ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 24 Ιουνίου 2007

Από τα κάτωθι Θέματα καλείστε να λύσετε το 1ο που περιλαμβάνει ερωτήματα από όλη την ύλη του μαθήματος, ενώ από τα Θέματα 2, 3, 4, 5 και 6 μπορείτε να επιλέξετε **το πολύ τέσσερα. Προσοχή: Αν προσπαθήσετε να επιλύσετε και τα πέντε Θέματα 2 – 6 πρέπει να μας υποδείξετε ποια τέσσερα από αυτά θέλετε να βαθμολογήσουμε.**

Θέμα 1. (40 μονάδες)

α) (5 μονάδες)
Δείξτε ότι το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα στο $(2,3,-1)^T$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του.

Λύση:
Το σύνολο των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο $(2,3,-1)^T$ γράφεται
$V=\{(x,y,z)\ /\ 2x+3y-z=0\}$ και συνεπώς Το γενικό στοιχείο αυτού του συνόλου είναι V={ $x(1,0,2)+y(0,1,3), x,y\in\mathbb{R}$ }, και επομένως το V παράγεται από 2 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα που αποτελούν μια βάση του. Συνεπώς είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ με $\dim V=2$.

β) (5 μονάδες) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, g(x,y,z)=(x+y-z, x-ky, x+y+kz)$$

όπου $k\in\mathbb{R}$. Για τις διάφορες τιμές του k υπολογίστε τις διαστάσεις $\dim img, \dim\ker g$.

Λύση:
Ξέρουμε ότι η εικόνα της g παράγεται από τα $g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)$. Έχουμε $g(1,0,0)=(1,1,1), g(0,1,0)=(1,-k,1), g(0,0,1)=(-1,0,k)$. Σχηματίζουμε τον πίνακα με στήλες τα διανύσματα αυτά $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-k&0\\1&1&k\end{pmatrix}$. Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών φτάνουμε στον πίνακα $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-k-1&1\\0&0&k+1\end{pmatrix}$. Αν $k+1=0$, τότε ο A είναι σε κλιμακωτή μορφή και υπάρχουν 2 μη μηδενικές γραμμές. Άρα $\dim img=2$. Συνεπώς $\dim\ker g=\dim\mathbb{R}^3-\dim img=3-2=1$. Αν $k+1\neq 0$, τότε $\dim img=3$. Συνεπώς $\dim\ker g=3-3=0$.

γ) (5 μονάδες)
Εξετάστε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$.

Λύση:

Εύρεση ιδιοτιμών του πίνακα :

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2 .$$

Επομένως έχουμε μία διπλή ιδιοτιμή την λ=2.

Εύρεση αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων :

$$Au=2u\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}x+y=2x\\ -x+3y=2y\end{matrix}\Leftrightarrow y=x\Leftrightarrow u=x\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ x\in\mathbb{R}$$

Έτσι, για την διπλή ιδιοτιμή του 2x2 πίνακα Α δεν μπορούμε να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται.

δ) (5 μονάδες)

Να βρεθούν όλες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$

Λύση:

Μέσω του κριτηρίου του λόγου βρίσκουμε εύκολα ότι η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$ συγκλίνει για $|x-2|<1$ δηλαδή $1<x<3$ και αποκλίνει για $x>3$ και $x<1$.Συγκλίνει όμως και για $x=1$, $x=3$ απολύτως (άρα και απλά) λόγω σύγκρισης με την p=2 σειρά .

ε) (5 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2bx+4+a\ln(x^2)$ με x > 0. Υπολογίστε την $f'(x)$ και βρείτε τις πραγματικές παραμέτρους *a, b* έτσι ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1=1$, $x_2=2$ και προσδιορίστε το είδος των ακρότατων αυτών. Υπάρχουν τοπικά ή ολικά ακρότατα στα σημεία αυτά;

Λύση:

Παραγωγίζοντας την f(x) έχουμε $f'(x)=2x+2b+2a\frac{1}{x}=0$.

Για να παρουσιάζει η f ακρότατα στα σημεία $x_1=1$, $x_2=2$ θα πρέπει αυτά να μηδενίζουν την παράγωγο : δηλαδή πρεπει $f'(1)=0$ και $f'(2)=0$. Ετσι προκύπτει το συστημα

$$\begin{Bmatrix}2+2b+2a=0\\ 4+2b+a=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}a=2\\ b=-3\end{Bmatrix}$$

Υπολογίζοντας και την δεύτερη παράγωγο $f''(x)=2-4\frac{1}{x^2}$ στα x_1, x_2 βλέπουμε ότι στο $x_1=1$ υπάρχει τοπικό μέγιστο ενώ στο $x_2=2$ τοπικό ελάχιστο. Τα ακρότατα αυτά είναι τοπικά, επειδή για $x\to0$ η $f(x)\to-\infty$ και για $x\to\infty$ $f(x)\to\infty$.

στ) (5 μονάδες)

Δίνεται μια παραβολή με εξίσωση $y=x^2+1$.

1) Δείξτε ότι η ευθεία y = 2x είναι εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Β = (1,2). Φέρετε μέσω του Β ευθεία παράλληλη με τον άξονα Ox, η οποία τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο Α = (0,2).

2) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, του άξονα Oy και της παραβολής. Κατόπιν υπολογίστε το εμβαδόν μεταξύ της παραβολής, του άξονα Oy και της ευθείας y = 2x. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των δύο αυτών εμβαδών;

Λύση:

1) Αφού η κλίση της ευθείας $\frac{dy}{dx}=2$ συμπίπτει με την παράγωγο της παραβολής στο κοινό σημείο (1,2), η ευθεία και η παραβολή εφάπτονται στο σημείο αυτό.

2) Το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, του άξονα Oy και της παραβολής εύκολα δείχνεται ότι είναι $E_1=2-\int_0^1 (x^2+1)dx = 2-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$ και είναι διπλάσιο του εμβαδού μεταξύ παραβολής και ευθείας που είναι $E_2=\int_0^1 (x^2+1)dx-1=\left(\frac{1}{3}+1\right)-1=\frac{1}{3}$.

ζ) (5 μονάδες) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(α) $\int \frac{3x+1}{x^2-1}dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ανάλυση σε απλά κλάσματα).

(β) $\int e^x \sin^2 x dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

Λύση:

(α) $$\int \frac{3x+1}{x^2-1}dx=\int \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}dx=\int \frac{2}{x-1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx=2\ln|x-1|+\ln|x+1|+C$$

(β)

$$\int e^x \sin^2 x dx=\int e^x \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx \qquad (*)$$

Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της ως άνω σχέσης

$$\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x dx$$

$$\Rightarrow 5\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x \Rightarrow \int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5}(e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x)$$

και αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση (*) βρίσκοντας τελικά:

$$\int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{10}(e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x)$$

η) (5 μονάδες)

Να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ β) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ δ) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{|\sin x|}{\pi-x}$

Λύση:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$ εφαρμόζοντας 2 φορές L'Hospital.

β) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^3+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(1+2/x)}{x^{3/2}\sqrt{1+1/x+1/x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^{3/2}}=0$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x^{\sin x})=\ln l \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\ln l$. Αλλά

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1/\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1/x}{\cos x/\sin^2 x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x\cos x}\sin x=0$,
εφαρμόζοντας μια φορά L'Hospital. Επομένως $\ln l=0\Rightarrow\ l=1$.

δ) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{|\sin x|}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{|\sin(\pi-x)|}{\pi-x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{|\sin(\pi-x)|}{\pi-x}=1\\ \lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{|\sin(\pi-x)|}{\pi-x}=-1\end{cases}$ Άρα το όριο δεν υπάρχει.

<u>**Θέμα 2.**</u> (15 μονάδες)

Για ποιες τιμές των παραμέτρων *α, β*$\in\mathbb{R}$ έχει το κάτωθι σύστημα ακριβώς μια λύση, άπειρες λύσεις ή καμία λύση;

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\0&2&1\\1&a&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\beta\end{pmatrix}$$

Για τις τιμές που υπάρχει μια μόνο λύση, να βρεθεί η λύση αυτή συναρτήσει των *α,β*.

Λύση:

Ο αρχικός πίνακας μετασχηματίζεται στον

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&2&1&0\\1&a&2&\beta\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&2&1&0\\0&a-2&0&\beta-1\end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) α ≠ 2 : Η λύση είναι μοναδική και γράφεται $(x,y,z)=\left(\dfrac{a+2\beta-4}{a-2},\dfrac{\beta-1}{a-2},\dfrac{2(\beta-1)}{2-a}\right)$ αφού ο πίνακας μπορεί να γίνει :

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&a-2&(a-2)/2&0\\0&a-2&0&\beta-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&a-2&(a-2)/2&0\\0&0&(2-a)/2&\beta-1\end{pmatrix}$$

2) α = 2, β = 1 : Τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις αφού το σύστημα γίνεται :

$$\left.\begin{array}{c} x+2y+2z=1 \\ 2y+z=0 \\ x+2y+2z=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x=1+2y \\ z=-2y \end{array}$$

3) α = 2, β ≠ 1 : Το σύστημα είναι αδύνατο, δηλ. δεν υπάρχει καμία λύση.

<u>Θέμα 3.</u> (15 μονάδες)

Έστω $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(α) Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και οι ιδιοτιμές του A.
(β) Υπολογίστε τις δυνάμεις A^n όπου $n \geq 1$ με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton και δείξτε ότι $A^{2n}=A^2, A^{2n+1}=A$.
(γ) Αληθεύει ότι ο A διαγωνοποιείται;

Λύση:

(α) Έχουμε

$$\chi_A(x)=\det\left(xI-A\right)=\det\begin{pmatrix} x+5 & -4 & -1 \\ 6 & x-5 & -1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}=$$
$$=x((x+5)(x-5)+24)=x^3-x=x(x-1)(x+1).$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $0,1,-1$.

(β) Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε $A^3-A=0.$ Άρα

$$A^4=AA^3=AA=A^2,$$
$$A^5=AA^4=AA^2=A^3=A$$
$$A^6=AA^5=AA=A^2.$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $A^{2n}=A^2, A^{2n+1}=A$ για κάθε θετικό ακέραιο *n*. Πράγματι, η πρώτη σχέση αληθεύει για $n=1$. Έστω ότι αυτή αληθεύει για ένα συγκεκριμένο *n*. Τότε $A^{2(n+1)}=A^{2n}A^2=A^2A^2=AA^3=AA=A^2$. Η δεύτερη σχέση αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

(γ) Ο *A* διαγωνοποιείται γιατί είναι 3×3 και έχει 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές.

<u>Θέμα 4.</u> (15 μονάδες)

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλισή τους οι σειρές και να βρεθεί το άθροισμά τους όπου αυτό είναι δυνατόν:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

Λύση:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ Άρα η σειρά αποκλίνει λόγω σύγκρισης με την αρμονική.

(β) Προκειται για τηλεσκοπική σειρά : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=1$.

(γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ Η σειρά συγκλίνει, όπως δείχνει το κριτήριο του λόγου. Το άθροισμά της είναι το e^3.

Θέμα 5. (15 μονάδες)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $g(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$, $x\in(-\infty,\infty)$.

α) Αφού υπολογίστε $f'(x)$, $g'(x)$, εξετάστε την συμμετρία (αρτια, περιττή) μονοτονία , ακρότατα, σημεία τομής των αξόνων, και τα όρια καθώς $x\to\infty$, $x\to-\infty$.

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u=e^x$ δείξτε ότι $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=\int_{0}^{\infty}\frac{2}{u^2+1}du$ και συμπεράνετε ότι $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$, χωρίς να βρείτε την τιμή των ολοκληρωμάτων.

Λύση:

α) Οι παράγωγοι των συναρτήσεων είναι :

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} ,$$

$$g'(x)=\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)'=\frac{-2\left(e^x+e^{-x}\right)'}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{-2\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

Και οι δύο συναρτήσεις έχουν μέγιστο στο x = 0 και κανένα άλλο τοπικό ακρότατο, είναι άρτιες και τείνουν ασυμπτωτικά στο 0 για $x\to\pm\infty$.

β) $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{2}{u+u^{-1}}\frac{du}{u}=\int_{0}^{\infty}\frac{2}{u^2+1}du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{u^2+1}du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$

όπου έχουμε κάνει την αντικατάσταση $u=e^x$, $du=e^x dx=udx \Rightarrow dx=du/u$ και αλλάξαμε το κάτω όριο σε $e^{-\infty}=0$.

Θέμα 6. (15 μονάδες)

(α) Οι βαθμοί στην τελική εξέταση ενός μαθήματος, με άριστα το 20, ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο όρο το 12 και τυπική απόκλιση 2 μονάδες. Για να περάσει κανείς στο μάθημα αυτό πρέπει να συγκεντρώσει στο διαγώνισμα τουλάχιστον 10 μονάδες. Σε ένα τυχαίο δείγμα 3 μαθητών ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από αυτούς να περάσει το μάθημα; Δίνεται ότι, αν η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, τότε $P[Z \le 1] = 0.8413$.

(β) Ένας οδηγός έχει πιθανότητα 0.01 να συλληφθεί μεθυσμένος. Το αλκοτέστ κάνει ορθή διάγνωση στο 95% των περιπτώσεων, δηλαδή το τέστ είναι θετικό με πιθανότητα 0.95 εάν ο συλληφθείς είναι μεθυσμένος και αρνητικό με πιθανότητα 0.95 εάν δεν είναι. Ποια είναι η πιθανότητα ο συλληφθείς να είναι όντως μεθυσμένος δεδομένου ότι το τέστ είναι θετικό;
Υπόδειξη: Θεωρήστε Α το ενδεχόμενο «ο συλληφθείς είναι μεθυσμένος» και Θ το ενδεχόμενο «το τέστ είναι θετικό» και χρησιμοποιήστε τον τύπο του Bayes.

Λύση:

(α) Η τυχαία μεταβλητή Z που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή γράφεται Z = (X-μ)/σ = (X-12)/2. Η πιθανότητα ένας μαθητής να περάσει το μάθημα είναι $P[Z \le 1] = P[Z \ge -1] = 0{,}8413$.
Σε ένα τυχαίο δείγμα τριών μαθητών η πιθανότητα να περάσει το μάθημα τουλάχιστον ένας από αυτούς είναι σύμφωνα με τη διωνυμική κατανομή:
P(περνάει τουλάχιστον ένας)= 1 - P(δεν περνάει κανένας) =1 - $(1\text{-}0.8413)^3$ = $3*0.8413*(1\text{-}0.8413)^2$ $+3*0.8413^2*(1\text{-}0.8413) + (0.8413)^3 = 0.996$

(β) Σύμφωνα με το τύπο Bayes έχουμε:

$$P(\mathrm{A}/\Theta) = \frac{P(A)\cdot P(\Theta/\mathrm{A})}{P(A)\cdot P(\Theta/\mathrm{A}) + P(A')\cdot P(\Theta/\mathrm{A}')}$$

με $P(A) = 1/100 = 0.01$, $P(A') = 99/100 = 0.99$. Επίσης έχουμε

$P(\Theta/\mathrm{A}) = 0.95$, $P(\Theta/\mathrm{A}') = 0.05$ οπότε $P(\mathrm{A}/\Theta) = \dfrac{0.01\times 0.95}{0.01\times 0.95 + 0.99\times 0.05} \approx 0.161$

Άρα η πιθανότητα, μετά από θετικό τεστ, ο συλληφθείς να ήταν όντως μεθυσμένος είναι λιγότερο από ένα προς έξι.