ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 6^{η}

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή:	**9 Μαίου 2007**
Ημερομηνία Παράδοσης της Εργασίας από τον Φοιτητή:	**1 Ιουνίου 2007**

Άσκηση 1. (10 μον.)
Δίνεται το σύστημα γραμμικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= -3 \\ x + \alpha y - z &= 0 \\ x - y + \alpha z &= 2 \end{aligned}$$

Α. Λύστε το σύστημα για όλες τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου α.

Β. Για την τιμή α = -3/2 :

(i) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α του συστήματος και διαγωνοποιήστε τον.

(ii) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη διαγωνοποίηση υπολογίστε τη n-οστή δύναμη Α για κάθε φυσικό αριθμό *n*.

<u>Λύση</u>

Α.

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος στον οποίο εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ 0 & a+1 & -(a+1) & -2 \\ 0 & 3 & -3-2a & -7 \end{array}\right] \xrightarrow[a \neq -1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2/(a+1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2/(a+1) \\ 0 & 3 & -3-2a & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2/(a+1) \\ 0 & 0 & -2a & \dfrac{-7\alpha - 1}{\alpha + 1} \end{array}\right]$$

Στην περίπτωση που $\alpha = -1$ φανερά το σύστημα είναι ασυμβίβαστο μιας και από τη δεύτερη γραμμή του τρίτου πίνακα έχουμε $0 \cdot z = -2$.
Επίσης στην περίπτωση που $\alpha = 0$ φανερά το σύστημα είναι ασυμβίβαστο μιας και από την τρίτη γραμμή του τελικού πίνακα έχουμε $0 \cdot z = -1$.
Εάν $a \neq 0, -1$ τότε έχουμε την μοναδική λύση

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-3a^2 + 6\alpha + 1}{2a(\alpha+1)} & \dfrac{3\alpha + 1}{2a(\alpha+1)} & \dfrac{7\alpha + 1}{2a(\alpha+1)} \end{bmatrix}^T.$$

Β. Για την τιμή α = -3/2 ο πίνακας γίνεται:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

i)Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & -\frac{3}{2}-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\frac{3}{2}-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+\frac{5}{2}) + (\lambda+\frac{9}{2}) + (-3\lambda-\frac{11}{2}) =$$

$$(2-\lambda)(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+\frac{5}{2}) - (2\lambda+1) = (\lambda+\frac{1}{2})\left((2-\lambda)(\lambda+\frac{5}{2})-2\right) = (\lambda+\frac{1}{2})\left(-\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda+3\right) =$$

$-(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+2)\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)$ με ρίζες -2, -1/2, 3/2.

Οπότε ο πίνακας έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές και συνεπώς διαγωνοποιείται.

Για την ιδιοτιμή $\lambda=-2$, το συστημα $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ισοδυναμεί με $x_2 = x_3, x_2 = 2x_1$, από όπου παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $[1 \quad 2 \quad 2]^T$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = 3/2$, το συστημα $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ισοδυναμεί με $x_2 = x_3, x_1 = 4x_2$, από όπου παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $[4 \quad 1 \quad 1]^T$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda = -1/2$, το συστημα $\begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ισοδυναμεί με $x_3 = 7x_2, x_1 = 8x_2$, από όπου παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $[8 \quad 1 \quad 7]^T$.

Αρα ο πίνακας διαγωνοποιείται δηλαδή ισχύει $A=PDP^{-1}$ όπου

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του πίνακα P:

$$[P\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&8&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\2&1&7&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&8&1&0&0\\0&-7&-15&-2&1&0\\0&-7&-9&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&8&1&0&0\\0&-7&-15&-2&1&0\\0&0&6&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3/6}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&8&1&0&0\\0&-7&-15&-2&1&0\\0&0&1&0&-1/6&1/6\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2+15\Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&8&1&0&0\\0&-7&0&-2&-3/2&5/2\\0&0&1&0&-1/6&1/6\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2/(-7)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&8&1&0&0\\0&1&0&2/7&3/14&-5/14\\0&0&1&0&-1/6&1/6\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-8\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&0&1&4/3&-4/3\\0&1&0&2/7&3/14&-5/14\\0&0&1&0&-1/6&1/6\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-4\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/7&10/21&2/21\\0&1&0&2/7&3/14&-5/14\\0&0&1&0&-1/6&1/6\end{array}\right].$$

Άρα

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-1/7&10/21&2/21\\2/7&3/14&-5/14\\0&-1/6&1/6\end{bmatrix}$$

ii) Η νιοστή δύναμη του Α ισούται με $A^n = PD^nP^{-1}$

$$A^n=PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1&4&8\\2&1&1\\2&1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^n&0&0\\0&(3/2)^n&0\\0&0&(-1/2)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/7&10/21&2/21\\2/7&3/14&-5/14\\0&-1/6&1/6\end{bmatrix}=\ldots$$

Άσκηση 2 (12 μον.)

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ με τύπο:

$$f(x,y,z)=(x+2y,x-y-z,2x+y-z).$$

- **(i)** Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
- **(ii)** Προσδιορίστε τον πυρήνα και την εικόνα της f καθώς και αντίστοιχες βάσεις. Είναι η f 1-1; Είναι επί ;
- **(iii)** Υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα της f;

<u>Λύση</u>

(i) Για να βρούμε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση B του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από τα διανύσματα $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3(0,0,1)$ (διατεταγμένα με την σειρά αυτή) πρώτα βρίσκουμε τις εικόνες μέσω της f καθενός από αυτά ως γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της βάσης:

$f(e_1)=f(1,0,0)\ =(1+2\cdot 0,1-0-0,2\cdot 1+0-0)=\ (1,1,2)\ =\ 1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)+2\cdot(0,0,1)=$
$1\,e_1+1\,e_2+2\,e_3$,

$f(e_2)=f(0,1,0)\ =\ (0+2\cdot 1,0-1-0,2\cdot 0+1-0)=\ (2,-1,1)\ =\ 2\,e_1-1\,e_2+1\,e_3$,

$f(e_3)=f(0,0,1)\ =(0+2\cdot 0,0-0-1,2\cdot 0+0-1)=\ (0,-1,-1)\ =\ 0\,e_1-1\,e_2-1\,e_3$,

και σχηματίζουμε τον πίνακα Α με στήλες τα $\left[f(e_1)\right]_B$, $\left[f(e_2)\right]_B$, $\left[f(e_3)\right]_B$. Δηλαδή ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση Β του $\mathbf{R}^3$ είναι ο

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

(ii) Εχοντας τον πίνακα της f, για να προσδιορίσουμε τον πυρήνα και την εικόνα της f αρκεί να υπολογίσουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του Α:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & -3 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2/(-3)}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1/3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2/(-3)}\begin{bmatrix}\boxed{1} & 0 & -2/3\\ 0 & \boxed{1} & 1/3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=A'$$

Ετσι το διανυσμα $x\,e_1+y\,e_2+\mathrm{z}\,e_3=(x,y,z)$ ανήκει στον **πυρήνα της *f*** αν και μόνο αν

$A'\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ δηλαδή $x-2z/3$ =0 και $y+z/3$ =0 . Αρα $x=2z/3$ και

$y=-z/3$ δηλαδή $\mathrm{Ker}\,f=\{a\,(2,-1,3),\ a\in\mathbb{R}\ \}$ και μία βάση του είναι το μονοσύνολο $\{(2,-1,3)\}$. Συνεπώς ο Ker$f$ είναι μονοδιάστατος υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$.

Από την κλιμακωτή μορφή του Α συμπεραίνουμε ότι μία βάση του χώρου στηλών του αποτελείται από την πρωτη και δευτερη στήλη και συνεπώς μία βάση **της εικόνας της *f*** αποτελείται από τα διανύσματα $1\,e_1+1\,e_2+2\,e_3$= (1,1,2) και $2\,e_1-1\,e_2+1\,e_3$=(2,-1,1) και η διάστασή της είναι 2.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να πούμε ότι:

Η *f* **δεν είναι 1-1** αφού ο πυρήνας της δεν είναι ο μηδενικός υπόχωρος.

Η *f* **δεν είναι επί** αφού η εικόνα της δεν συμπίπτει με το πεδίο τιμών της έχοντας μικρότερη διάσταση από αυτό.

(iii) Δεδομένου ότι *ο πίνακας που αντιστοιχεί σε μία γραμμική απεικόνιση είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το ίδιο συμβαίνει και με την αντίστοιχη απεικόνιση*, ο Α δεν αντιστρέφεται αφού η f δεν είναι 1-1 και επί (επισης από την κλιμακωτή μορφή του A εχουμε ότι rank A =2<3 και συνεπώς ο A δεν είναι αντιστρέψιμος).

Άσκηση 3 (14 μον.)

A. (6 μον.) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{1-\cos x}$ (χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα αριθμητή και παρονομαστή σε σειρές Taylor).

B. (8 μον.) Προσδιορίστε τους πραγματικούς α, β, γ έτσι ώστε η συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+\beta x+3, & x<1 \\ 2, & x=1 \\ x^2+\gamma x+2, & x>1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο x=1.

<u>Λύση</u>

A.

i)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1-\ln x\right)'}{\left((x-1)\ln x\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\overset{(\frac{0}{0})}{=}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)'}{\left(x\ln x+x-1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}$$

ii) Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα των εμπλεκόμενων συναρτήσεων σε σειρές Taylor με κέντρο το 0, έχουμε :

$$\ln(x+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n,\ \ |x|<1,\ \ \cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n},\ \ x\in\mathbb{R},$$

έχουμε :

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(x^2\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^{2n}=x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{4}x^8+\ldots,\ |x|<1$$

$$1-\cos x=1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}=1-(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots)=\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6-\ldots$$

Οι τύποι αυτοί ισχύουν στην περιοχή του μηδενός, όπου υπολογίζεται το ζητούμενο όριο, και άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{4}x^8+...}{\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6-...}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{4}x^6+...\right)}{x^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4-...\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{4}x^6+...}{\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4-...}=\frac{1-0+0-0+...}{\frac{1}{2!}-0+0-...}=2.$$

Β. Για να είναι η *f* παραγωγίσιμη στο 1 θα πρέπει να είναι και συνεχής. Επομένως:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=2\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}(ax^2+\beta x+3)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+\gamma x+2)=2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+\beta+3=2\\ 3+\gamma=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-1-a\\ \gamma=-1\end{cases}$$

Από την άλλη μεριά, και οι πλευρικές παράγωγοι της f στο 1 θα πρέπει να υπάρχουν και να συμπίπτουν :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{(ax^2+\beta x+3)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2+\gamma x+2)-2}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{ax^2+\beta x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\gamma x}{x-1}\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{ax^2+(-1-a)x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{ax^2-x-ax+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)}{x-1}\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{a(x^2-x)-(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{ax(x-1)-(x-1)}{x-1}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}(ax-1)=1\Leftrightarrow a-1=1\Leftrightarrow a=2$$

Οπότε και $\beta = -1 - \alpha = -3$.

Άρα τελικά οι ζητούμενες τιμές είναι : α=2, β=-3, γ=-1.

Άσκηση 4 (12 μον.)

Α. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

$$\int(x+\pi)\sin\left(nx\right)dx\ ,\quad \int(x+\pi)\cos\left(nx\right)dx$$

Β. Να βρεθεί η τριγωνομετρική σειρά Fourier της $f(x) = x+\pi$, $-\pi<x<\pi$.

Γ. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ανάπτυγμα δείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Δ. Χρησιμοποιώντας Matlab σχεδιάστε την $f(x) = x+\pi$ στο διάστημα (-π,π) καθώς και τα μερικά αθροίσματα του αναπτύγματός της σε σειρά Fourier για έναν, τρεις και πέντε όρους.

<u>Λύση</u>

Α.

$$\int (x+\pi)\sin(nx)dx = \int x\sin(nx)dx + \pi\int \sin(nx)dx = \int x(\frac{-\cos(nx)}{n})'dx - \frac{\pi}{n}\cos(nx) + C =$$

$$= -x\frac{\cos(nx)}{n} + \int (x)'\frac{\cos(nx)}{n}dx - \frac{\pi}{n}\cos(nx) + C = -x\frac{\cos(nx)}{n} + \int \frac{\cos(nx)}{n}dx - \frac{\pi}{n}\cos(nx) + C =$$

$$= -x\frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{\pi}{n}\cos(nx) + C$$

B.

Εφόσον $T=2\pi$ και $x_0=-\pi$ η σειρά Fourier της f είναι της μορφής:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(x+\pi)^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{\pi}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} - \frac{\pi}{n}\cos(n\pi) - \pi\frac{\cos(-n\pi)}{n} + \frac{\pi}{n}\cos(-n\pi)\right] =$$

$$= -\frac{2\cos(n\pi)}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x), \quad \sin(n\pi) = 0, \quad \cos(n\pi) = (-1)^n$.

Δηλαδή

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ -\frac{2}{n}, & n = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

Επομένως η σειρά Fourier της f είναι η

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] =$$
$$= a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) =$$
$$= \pi + 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{5}\sin(5x) - \dots \right]$$

Γ.

Έχουμε από τα παραπάνω ότι για $-\pi<x<\pi$,

$$\pi + x = \pi + 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{5}\sin(5x) - \dots \right]$$

και θέτοντας $x = \dfrac{\pi}{2}$ έχουμε

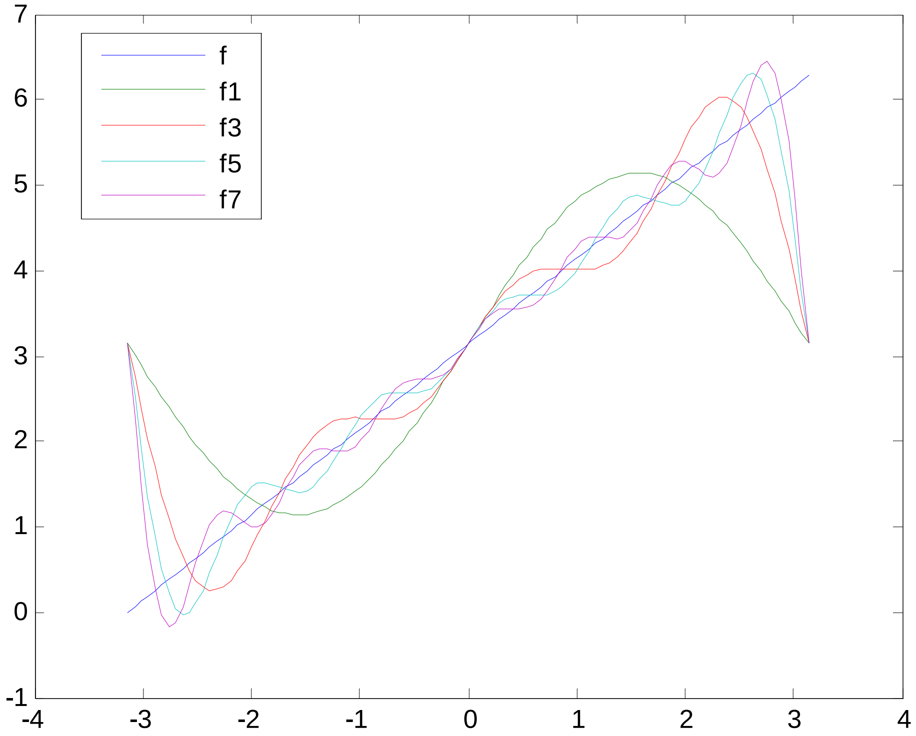
$$\frac{\pi}{2} = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin(\pi) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}) - \frac{1}{4}\sin(2\pi) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}) - \frac{1}{6}\sin(3\pi) + \dots \right],$$

δηλαδή $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Δ.

```
>> clear all
>> x=linspace(-pi,pi);
>> f=x+pi;
>> f1=pi+2*sin(x);
>> f3=pi+2*(sin(x)-1/2*sin(2*x)+1/3*sin(3*x));
>> f5=pi+2*(sin(x)-1/2*sin(2*x)+1/3*sin(3*x)-1/4*sin(4*x)+1/5*sin(5*x));
>>f7=pi+2*(sin(x)-1/2*sin(2*x)+1/3*sin(3*x)-1/4*sin(4*x)+1/5*sin(5*x)-
1/6*sin(6*x)+1/7*sin(7*x));
>> plot(x,f,x,f1,x,f3,x,f5,x,f7)
```

Το αποτέλεσμα



μας δείχνει ότι όσο περισσότερους όρους θεωρήσουμε τόσο καλύτερη προσέγγιση της συνάρτησης επιτυγχάνουμε.

Άσκηση 5 (18 μον.)

Α. (10 μον.)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x}$, x>0. Προσδιορίστε :

(i) Τα διαστήματα στα οποία είναι αύξουσα ή φθίνουσα.
(ii) Τα τοπικά ακρότατά της.
(iii) Τα διαστήματα στα οποία στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή προς τα κάτω.
(iv) Τα σημεία καμπής
(v) Τα σημεία τομής με τους άξονες.

Β. (8 μον.) Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, όπου $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x}$ και a το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

<u>Λύση</u>

Α.

(i) Τα διαστήματα στα οποία είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Η παράγωγος της συνάρτησης είναι

$$f'(x)=\frac{(1+2\ln x)'x-(1+2\ln x)x'}{x^2}=\frac{\frac{2}{x}x-(1+2\ln x)}{x^2}=\frac{1-2\ln x}{x^2}$$

η δεύτερη παράγωγός της

$$f''(x)=\frac{(1-2\ln x)'x^2-(1-2\ln x)\left(x^2\right)'}{x^4}=\frac{-\frac{2}{x}x^2-(1-2\ln x)2x}{x^4}=\frac{4\left(\ln x-1\right)}{x^3}$$

Για την μονοτονία

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-2\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow 1-2\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{\ln x}<e^{1/2}\Leftrightarrow x<e^{1/2}=\sqrt{e}$$

Οπότε στο διάστημα $\left(0,\sqrt{e}\right)$ είναι αύξουσα και στο διάστημα $\left(\sqrt{e},\infty\right)$ είναι φθίνουσα.

(ii) Τα τοπικά ακρότατά της.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-2\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-2\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{1/2}\Leftrightarrow x=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

το σημείο αυτό είναι πιθανό ακρότατο και επειδή

$$f''(\sqrt{e})=\frac{4\left(\ln e^{\frac{1}{2}}-1\right)}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{-2}{e^{\frac{3}{2}}}<0$$

είναι τοπικό μέγιστο με τιμή $f(\sqrt{e})=\frac{1+2\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}=\frac{2}{\sqrt{e}}$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει κανείς και από το αποτέλεσμα του προηγούμενου υποερωτήματος : Η συνάρτηση στο διάστημα $\left(0,\sqrt{e}\right)$ είναι αύξουσα και στο διάστημα $\left(\sqrt{e},\infty\right)$ είναι φθίνουσα. Συνεπώς, στο $\sqrt{e}$ θα έχουμε τοπικό μέγιστο.

Θα πρέπει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης και στα άκρα του πεδίου ορισμού της δηλαδή στο 0+ και στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1+2\ln x}{x}=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\left(1+2\ln x\right)\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)\lim_{x\to 0+}\left(1+2\ln x\right)\overset{(+\infty)(-\infty)}{=}-\infty$$

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(1+2\ln x\right)'}{x'}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{2}{x}}{1}\right)=0$$

Οπότε το σημείο $x=e^{1/2}=\sqrt{e}$ είναι ολικό μέγιστο.

(iii) Τα διαστήματα στα οποία στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή προς τα κάτω.
Εξετάζουμε:

$$f''(x)=\frac{4\left(\ln x-1\right)}{x^3}>0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow e^{\ln x}>e\Leftrightarrow x>e$$

εφόσον ισχύει ότι $x>0$.
$f''(x)<0\Leftrightarrow x<e$

Οπότε στο διάστημα $\left(0,e\right)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και στο διάστημα $\left(e,\infty\right)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

(iv) Τα σημεία καμπής

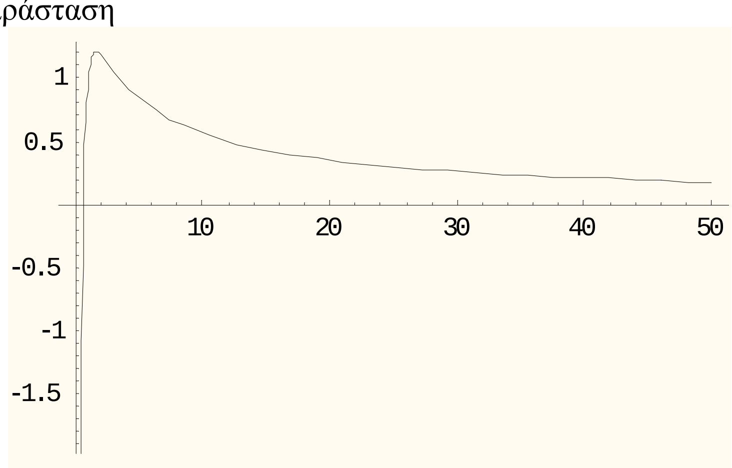
$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

Στο σημείο αυτό έχουμε σημείο καμπής εφόσον η f'' αλλάζει πρόσημο δεξιά και αριστερά του.

(v) Τα σημεία τομής με τους άξονες.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1+2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow 1+2\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{-1/2} \Leftrightarrow x=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Η γραφική της παράσταση



B.

Το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης είναι

$$\int \frac{1+2\ln x}{x}dx=\int \frac{1}{x}dx+2\int \frac{\ln x}{x}dx=\int \frac{1}{x}dx+2\int \ln x(\ln x)'dx=$$

$$=\ln x+2\frac{(\ln x)^2}{2}+C=\ln x+(\ln x)^2+C$$

Ζητάμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{1/\sqrt{e}}^{\infty} f(x)dx=\int_{1/\sqrt{e}}^{\infty}\frac{1+2\ln x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{1/\sqrt{e}}^{b}\frac{1+2\ln x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\left[\ln x+(\ln x)^2\right]_{1/\sqrt{e}}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\ln b+(\ln b)^2-\ln\left(1/\sqrt{e}\right)-\left(\ln\left(1/\sqrt{e}\right)\right)^2\right]=\infty+\infty+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=+\infty$$

Δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

Άσκηση 6 (12 μον.)

Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(n+3)}{(n+1)!}$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{n^2+n}$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-4)^n}{n^2+9}$$

<u>Λύση</u>

(i) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου :

Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *σειρά πραγματικών αριθμών με* $\alpha_n \neq 0$ *, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *με* $n \geq p$ *, όπου* p *σταθερός φυσικός αριθμός.* Υποθέτουμε, με άλλα λόγια, ότι το μηδέν δεν περιέχεται στους όρους της σειράς από κάποιον δείκτη και μετά. *Τότε:*

Αν $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq r < 1$*, για κάθε φυσικό* $n \geq n_0$ *(*$n_0 \in \mathbb{N}$*), (ή, ειδικότερα, αν* $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$*), τότε η σειρά συγκλίνει.*

Αν $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$*, για κάθε φυσικό* $n \geq n_0$ *(*$n_0 \in \mathbb{N}$*), (ή, ειδικότερα, αν* $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$*), τότε η σειρά δεν συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$*, οπότε είτε θα απειρίζεται είτε θα κυμαίνεται. .*

Αν $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$*, τότε δεν μπορούμε να μπορούμενα συμπεράνουμε για την σύγκλιση της σειράς με βάση το Κριτήριο του Λόγου.*

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε :

$$\frac{\left|\frac{n(n+4)}{(n+2)!}\right|}{\left|\frac{(n-1)(n+3)}{(n+1)!}\right|} = \frac{\frac{n(n+4)}{(n+2)(n+1)!}}{\frac{(n-1)(n+3)}{(n+1)!}} = \frac{n(n+4)}{(n+2)(n-1)(n+3)},$$

το οποίο συγκλίνει στο 0 αφού ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του αριθμητή. Άρα η σειρά συγκλίνει.

(ii) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας :

Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *σειρά πραγματικών αριθμών. Τότε:*

- *Αν* $\sqrt[n]{|a_n|} \le r < 1$ *, για κάθε φυσικό* $n \ge n_0$ *(* $n_0 \in \mathbb{N}$ *), (ή, ειδικότερα, αν* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$*), τότε η σειρά συγκλίνει.*
- *Αν* $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ *, για άπειρο πλήθος δεικτών n (ή, ειδικότερα, αν* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*), τότε η σειρά δεν συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$.
- *Αν* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$*, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε θετικά αν η σειρά συγκλίνει ή όχι με βάση το Κριτήριο της Ρίζας.*

Εδώ έχουμε :

$$\sqrt[n]{\left|\frac{3^{2n-1}}{n^2+n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{(3^2)^n 3^{-1}}{n^2+n}} = 3^2 \sqrt[n]{\frac{1}{3}} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+n}} \longrightarrow 9 \cdot 1 \cdot 1 = 9 > 1$$

και άρα η σειρά δεν συγκλίνει.

(iii)

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου έχουμε :

$$\left|\frac{\dfrac{(-1)^n (x-4)^{n+1}}{(n+1)^2+9}}{\dfrac{(-1)^{n-1}(x-4)^n}{n^2+9}}\right| = \left|\frac{\dfrac{(x-4)^n (x-4)}{n^2+2n+10}}{\dfrac{(x-4)^n}{n^2+9}}\right| = \frac{n^2+9}{n^2+2n+10} \cdot |x-4| \xrightarrow{n\to+\infty} |x-4|$$

Έτσι,

- Η σειρά συγκλίνει αν $|x-4| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-4 < 1 \Leftrightarrow 3 < x < 5$
- Η σειρά αποκλίνει αν $|x-4| > 1 \Leftrightarrow x-4 < -1$ η $x - 4 > 1$ $\Leftrightarrow x < 3$ η $x > 5$
- Για x=3 ή x=5 το κριτήριο λόγου δεν μπορεί να δώσει συμπέρασμα. Ελέγχουμε λοιπόν αυτές τις περιπτώσεις ξεχωριστά :
    - Για x = 3 η σειρά γίνεται :

      $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n^2+9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n^2+9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}(-1)}{n^2+9} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}$$

      η τελευταία συγκλίνει αφού είναι μικρότερη από την p-σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

- Για x = 5 η σειρά γίνεται : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+9}$, η οποία επίσης συγκλίνει αφού είναι εναλλάσσουσα σειρά και η ακολουθία $\frac{1}{n^2+9}$ είναι μηδενική και φθίνουσα. (Θυμίζουμε ότι οι σειρές των οποίων οι όροι εναλλάσσουν το πρόσημό τους συνεχώς ονομάζονται *εναλλάσσουσες*. Πρόκειται, δηλαδή, για σειρές της μορφής $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$. Αν σε μια τέτοια σειρά η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που την παράγει είναι θετική και φθίνουσα (ισχύει δηλαδή ότι: $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ για κάθε δεικτη n=0,1,…, τότε η σειρά συγκλίνει).

Άσκηση 7 (10 μον.)
Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

Α. $I_1 = \int \frac{x}{(x-1)^2(x-2)}dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ανάλυση σε απλά κλάσματα)

Β. $I_2 = \int \frac{1}{1+\sin x - \cos x}dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση ω=tan(x/2) καθώς και τους τύπους : $\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$, $\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$)

<u>Λύση</u>

Α. Οι ρίζες του παρονομαστή είναι x=1 και x=2 με πολλαπλότητα 2 και 1 αντίστοιχα. Επομένως αναλύουμε σε απλά κλάσματα ως εξής :

$$\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

Απαλείφοντας τους παρονομαστές έχουμε :

$$x = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, οπότε

Για x=1 δίνει : 1 = -B, άρα B = -1.

Για x=2: 2 = C, άρα C = 2.

Για x=0: 0 = 2A - 2B + C => 0 = 2A + 2 + 2 , άρα A = -2.

Επομένως, το αρχικό κλάσμα αναλύεται σε απλά ως:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{-2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-2}$$

και το ζητούμενο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής :

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x-2)}dx = \int \frac{-2}{x-1}dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2}{x-2}dx =$$

$$= -2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-2| + c$$

Β. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που προτείνεται στην υπόδειξη έχουμε :

$$\omega = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan\omega \Rightarrow \frac{1}{2}dx = \frac{1}{1+\omega^2}d\omega \Rightarrow dx = \frac{2}{1+\omega^2}d\omega$$

Έτσι, το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$I_2 = \int \frac{1}{1+\sin x - \cos x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{2\omega}{1+\omega^2} - \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} \frac{2}{1+\omega^2} d\omega = \int \frac{1}{\frac{1+\omega^2 + 2\omega - 1 + \omega^2}{1+\omega^2}} \frac{2}{1+\omega^2} d\omega =$$

$$\int \frac{2}{2\omega^2 + 2\omega} d\omega = \int \frac{1}{\omega^2 + \omega} d\omega.$$

Για το τελευταίο δουλεύουμε και πάλι με ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{\omega^2 + \omega} = \frac{1}{\omega(\omega+1)} = \frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega+1} \Rightarrow 1 = A(\omega+1) + B\omega$$

Η σχέση αυτή δίνει:

Για ω = 0 → Α = 1

Για ω = -1 → Β = -1

Επομένως

$$\int \frac{1}{\omega^2 + \omega} d\omega = \int \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+1}\right) d\omega = \int \frac{1}{\omega} d\omega - \int \frac{1}{\omega+1} d\omega = \ln|\omega| - \ln|\omega+1| = \ln\left|\frac{\omega}{\omega+1}\right|$$

Έτσι, το αρχικό ολοκλήρωμα είναι :

$$I_2 = \int \frac{1}{1+\sin x - \cos x} dx = \int \frac{1}{\omega^2 + \omega} d\omega = \ln\left|\frac{\omega}{\omega+1}\right| = \ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\tan(\frac{x}{2})+1}\right| + c$$

Άσκηση 8 (12 μον.)

Α. (6 μον.) Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα για τα οποία γνωρίζουμε ότι P(A)=0.7, $P(A \cup B)$ =0.8, να βρεθεί η P(B) στις εξής περιπτώσεις:

(i) Όταν $A \cap B = \varnothing$

(ii) Όταν τα Α, Β είναι ανεξάρτητα,

(iii) Όταν P(A|B)=0.6

Β. (3 μον.) Σε μία εξέταση πολλαπλής επιλογής δίνονται πέντε απαντήσεις σε κάθε ερώτηση μία από τις οποίες είναι μόνο σωστή. Ο εξεταζόμενος είτε γνωρίζει την απάντηση, με πιθανότητα 0.7, είτε απαντά στη τύχη. Δείξτε ότι αν ο εξεταζόμενος απάντησε σωστά σε μία ερώτηση, η πιθανότητα να την γνώριζε είναι 0.92.

(Υπόδειξη : Θεωρήστε τα ενδεχόμενα Α={ο εξεταζόμενος απάντησε σωστά} και Β={ο εξεταζόμενος γνώριζε την απάντηση}. Ζητάμε τότε την P(B|A) για τον υπολογισμό της οποίας πρέπει να χρησιμοποιήσετε τον τύπο Bayes).

Γ. (3 μον.) Σε μία δίκη που αφορούσε την πατρότητα ενός παιδιού ο κατηγορούμενος μπόρεσε να αποδείξει ότι βρισκόταν εκτός της χώρας για το χρονικό διάστημα που άρχιζε 295 ημέρες πριν τη γέννηση του παιδιού και τελείωνε 240 ημέρες επίσης πριν τη γέννηση. Αν υποθέσουμε ότι η διάρκεια της κύησης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 270 ημέρες και τυπική απόκλιση 10 ημέρες, ποια είναι η πιθανότητα ο κατηγορούμενος να μην είναι ο πατέρας του παιδιού ;

(Υπόδειξη: Μετατρέψτε την κατανομή σε τυπική κανονική T και χρησιμοποιήστε ότι και Φ(2.5) = P(T<2.5) = 0.9798 και Φ(3) = P(T<3) =0.9987).

Λύση

Α.

(i) Όταν $A \cap B = \varnothing$, ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Οπότε, 0.8 = 0.7 + P(B). Συνεπώς, P(B) = 0.1 σε αυτήν την περίπτωση.

(ii) Όταν τα A, B είναι ανεξάρτητα ισχύει ότι $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Οπότε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
$$= P(A) + P(B) \cdot (1 - P(A))$$

Έτσι, $0.8 = 0.7 + P(B) \cdot (1 - 0.7) \Rightarrow 0.1 = 0.3 \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$

(iii) Όταν P(A|B)=0.6, έχουμε :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ αρα } P(A \cap B) = 0.6 \cdot P(B)$$

Επομένως,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0.6 \cdot P(B)$$
$$= P(A) + 0.4 \cdot P(B)$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τα δεδομένα της εκφώνησης, έχουμε:

$$0.8 = 0.7 + 0.4 \cdot P(B) \text{ δηλαδή } 0.1 = 0.4 \cdot P(B) \text{ και τελικά } P(B) = \frac{1}{4}$$

Β. Ακολουθώντας την υπόδειξη, ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
A={ο εξεταζόμενος απάντησε σωστά}, B={ο εξεταζόμενος γνώριζε την απάντηση}. Χρησιμοποιώντας τον τύπο Bayes έχουμε:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid B') \cdot P(B')}.$$

Όμως,

P(A|B) = η πιθανότητα ο εξεταζόμενος να απάντησε σωστά δεδομένου ότι γνώριζε την απάντηση = 1 (γνωρίζει την απάντηση άρα απαντάει σίγουρα σωστά)

P(B) = η πιθανότητα ο εξεταζόμενος να γνωρίζει την απάντηση = 0.7 (από την υπόθεση)

P(A|B΄) = η πιθανότητα ο εξεταζόμενος να απάντησε σωστά δεδομένου ότι δεν γνώριζε την απάντηση = η πιθανότητα να επιλέξει την σωστή απάντηση δεδομένου ότι απαντάει στην τύχη = 1/5 = 0.20 (πηλίκο ευνοϊκών περιπτώσεων προς το σύνολο)

P(B΄) = η πιθανότητα ο εξεταζόμενος να μην γνωρίζει την απάντηση = 1-P(B) = 0.3.

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο Bayes, έχουμε :

$$P(B \mid A) = \frac{1 \cdot 0.7}{1 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.3} \cong 0.92$$

Γ.

Η τυχαία μεταβλητή X=διάρκεια κύησης σε ημέρες, ακολουθεί την κανονική κατανομή $\left(X \approx N(270,10^2) \right)$ οπότε η μεταβλητή $Z = \dfrac{X-270}{10}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $\left(Z \approx N(0,1) \right)$.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα η σύλληψη να έγινε τη χρονική περίοδο που ο κατηγορούμενος απουσίαζε, δηλαδή:

$$P[240 < X < 295] = P\left[\frac{240-270}{10} < \frac{X-270}{10} < \frac{295-270}{10} \right] = P[-3 < Z < 2.5] =$$

$$= P[Z < 2.5] - P[Z < -3] = P[Z < 2.5] - \left(1 - P[Z < 3]\right) =$$

$$= \Phi[2.5] - 1 + \Phi[3] = 0,9798 - 1 + 0.9987 = 0,9785 = 97,85\%$$