ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 15 Ιουλίου 2007

ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Από τα κάτωθι Θέματα καλείστε να λύσετε το 1^o που περιλαμβάνει ερωτήματα από όλη την ύλη του μαθήματος, ενώ από τα Θέματα 2, 3, 4, 5 και 6 μπορείτε να επιλέξετε **το πολύ τέσσερα. Προσοχή: Αν προσπαθήσετε να επιλύσετε και τα πέντε Θέματα 2 – 6 πρέπει να μας υποδείξετε ποια τέσσερα από αυτά θέλετε να βαθμολογήσουμε.**

Θέμα 1. (40 μονάδες)

α) (5 μονάδες)

Δείξτε ότι το υποσύνολο $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad a+b=0,\ a,b,d \in \mathbb{R} \right\}$ του διανυσματικού χώρου των 2×2 πινάκων με πραγματικούς συντελεστές είναι διανυσματικός υπόχωρος και βρείτε μία βάση και τη διάσταση αυτού.

Λυση:

Ένα τυχόν στοιχείο του M_2 γράφεται ως $\begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, άρα

M_2 = span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ και συνεπώς υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των 2×2 πινάκων με πραγματικούς συντελεστές. Επιπλέον μία βαση του είναι το συνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ καθώς είναι γραμμικά ανεξάρτητο. dim M_2=2.

β) (5 μονάδες) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, g(x,y,z) = (x+z, x-y, 2x+2z)$$

Να βρεθούν ο πυρήνας και η εικόνα της g και μια βάση για κάθε ένα από τους υποχώρους αυτούς.

Λυση: Ο πίνακας της g ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Βρισκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ από την οποία έχουμε ότι

1^o αν $(x,y,z) \in Kerg$ τότε $x=-z, y=-z$ δηλαδή $Kerg = \{z(-1,-1,1), z \in \mathbb{R}\} = span\{(-1,-1,1)\}$ με βάση το μονοσύνολο $\{(-1,-1,1)\}$.

2^o Η εικόνα της g παράγεται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις δύο πρώτες στήλες του πίνακα της g τα οποία είναι και γραμμικά ανεξάρτητα οπότε αποτελούν και βάση της. Δηλαδή $\operatorname{Im} g = span\{(1,1,2),(0,-1,0)\}$

γ) (5 μονάδες)

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Λύση:
Ιδιοτιμες του είναι οι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$. Ιδιοδυανύσματα έχει το (-3,2) για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ και (-2,1) για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$.

δ) (5 μονάδες)

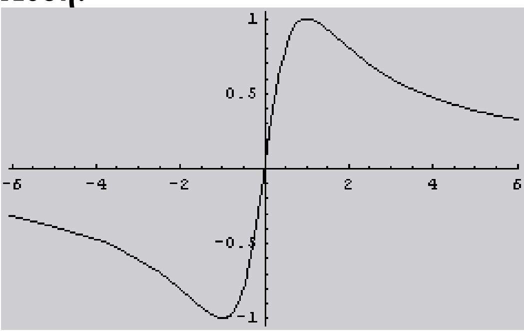
Να βρεθούν όλες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$.

Λύση:
Με το κριτηριο του λογου έχουμε ότι για $|x-1| < 1$ δηλαδή $0 < x < 2$ συγκλινει και για $|x-1| > 1$ δηλαδή $x<0$ ή $x>2$ αποκλίνει. Για $x=0$ συγκλίνει (κριτήριο Leibniz) , για $x=2$ αποκλίνει (αρμονική σειρά).

ε) (5 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ με $-\infty < x < \infty$. Υπολογίστε την $f'(x)$, βρείτε τα τοπικά ακρότατα και προσδιορίστε το είδος τους. Ποιό είναι το πεδίο τιμών της συνάρτησης;

Λύση:



$$f'(x) = 2\frac{(x^2+1)-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 2\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

x	**-∞**		**-1**		**0**		**1**		**+∞**
f′(x)		-	0	+		+	0	-	
f(x)	0	\	-1	/	0	/	1	\	0

στ) (5 μονάδες)

Δίνεται μια παραβολή με εξίσωση y = - x^2 + 2x. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της παραβολής και της ευθείας y = x.

Λύση:

$$E=\int_0^1 (-x^2+2x-x)dx = \int_0^1 (-x^2+x)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

ζ) (5 μονάδες) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα (α) $\int \frac{2}{x^2-1}dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ανάλυση σε απλά κλάσματα).

(β) $\int e^x \sin 2x dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

Λύση:

$\int \frac{2}{x^2-1}dx$ =ln| x-1| - ln |x+1| + C

$$\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx = e^x \sin 2x - 2(e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx)$$

αρα $5\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x$ συνεπώς $\int e^x \sin 2x dx = \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$

η) (5 μονάδες)

Να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Λύση:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2/2+...)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2+...}{x^2} = -1/2$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

<u>**Θέμα 2.**</u> (15 μονάδες)

Για ποιες τιμές των παραμέτρων *α, β* $\in \mathbb{R}$ έχει το κάτωθι σύστημα ακριβώς μια λύση, άπειρες λύσεις ή καμία λύση;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για τις τιμές που υπάρχει μια μόνο λύση, να βρεθεί η λύση αυτή συναρτήσει των *α,β*.

Λύση: Εργαζόμαστε με τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha+2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & -1 & \beta-2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\alpha\nu\ \alpha\neq 0} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/\alpha & (\beta-2)/\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \end{array}\right)$$ και αν

$$\alpha\nu\ \alpha\neq 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/\alpha & (\beta-2)/\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & (\beta-2)/\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-(\beta-2)/\alpha \\ 0 & 1 & 0 & (\beta-2)/\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

αρα εχουμε μοναδική λύση (x,y,z) =(1-(β-2)/α, (β-2)/α, 0).

Αν α=0 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta-2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\beta \end{array}\right)$ οπότε, αν επιπλέον β≠2, το συστημα είναι αδύνατο.

Αν α=0 και β=2 τοτε $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ και η γενική λύση είναι $(x,y,z) = (1-\lambda, \lambda, 0)$; λ αυθαίρετος.

Αν α=1, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & (\beta-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3-\beta \\ 0 & 1 & -1 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ και η γενική λύση είναι $(x,y,z) = (3-\beta-2\mu,\ \beta-2+\mu,\ \mu)$, μ αυθαίρετος,

<u>Θέμα 3.</u> (15 μονάδες)

Δίνεται ο πίνακας Α = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Δικαιολογείστε γιατί διαγωνοποιείται, βρέστε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματά του και στην συνέχεια διαγώνιο πίνακα Δ και αντιστρέψιμο πίνακα Ρ ετσι ώστε $A=P\Delta P^{-1}$.

Λύση:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)[(2-\lambda)^2-1]=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)=0$$

αρα οι ιδιοτιμές είναι 1 (διπλη) και 3 απλη. Για λ=1 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ προκύπτουν δυο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανυσματα (1,-1,0) και (0,0,1). Για λ=3 :

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ προκύπτει το (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανυσμα (1,1,0) .

Δ=διαγ(1,1,3), P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Θέμα 4.</u> (15 μονάδες)

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλισή τους οι σειρές και να βρεθεί το άθροισμά τους **όπου αυτό είναι δυνατόν**:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$, (β) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3^n+1}{2^n}\right)$, (γ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)$

Λύση:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$ αποκλίνει καθώς $\frac{n}{\sqrt{n^3+n}} = \frac{n}{n^{3/2}\sqrt{1+1/n^2}} = \frac{1}{n^{1/2}\sqrt{1+1/n^2}} \approx \frac{1}{n^{1/2}}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3^n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3^n}{2^n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \infty + \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2} = \infty + 1 = \infty$, άρα αποκλίνει αφού η πρώτη γεωμετρική σειρά έχει λόγο (3/2)>1.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$=(τηλεσκοπική)=1.

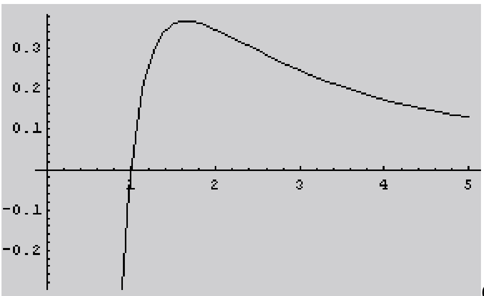
<u>Θέμα 5.</u> (15 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\frac{\ln x}{x^2}, \quad x > 0$

α) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα, την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Αν Ε(λ) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = λ>1, να βρείτε το Ε(λ) και στη συνέχεια να βρεθεί το όριο $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

Λύση:



α) $f'(x) = 2\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = 2\frac{x-2x\ln x}{x^4} = 2\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

Θέτοντας $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f′(x)		+	**0**	-	
f(x)	-∞	↑	**1/e**	↓	**0**

τοπικό και ολικό μέγιστο στο $\sqrt{e}$ το $f(\sqrt{e}) = 2\frac{\ln\sqrt{e}}{e} = \frac{1}{e}$ $\quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 2\frac{\ln x}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} \to -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} l'Hospital \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

Σύνολο τιμών = $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$

β) **Για** $x > 1 \Rightarrow f(x) > 0$ **οπότε** $E(\lambda) = 2\int_1^\lambda f(x)dx = \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}dx$

Θέτουμε u = lnx $\Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ **και** $x = e^u$**,** $x = 1 \longrightarrow u = 0, \qquad x = \lambda \longrightarrow u = \ln\lambda$

$$E(\lambda) = 2\int_0^{\ln\lambda} u \cdot \frac{1}{e^u}du = 2\int_0^{\ln\lambda} u \cdot e^{-u}du = 2\int_0^{\ln\lambda} u \cdot (-e^{-u})'du = \left[-2u \cdot e^{-u}\right]_0^{\ln\lambda} + 2\int_0^{\ln\lambda} e^{-u}du$$

$$= -2\ln\lambda \cdot e^{-\ln\lambda} - 2\left[e^{-u}\right]_0^{\ln\lambda} = -\frac{2}{\lambda}\ln\lambda - 2\left(e^{-\ln\lambda} - 1\right) = -\frac{2}{\lambda}\ln\lambda - \frac{2}{\lambda} + 2$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = 2\lim_{\lambda\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln\lambda}{\lambda}\right) = 2 - \lim_{\lambda\to+\infty} 2\frac{\ln\lambda}{\lambda} = 2 - 2\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{\lambda}}{1} = 2 - 0 = 2$$

<u>Θέμα 6.</u> (15 μονάδες)

(α) Από τα παραγόμενα τεμάχια μιας βιομηχανικής μονάδας το 2% είναι ελαττωματικά. Ποια είναι η πιθανότητα σε 100 τεμάχια να βρούμε τουλάχιστον δύο ελαττωματικά;

(β) Σε ένα διαγωνισμό για την πρόσληψη υπαλλήλων, ο μέσος όρος της βαθμολογίας ήταν 74 και η τυπική απόκλιση 7. Αν γνωρίζουμε ότι προσελήφθη το 12% των διαγωνιζομένων και οι βαθμοί κατανέμονται κανονικά, τι βαθμό είχε ο τελευταίος επιτυχών;

Υποδειξη: Διδονται οι παρακάτω τιμές $\Phi(1.0) = 0.84, \Phi(1.2) = 0.88, \Phi(1.5) = 0.93, \Phi(2.0) = 0.98$

Λύση:

(α) Η τυχαία μεταβλητή Χ που παριστά τα παραγόμενα ελαττωματικά τεμάχια της βιομηχανικής μονάδας, έχει Διωνυμική Κατανομή με n=100 και p= Πιθανότητα ελαττωματικών τεμαχίων=0.02. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος ζητάμε:

$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1]\} \quad (1)$

Αλλά ,επειδή $P[X = x] = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}, x = 0, 1, \ldots .n$,

Είναι: $P[X = 0] = \binom{100}{0}0.02^0 0.98^{100-0} = 0.98^{100} = 0.13$

Και : $P[X = 1] = \binom{100}{1}0.02^1 0.98^{100-1} = 100 \cdot 0.02 \cdot 0.98^{99} = 2 \cdot 0.98^{99}$

Τότε η (1) γίνεται: $P[X \geq 2] = 1 - 0.98^{100} - 2 \cdot 0.98^{99} = 1 - 0.98^{99}(0.98 + 2) = 1 - 2.98 \cdot 0.98^{99} = 0.59$

(β) Η τ.μ. Χ που παριστά τη βαθμολογία των υποψηφίων , έχει Κανονική Κατανομή με μέση τιμή μ=74 και τυπική απόκλιση σ=7.
Αν α είναι ο βαθμός του τελευταίου επιτυχόντος,
σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

$P[X > \alpha] = 0.12$, που συνεπάγεται: $P[X \le \alpha] = 0.88$ (1)

Όμως, η τυχαία μεταβλητή Ζ που ακολουθεί την Τυπική Κανονική Κατανομή, γράφεται:
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-74}{7}$

Τότε η (1) γίνεται: $P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right] = P\left[Z \le \frac{\alpha-74}{7}\right] = 0.88$

Δηλαδή $\Phi\left(\frac{\alpha-74}{7}\right) = 0.88$

Από τους Κανονικούς πίνακες έχουμε ότι $\Phi(1.2) = 0.88$

Άρα $\frac{\alpha-74}{7} = 1.2$. Δηλαδή, α=82.4