ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 29 Ιουνίου 2008

Θέμα 1º (20 μονάδες)

α) (8 μονάδες)
Θεωρούμε το διανυσματικό υπόχωρο $P=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3, (x,y,z)\cdot(2,-2,4)=0\}$ του $\mathbb{R}^3$.

α1) Να βρεθεί η διάσταση του P.

α2) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του P που περιέχει το διάνυσμα $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

β) (6 μονάδες) Για την γραμμική απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=(x+y-2z,\ x+y+z,\ x+y-5z)$$

να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα της καθώς και την διάσταση της εικόνας της *f*.

γ) (6 μονάδες) Έστω $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ μια γραμμική απεικόνιση με $g(1,2)=(-1,1)$, $g(2,1)=(2,0)$.
Να βρεθεί η εικόνα $g(-4,1)$.

Λύση

α1) $(x,y,z)\in P$ αν και μόνο αν $2x-2y+4z=0$. Δηλαδή $x=y-2z$ με x, y αυθαίρετους πραγματικούς αριθμούς. Αρα το $(x,y,z)\in P$ έχει την μορφή $(y-2z,y,z)$ δηλαδή $y(1,1,0)+z(-2,0,1)$ άρα dim$P$=2.

(Αλλος τρόπος: P=(span{(2,2,-4)})$^\perp$. Αρα dim$P$=3- dim(span{(2,2,-4)})=3-1=2))

α2) (χωρίς Gramm-Schmidt). Αρκεί να βρούμε μοναδιαίο διάνυσμα (x,y,z) με $\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y=2x-2y+4z=0$. Οι λύσεις του συστήματος είναι $(-z,z,2z)$, όπου $z\in\mathbb{R}$. Επιλέγοντας πχ $z=1$, παίρνουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$ και η ζητούμενη βάση είναι το σύνολο

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

β) ο πίνακας της *f* ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&1\\1&1&-5\end{pmatrix}$ και η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&1\\1&1&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&0&3\\0&0&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα της f έχουμε ότι $(x,y,z)\in Kerf$ αν και μόνο αν $x=-y$ και $z=0$ δηλαδή $Kerf=\{y(1,-1,0), y\in\mathbb{R}\}=span\{(1,-1,0)\}$ με βάση το μονοσύνολο $\{(1,-1,1)\}$. Κατά συνέπεια η διάσταση της εικόνας της f είναι 3-1=2.

γ) Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από $(-4,1)=\lambda(1,2)+\mu(2,1)$ βρίσκουμε $\lambda=2, \mu=-3$. Επειδή η g είναι γραμμική έχουμε $g(-4,1)=2g(1,2)-3g(2,1)=2(-1,1)-3(2,0)=(-8,2)$.

<u>Θέμα 2^ο</u> **(20 μονάδες)** Έστω $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.

β) Εξετάστε αν ο A^n διαγωνοποιείται για κάθε φυσικό αριθμό *n*.

γ) Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $(AB)^{2008}$ όπου $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

δ) Δείξτε ότι $A^{2009}(A-6I)^{2008}=5^{2008}A$.

Λύση

α) Ιδιοτιμές 1,5 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}x, \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}x$ όπου $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Ο A^n έχει ιδιοτιμές 1, 5^n και άρα διαγωνοποιείται.

γ) $\det(AB)^{2008}=\det(A)^{2008}\det(B)^{2008}=5^{2008}(-1)^{2008}=5^{2008}$.

δ) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α είναι x^2-6x+5. Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε $A(A-6I)=-5I$ και αφού οι $A, A-6I$ αντιμετατίθενται παίρνουμε $A^{2008}(A-6I)^{2008}=(-5)^{2008}I=5^{2008}I$ οπότε $A^{2009}(A-6I)^{2008}=5^{2008}A$.

<u>Θέμα 3^ο</u> **(20 μονάδες)**

α) (8 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$, $0\le x\le 2$. Στο O*xy* επίπεδο θεωρούμε σημείο Μ της γραφικής παράστασης της *f* με συντεταγμένες $(x, f(x))$ και τις προβολές του Κ, Λ στους άξονες O*x*, O*y* αντίστοιχα. Εστω Ε(*x*) το εμβαδό του ορθογωνίου ΟΚΜΛ (δηλαδή το γινόμενο των μηκών των πλευρών του) ως συνάρτηση του *x*.

α1) Να υπολογίσετε την $T(x)=(E(x))^2$ (απλοποιείστε την παράσταση) και την παράγωγό της της Τ(*x*) ως προς *x*.

α2) Σε ποιά υποδιαστήματα του διαστήματος [0,2] είναι η Τ(*x*) αύξουσα και σε ποιά φθίνουσα;

α3) Να βρεθεί η τιμή του *x* για την οποία το εμβαδό του ορθογωνίου ΟΚΜΛ είναι μέγιστο και η τιμή του μέγιστου εμβαδού.

β) (12 μονάδες) Να υπολογίσετε τα όρια (<u>το β2) με χρήση σειρών Taylor</u>)

β1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(x)}{1+x^{3/2}}$, **β2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{\sin x}$,

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

β3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}$.

Λυση

α) Ε(*x*)= $x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$, Τ(*x*)= $x^2\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)$, Τ΄(*x*)= $x\left(2-x^2\right)$. Στο δάστημα [0,2], Τ΄(*x*)>0 ανν $0<x<\sqrt{2}$, και Τ΄(*x*)<0 ανν $\sqrt{2}<x<2$, άρα Τα είναι αύξουσα στο [0, $\sqrt{2}$] και φθίνουσα στο [$\sqrt{2}$,2]. Η μέγιστη τιμή της Τ , $0\le x\le 2$, είναι Τ($\sqrt{2}$)=1 άρα και η μέγιστη τιμή της Ε(*x*), για $0\le x\le 2$, είναι $\sqrt{1}=1$.

β1) Με κανόνα L'Hopital, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(x)}{1+x^{3/2}}=0$

β2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\sin x}$=-2 ,

β3) Επειδή $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}=\frac{|x-1|-x+1}{2x^2-x-1}$ έχουμε ότι

για x>1, $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}=\frac{0}{2x^2-x-1}=0$, άρα $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}=0$.

Για x<1, $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}=\frac{-(x-1)-x+1}{2x^2-x-1}=\frac{-2x+2}{2x^2-x-1}=\frac{-2(x-1)}{(x-1)(2x+1)}=\frac{-2}{(2x+1)}$,

$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(2x+1)}=\frac{-2}{3}$. Συνεπώς δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}$.

<u>Θέμα 4º</u> (20 μονάδες)

α) (6 μονάδες) Για ποιά $x\in\mathbb{R}$ συγκλίνουν οι σειρές:

α1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n}$, **α2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$.

β) (5 μονάδες) Να εξεταστεί η σύγκλιση των σειρών:

β1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^3+4}}$, **β2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{3^n}$,

γ) (9 μονάδες) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

γ1) $\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)\,dx$, n=1,2,3…, **γ2)** $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$, **γ3)** $\int\frac{1}{4x^2-1}dx$

Λύση

α1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n}$, για x: $|x|<3$, **α2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$, για x: $|x-1|\le 1$, $0\le x\le 2$

β1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^3+4}}$ αποκλίνει καθώς $\frac{n^2+1}{\sqrt{n^3+4}}\sim\frac{n^2}{\sqrt{n^3}}\sim n^{1/2}$, **β2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{3^n}$ αποκλίνει καθώς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n}$ αποκλίνει.

γ1) $\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)\,dx=\frac{\pi}{n}$, n=1,2,3…,

γ2) $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}+C$,

γ3) $\int\frac{1}{4x^2-1}dx=\frac{1}{4}(\ln|2x-1|-\ln|2x+1|)+C$.

<u>Θέμα 5º</u> (20 μονάδες)

α) Εστω X ο χρόνος αναμονής στον προθάλαμο ενός ιατρείου. Εχει παρατηρηθεί ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x)=\begin{cases} ae^{-ax}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

όπου $a=\dfrac{1}{15}$

α1) (2 μονάδες) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)=P(X\leq x)$.

α2) (2 μονάδες) Αν καποιος έχει μπεί στο ιατρείο ακριβώς την ώρα που μπαίνουμε στον προθάλαμο, να βρεθεί η πιθανότητα να χρειαστει να περιμένουμε περισσότερο από 15 λεπτά ($P(X>15)$).

α3) (2 μονάδες) Αν καποιος έχει μπεί στο ιατρείο ακριβώς την ώρα που μπαίνουμε στον προθάλαμο, να βρεθεί η πιθανότητα να χρειαστει να περιμένουμε μεταξύ 15 και 20 λεπτών ($P(15\leq X\leq 20)$).

α4) (4 μονάδες) Αν την ώρα που μπαίνουμε στον προθάλαμο ο προηγούμενος ασθενής εξετάζεται ήδη για 15 λεπτά, να βρεθεί η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε περισσότερο από 15 λεπτά ($P(X>15+15\mid X>15)$).

β)

β1)Εστω X μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ η οποία έχει την ιδιότητα $P(X>a)=\frac{1}{2}P(X\leq a)$. Εάν γνωρίζετε ότι για την κατανομή $N(0,1)$ ισχύει $\Phi(0.43)=\frac{2}{3}$, να δείξετε ότι $a-0.43\sigma=\mu$.

β2) Αν οι τιμές του σιδήρου στο αίμα των ανδρών ενός πληθυσμού ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ=110mgr/dl και διακύμανση σ^2=25mgr^2/dl^2**,** να βρεθεί η τιμή a του σιδήρου για το οποίο το ποσοστό των ανδρών που την υπερβαίνει είναι το μισό του ποσοστού που δεν την υπερβαίνει.

Λύση

α1) Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x ae^{-at}dt, & x\geq 0 \end{cases},$$

άρα για x>0 έχουμε $F_X(x)=\int_0^x ae^{-at}dt=-e^{-at}\Big|_0^x=1-e^{-ax}=1-e^{-x/15}$.

α2) $P(X>15)$=1-$P(X\leq 15)$=1-(1-$e^{-15/15}$)=e^{-1}

α3) $P(15\leq X\leq 20)$=$P(X\leq 20)$-$P(X\leq 15)$=1-$e^{-20/15}$-(1-$e^{-15/15}$)=e^{-1}-$e^{-4/3}$

α4) $P(X>15+15\mid X>15)=\dfrac{P(X>15+15 \quad \kappa\alpha\iota \quad X>15)}{P(X>15)}=\dfrac{P(X>30)}{P(X>15)}=\dfrac{1-P(X\leq 30)}{1-P(X\leq 15)}$

$=\dfrac{1-(1-e^{-2})}{1-(1-e^{-1})}=\dfrac{e^{-2}}{e^{-1}}=e^{-1}$.

β1) $P(X>a)=\frac{1}{2}P(X\leq a)$ άρα $1-P(X\leq a)=\frac{1}{2}P(X\leq a)$ δηλαδή $P(X\leq a)=\frac{2}{3}$ δηλαδή $P(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{a-\mu}{\sigma})=\frac{2}{3}$ δηλαδή $\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})=\frac{2}{3}$ άρα $\frac{a-\mu}{\sigma}$=2/3 και συνεπώς $a-0.43\sigma=\mu$.

β2) Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του β1) για μ=110 και σ=25 οπότε
$a=\mu+0.43\sigma$=110+0.43 (25)=112.15.