοποιεί την σχέση
$\left|E_n\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M = \frac{1^3}{12n^2}\times 12 = \frac{1}{n^2}$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το n όταν το σφάλμα $E_n \le 10^{-6}$
$10^{-6} \ge 1/n^2$ ή $n \ge 1000$
Για n=1000 έχουμε

```
clear all
format long
a=1;
b=2;
n=1000;
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
y=(x.^3)+5;
y0=(a^3)+5;
y1=y(2:1:n);
yn=(b^3)+5;
I=h*((y0+yn)/2+sum(y1))


%   8.75000074999999
```

Άσκηση 4 (10 μον.)
α) (3 μον.) Αν f(x) = cosx να αποδείξετε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad n = 1,2,3,\ldots \text{ και } x \text{ σε rad}$$

όπου $f^{(n)}(x)$ είναι νιοστή παράγωγος της $f(x)$ ως προς x.

β) (4 μον.) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης f(x) = cosx με σημείο ανάπτυξης το $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

γ) (3 μον.) Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα που βρήκατε στο ερώτημα β) για να υπολογίσετε το $\cos(62^o)$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

Λύση:

α) Έχουμε f΄(x) = - sinx , ενώ για n = 1 ο τύπος που πρέπει να αποδείξουμε δίνει:

$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, όπως βρήκαμε παραπάνω. Υποθέτοντας ότι ο τύπος αυτός ισχύει για n:

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για n + 1 ως εξής: Υπολογίζοντας την (n+1)-οστή παράγωγο έχουμε:

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \left[\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]' = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left[x + \frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right]$$

$= \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$, άρα ο τύπος εδείχθη για όλα τα n.

β) Το ανάπτυγμα Taylor για την f(x) = συνx «γύρω» από το $a = \frac{\pi}{3}$ είναι:

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1!} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{2!} f''\left(\frac{\pi}{3}\right) + \ldots + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n}{n!} f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{E}_n(x)$$

όπου $\mathrm{E}_n(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ με $\frac{\pi}{3} < \xi < x$ δίνει το σφάλμα του αναπτύγματος της f(x) ως πολυώνυμο. Επομένως έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \ f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ldots$$

και $f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\right)$, οπότε παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$\cos x = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 \frac{1}{2 \cdot 2!} + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!} + \ldots + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n}{n!} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\right) + \ldots \quad (1)$$

γ) Πρώτα μετατρέπουμε τη γωνία από μοίρες σε rad: $62^o \to \frac{62^0 \pi}{180^0}$ και χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα (1), θέτοντας όπου x το $\frac{62\pi}{180} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{62\pi}{180} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$. Έτσι βρίσκουμε:

$$\text{συν } 62^o = \text{συν}\frac{62\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right) - \frac{1}{2 \cdot 2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 \approx 0.46946$$

Άσκηση 5 (15 μον.)

Α. (5 μον.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_1 = \int u e^{-u} du$ με τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u = lnx, να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $I_2 = \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx$, με b > 1 .

B. (10 μον.) Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{\ln x}{x^2}$ με x ≥ 1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα και να αποδείξετε ότι ο άξονας x′x είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης (C_f) της f για x → +∞. Κατόπιν, σχεδιάστε την C_f και με τη χρήση ενός γενικευμένου ολοκληρώματος να υπολογίσετε το εμβαδόν του «ανοιχτού» χωρίου που βρίσκεται κάτω από την C_f και πάνω από τον άξονα x′x.

Λύση:

Α. α) $I_1 = \int e^{-u}\cdot u\,du = \int(-e^{-u})'\cdot u\,du = -ue^{-u} + \int e^{-u}du = -e^{-u}(u+1) + c$

Α. β) $I_2 = \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx$. Θέτουμε u = ln x δηλαδή $x = e^u$, οπότε $du = \frac{1}{x}dx$.

και όταν x=1 τότε u = 0, ενώ για x=b, u=lnb. Με αυτή την αντικατάσταση παίρνουμε

$I_2 = \int_0^{\ln b}\frac{u}{e^u}du = \left[-e^{-u}(u+1)\right]_0^{\ln b} = -e^{-\ln b}(\ln b+1) + e^0\cdot 1 = 1 - \frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b}$.

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα της λογαριθμικής συνάρτησης $e^{-\ln b} = e^{\ln b^{-1}} = b^{-1} = \frac{1}{b}$

Β) α) Για να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞ πρέπει να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

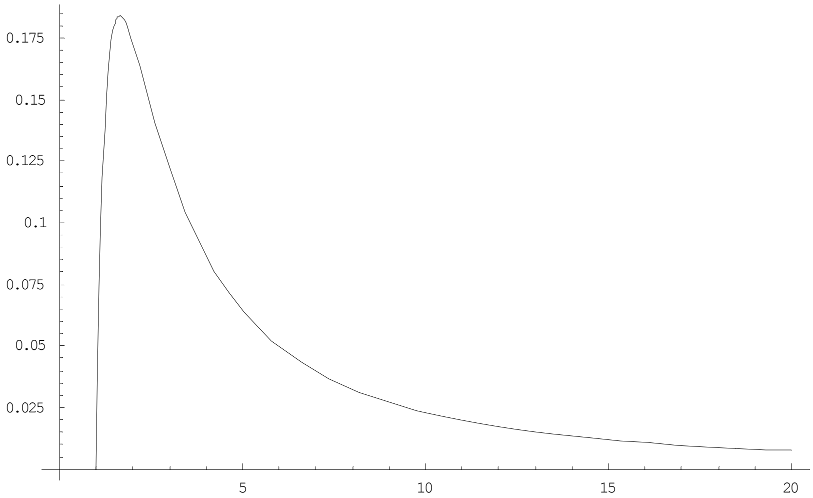
$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$ άρα η ευθεία y=0 (ο άξονας x'x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο +∞. Εδώ για το όριο της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$ χρησιμοποιήσαμε κανόνα L'Hospital.

f ′(x) = $\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x 2x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, οπότε έχουμε f ′(x) = 0 ⇔ lnx = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

x	1		$\sqrt{e}$	
f ′(x)		+	0	-
f (x)		↗		↘

Επομένως, υπάρχει τοπικό μέγιστο στο x = $\sqrt{e}$ ίσο με $f(\sqrt{e}) = \frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$, και ελάχιστο στο x = 1, το $f(1) = 0$.

Η C_f τέμνει τον άξονα x'x όταν y=0 $\Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$



Β β) Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την C_f και πάνω από τον άξονα x'x πρέπει να υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} (1 - \frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b}) = 1 - \lim_{b\to+\infty} \frac{(\ln b)'}{b'} = 1 - \lim_{b\to+\infty} \frac{\frac{1}{b}}{1} = 1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος Αβ και τον κανόνα L'Hospital στον υπολογισμό του ορίου.

Άσκηση 6 (16 μον.)

Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$, με -1 <x <1.

α) (2 μον.) Παραγωγίζοντας τη σειρά, όρο προς όρο, να αποδείξετε ότι η σειρά που προκύπτει είναι γεωμετρική πρόοδος της οποίας να βρείτε το λόγο και το άθροισμα απείρων όρων της.

β) (4 μον.) Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της σχέσης που βρήκατε στο ερώτημα (α), αποδείξτε ότι f(x) = $\tan^{-1}$x, -1<x<1.

γ) (4μον.) Παίρνοντας τους n πρώτους όρους της σειράς $f'(t) \approx 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n \cdot t^{2n}$, δείξτε ότι το σφάλμα (ή υπόλοιπο) αυτής δίνεται από τον όρο $\frac{(-1)^{n+1} \cdot t^{2n+2}}{1+t^2}$. (Υπόδειξη: Υπολογίστε τους όρους της σειράς με εκθέτη από 2n+2 μέχρι άπειρο). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας και το ερώτημα β), δείξτε ότι

$\tan^{-1}$x = $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$, όπου $R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} \cdot t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.

δ) (4 μον.) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$ και την ιδιότητα 9.14 του βιβλίου του ΕΑΠ, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, αν -1 ≤ x ≤ 1, οπότε έχουμε $\tan^{-1}$x = $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots +$ με -1 ≤ x ≤1.

ε) (2 μον.) Χρησιμοποιώντας τη δυναμοσειρά που βρήκατε για τη συνάρτηση $\tan^{-1}$x από το ερώτημα (δ) και κατάλληλη τιμή του x, αποδείξτε τον τύπο του Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots$$

α) $f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+...$και παραγωγίζοντας όρο προς όρο εχουμε ότι

$$f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n\cdot x^{2n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad . \qquad (1)$$

Η δυναμοσειρά αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $-x^2$, συγκλίνει τότε και μόνο αν $|-x^2|<1$ δηλαδή $-1<x<1$ και έχει άθροισμα απείρων όρων $S_\infty=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$.

β) Έχουμε $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx\Rightarrow f(x)=\tan^{-1}x-\tan^{-1}0$

$\Rightarrow f(x)=\tan^{-1}x$

γ) Η δυναμοσειρά που έχουμε είναι γεωμετρική πρόοδος και το σφάλμα της δίνεται από το άθροισμα των όρων από τον (n+1) όρο α_{n+1} μέχρι το άπειρο, δηλαδή,

$$R_n(t)=f(t)-P_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k t^{2k}=(-1)^{n+1}t^{2n+2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}=(-1)^{n+1}t^{2n+2}\frac{1}{1+t^2}$$

ή $\frac{a_{n+1}}{1-(-t^2)}=\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$,

οπότε $f'(t)=1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n\cdot t^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\Rightarrow\int_0^x f'(t)dt=$

$$=\int_0^x\left(1-t^2+t^4-t^6+...+(-1)^n\cdot t^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\right)dt$$

$$\Rightarrow f(x)-f(0)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+R_n(x)$$

$\Rightarrow \tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+R_n(x)$, με $R_n(x)=\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}\cdot t^{2n+2}}{1+t^2}dt$.

δ) Επειδή $1+t^2\geq 1$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\leq\frac{t^{2n+2}}{1}$ και συνεπώς $\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\leq\int_0^x t^{2n+2}dt=\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

Επίσης για $-1\leq x\leq 1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}=0$.

Οπότε $|R_n(x)|=\left|\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|\leq\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right|=\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}\to 0$, καθώς $n\to\infty$.

Ετσι αφού $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$, έχουμε $\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...$ με $\mathbf{-1\leq x\leq 1}$

ε) Θέτοντας x = 1 στην απειροσειρά του ερωτήματος (δ) παίρνουμε

$$\tan^{-1}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+...+\frac{(-1)^n}{2n+1}+...\Rightarrow\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+...+\frac{(-1)^n}{2n+1}+...$$

Άσκηση 7 (8 μον.)

Έστω ότι η διάρκεια των υπεραστικών τηλεφωνικών συνδιαλέξεων σε λεπτά ακολουθεί τη εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x)=\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}, \qquad x>0.$$

Να βρεθούν οι πιθανότητες η διάρκεια μιας υπεραστικής συνδιάλεξης α) να υπερβεί τα 5 λεπτά, β) να διαρκέσει μεταξύ 3 και 6 λεπτών γ) να διαρκέσει λιγότερο από 3 λεπτά, και δ) να διαρκέσει λιγότερο από 6 λεπτά δεδομένου ότι ξεπέρασε σε διάρκεια τα 3 λεπτά.

Λύση:
Επειδή στη λύση της άσκησης θα μας χρειαστεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας υπολογίζουμε αρχικά το αόριστο ολοκλήρωμα:

$\int f(x)dx = \int \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx = \frac{1}{5}(-5)e^{-\frac{1}{5}x} + c = -e^{-\frac{1}{5}x} + c$, και διαπιστώνουμε ότι $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$, άρα η f(x) είναι όντως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Με βάση τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχουμε για τις πιθανότητες που μας ζητάει η άσκηση:

α) $P\left[X > 5\right] = \int_5^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx = \left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_5^{+\infty} = e^{-1}$

β) $P\left[3 < X < 6\right] = \int_3^6 \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx = \left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_3^6 = e^{-\frac{3}{5}} - e^{-\frac{6}{5}} = e^{-\frac{3}{5}}\left(1 - e^{-\frac{3}{5}}\right)$

γ) $P\left[X < 3\right] = \int_0^3 \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx = \left[-e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^3 = 1 - e^{-\frac{3}{5}}$

δ) Στο ερώτημα αυτό μας ζητάνε να υπολογίσουμε μια δεσμευμένη πιθανότητα οπότε έχουμε με βάση τα αποτελέσματα των υποερωτημάτων β και γ:

$$P\left[X < 6 \mid X > 3\right] = \frac{P\left[X < 6, X > 3\right]}{P\left[X > 3\right]} = \frac{P\left[3 < X < 6\right]}{1 - P\left[X < 3\right]} = \frac{e^{-\frac{3}{5}}\left(1 - e^{-\frac{3}{5}}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\frac{3}{5}}\right)} = 1 - e^{-\frac{3}{5}}$$

Άσκηση 8 (8 μον.)
Το ύψος των ανδρών στην Ελλάδα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ=167cm και τυπική απόκλιση σ=3cm.

A) (4 μον.) Να βρεθεί το ποσοστό του ανδρικού πληθυσμού στην Ελλάδα που έχει ύψος α) μεγαλύτερο των 167cm β) μεγαλύτερο των 170cm και γ) μεταξύ 161cm και 173cm.

B) (4 μον.) Σε ένα τυχαίο δείγμα 4 ανδρών ποια είναι η πιθανότητα α) να έχουν όλοι ύψος πάνω από 170cm και β) ακριβώς 2 να είναι ψηλότεροι της μέσης τιμής;

Δίνονται οι ακόλουθες πιθανότητες: Αν η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, τότε $P[Z \le 0] = 0,5$, $P[Z \le 1] = 0,8413$ και $P[Z \le 2] = 0,9772$.

Λύση:
A) Η τυχαία μεταβλητή X=ύψος ανδρών, ακολουθεί την κανονική κατανομή $\left(X \approx N(167, 3^2)\right)$ οπότε η μεταβλητή $Z = \frac{X - 167}{3}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $\left(Z \approx N(0,1)\right)$. Έτσι για τις ζητούμενες πιθανότητες έχουμε:

α) $P[X > 167] = P\left[\frac{X - 167}{3} > 0\right] = P[Z > 0] = 1 - P[Z \le 0] = 1 - 0,5 = 0,5 = 50\%$

Σημειώνουμε ότι $P[Z < 0] = P[Z \le 0]$ αφού η πιθανότητα να εμφανιστεί ακριβώς μια δεδομένη τιμή είναι μηδέν, άρα $P[Z = 0] = 0$.

β) $P[X > 170] = P\left[\frac{X - 167}{3} > \frac{170 - 167}{3}\right] = P[Z > 1] =$
$= 1 - P[Z \le 1] = 1 - 0,8413 = 0,1587 = 15,87\%$

γ) Εργαζόμενοι όπως και πριν και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η τυπική κανονική κατανομή είναι άρτια συνάρτηση έχουμε:

$$P[161 < X < 173] = P\left[\frac{161-167}{3} < \frac{X-167}{3} < \frac{173-167}{3}\right] = P[-2 < Z < 2] =$$

$$= P[Z < 2] - P[Z < -2] = P[Z < 2] - \left(1 - P[Z < 2]\right) =$$

$$= 2P[Z < 2] - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544 = 95,44\%$$

Β) α) Η πιθανότητα ένας άνδρας να έχει ύψος πάνω από 170cm είναι σύμφωνα με το ερώτημα Ι.β) p=0,1587. Έστω η τυχαία μεταβλητή Υ=αριθμός ανδρών με ύψος πάνω από 170cm. Αν επιλέγουμε ανεξάρτητα 4 άνδρες και τους ελέγχουμε ως προς το ύψος τους και κάθε δοκιμή έχει πιθανότητα να πάρουμε θετικό αποτέλεσμα (ύψος πάνω από 170cm) p=0,1587 τότε η Υ ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n=4 και p=0,1587. Οπότε έχουμε :

$$P[Y = k] = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k} = \binom{4}{k} 0,1587^k \left(1 - 0,1587\right)^{4-k}.$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$P[Y = 4] = \binom{4}{4} 0,1587^4 \left(1 - 0,1587\right)^0 = 0,1587^4 = 0.00063$$

β) Όπως και πριν η μεταβλητή W= αριθμός ανδρών με ύψος πάνω από 167cm ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n=4 και p=0,5 (σύμφωνα με το ερώτημα Ι α)). Οπότε έχουμε:

$$P[W = 2] = \binom{4}{2} 0,5^2 \left(1 - 0,5\right)^2 = \frac{4!}{2!2!} 0,5^4 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} = 0.375$$

Άσκηση 9 (8 μον.)

Α) (4 μον.) Έστω η πιθανότητα να πετύχουμε ένα στόχο με μια βολή είναι 0,4. Ποίος αριθμός βολών απαιτείται ώστε η πιθανότητα να χτυπηθεί τουλάχιστον μια φορά ο στόχος να είναι μεγαλύτερη του 0,9; Σημειώνεται ότι το αποτέλεσμα κάθε βολής είναι ανεξάρτητο από τα αποτελέσματα των προηγούμενων βολών και ακολουθεί την διωνυμική κατανομή.

Β) (4 μον.) Σε ένα τεστ πολλαπλής επιλογής δίνονται 3 ερωτήσεις με 3 απαντήσεις για την πρώτη, 5 απαντήσεις για την δεύτερη και 4 απαντήσεις για την τρίτη ερώτηση. Υποθέτοντας ότι ο διαγωνιζόμενος απαντάει και στις 3 ερωτήσεις τυχαία να βρεθεί η μέση τιμή Ε(Χ) των σωστών απαντήσεων Χ του διαγωνιζόμενου.

Λύση:

Α) Η τυχαία μεταβλητή Χ=αριθμός επιτυχημένων βολών ακολουθεί διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p=0,4.

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k} = \binom{n}{k} 0,4^k 0,6^{n-k}$$

Η πιθανότητα να χτυπηθεί τουλάχιστον μια φορά ο στόχος δίνεται από τη σχέση

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{n}{0} 0,4^0 0,6^n = 1 - 0,6^n$$

Για να γίνει η πιθανότητα αυτή μεγαλύτερη από 0,9 πρέπει

$$1 - 0,6^n \geq 0,9 \Rightarrow 0,1 \geq 0,6^n \Rightarrow \log(0,1) \geq n\log(0,6) \Rightarrow n \geq \frac{\log(0,1)}{\log(0,6)} \Rightarrow n \geq 4,51.$$

Οπότε μετά από 5 βολές η πιθανότητα να χτυπηθεί τουλάχιστον μια φορά ο στόχος είναι μεγαλύτερη από 0,9.

Β) Η τυχαία μεταβλητή Χ παίρνει τις τιμές 0, 1, 2 και 3. Οι αντίστοιχες πιθανότητες υπολογίζονται ως ακολούθως:

$p_0 = P[X=0] =$ P(λάθος απάντηση στην $1^η$ ερώτηση)* P(λάθος απάντηση στην $2^η$ ερώτηση)* P(λάθος απάντηση στην $3^η$ ερώτηση)=$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$.

$p_1 = P[X=1] =$ P(σωστή απάντηση στην $1^η$ ερώτηση και λάθος στις άλλες 2) + P(σωστή απάντηση στην $2^η$ ερώτηση και λάθος στις άλλες 2) + P(σωστή απάντηση στην $3^η$ ερώτηση και λάθος στις άλλες 2) $=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}= \ =\frac{12}{60}+\frac{6}{60}+\frac{8}{60}=\frac{26}{60}=\frac{13}{30}$.

$p_2 = P[X=2] =$ P(σωστές απαντήσεις στις ερωτήσεις 1 και 2 και λάθος στην ερώτηση 3) + P(σωστές απαντήσεις στις ερωτήσεις 1 και 3 και λάθος στην ερώτηση 2) + P(σωστές απαντήσεις στις ερωτήσεις 2 και 3 και λάθος στην ερώτηση 1) =

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{60}+\frac{4}{60}+\frac{2}{60}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$.

$p_3 = P[X=3] =$ P(σωστή απάντηση στην $1^η$ ερώτηση)* P(σωστή απάντηση στην $2^η$ ερώτηση)* P(σωστή απάντηση στην $3^η$ ερώτηση)= $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{60}$.

Οπότε η μέση τιμή της X είναι:

$$E(X) = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1\frac{13}{30}+2\frac{3}{20}+3\frac{1}{60}=\frac{47}{60}=0,78$$

Επομένως κατά μέσο όρο δεν απαντάει σωστά ούτε σε μια ερώτηση.
