ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 12 Οκτωβρίου 2007

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 9 Νοεμβρίου 2007.

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι Ασκήσεις της πρώτης εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 1 (Πίνακες, Ορίζουσες, Γραμμικά Συστήματα),
Κεφάλαιο 2 (Διανυσματικοί Χώροι)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό:

Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα, Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα, Κεφ4Ορίζουσες, Κεφ5 Οι χώροιR^n , Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι και Κεφ7 Βάση και Διάσταση.

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό:

Πίνακες, Οι Χώροι R^n, Διανυσματικοί Χώροι.

Στόχοι:

Εμπέδωση της μεθόδου απαλοιφής Gauss για την λύση (και διερεύνηση) γραμμικών συστημάτων (έμφαση στους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών πινάκων και την αντίστοιχη **αλγοριθμική** μέθοδο απαλοιφής Gauss με την οποία επιλύονται γραμμικά συστήματα και προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας που ανάγονται σε αυτά). Υπολογισμός ορίζουσας. Κριτήριο αντιστρεψιμότητας πίνακα και εύρεση αντιστρόφου με δύο μεθόδους. Μέθοδος απόδειξης με μαθηματική επαγωγή. Δυνάμεις πινάκων-διωνυμικό ανάπτυγμα- μηδενοδύναμοι πίνακες. Διανυσματικοί χώροι-υπόχωροι, γραμμική θήκη, βάσεις.

1. (20 μονάδες) (Μπορείτε να συμβουλευθείτε ΕΔΥ_Κεφ.2 , σελ 15-16 και ΣΕΥ_Πίνακες, σελ 36-39).

Θεωρούμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 3x-y-z&=a\\ 5x-3y+bz&=4 \end{aligned}\ .$$

Αφού γράψετε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος χρησιμοποιείστε την μέθοδο απαλοιφής Gauss για να διερευνήσετε για ποιες τιμές των *a*, *b* το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, μοναδική λύση ή είναι αδύνατο. Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων όταν το σύστημα είναι συμβιβαστό.

ΛΥΣΗ Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος μετατρέπεται με γραμμοπράξεις ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & a\\ 5 & -3 & b & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -4 & a-3\\ 0 & 2 & b-5 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -4 & a-3\\ 0 & 0 & b-1 & 2-a \end{array}\right) = \Pi\ .$$

Καλούμε $\boxed{A=2-a}$, και $\boxed{B=b-1}$.

Ι) Αν Β διάφορο του μηδενός , δηλ. b διάφορο του 1, συνεχίζουμε ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -4 & -1-A\\ 0 & 0 & 1 & \frac{A}{B} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1-\frac{A}{B}\\ 0 & 2 & 0 & -1-A+4\frac{A}{B}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{A}{B} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1-\frac{A}{B}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1+A}{2}+2\frac{A}{B}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{A}{B} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1-A}{2}+\frac{A}{B}\\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1+A}{2}+2\frac{A}{B}\\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{A}{B} \end{array}\right)$$

Καταλήγουμε σε μοναδική λύση του συστήματος την

$$(x,y,z)=\left(\frac{1-A}{2}+\frac{A}{B}, -\frac{1+A}{2}+2\frac{A}{B}, \frac{A}{B}\right)=\left(\frac{a-1}{2}+\frac{2-a}{b-1}, \frac{a-3}{2}+2\frac{2-a}{b-1}, \frac{2-a}{b-1}\right).$$

ΙΙ) Αν Β ίσο με μηδέν δηλ. $b=1$ τότε:

ΙΙΑ) Αν Α διάφορο του μηδενός, δηλ. $a\neq 2$ το σύστημα είναι αδύνατο.
ΙΙΒ) Αν Α ίσο με μηδέν, δηλ. $a=2$ τότε ο επαυξημένος πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με

$$\Pi \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 1/2\\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

και έχουμε z = κ, x =1/2+κ, y = - ½+2κ, οπου κ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός. Αρα το σύνολο των λύσεων είναι η ευθεία {(1/2,-1/2,0)+κ (1,2,1), κ$\in\mathbb{R}$ }.

Συμπερασματικά έχουμε:

***b*≠ 1**	**Σύνολο λύσεων το μονοσύνολο**	$\left\{\left(\frac{a-1}{2}+\frac{2-a}{b-1}, \frac{a-3}{2}+2\frac{2-a}{b-1}, \frac{2-a}{b-1}\right)\right\}$
***b*=1**	***a* ≠ 2**	**Σύνολο λύσεων:** $\varnothing$
	***a* =2**	**Σύνολο λύσεων: {(1/2, -1/2, 0)+ κ (1, 2, 1), κ$\in\mathbb{R}$ }**

2. (15 μονάδες)

Έστω $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & a\end{pmatrix}$. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $a \neq -3$.

Για τις τιμές αυτές υπολογίστε τον A^{-1}

α) με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα (βλ ΕΔΥ Κεφάλαιο 4, Ασκήσεις)

β) με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss (βλ. Βιβλίο σελίδα 54, Παράδειγμα).

ΛΥΣΗ Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ορίζουσας: Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να υπάρχει ο αντίστροφος του A είναι $\det(A) \neq 0$.

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του A (αναπτύσσοντας ως προς την πρωτη στήλη)

$$\det A = \begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & a\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & a\end{vmatrix} = 2(a+3)$$

Αρα ο Α αντιστρέφεται όταν και μόνο $\boxed{a \neq -3}$.

2α) Ο αντίστροφος ισούται προς $A^{-1} = (\det A)^{-1}\ adj(A)$. Ο $adj(A)$ υπολογίζεται με τα αλγεβρικά συμπληρώματα $A_{ij} = (-1)^{ij} D_{ij}$, όπου D_{ij} η ελάσσων ορίζουσα που αντιστοιχεί στο στοιχείο a_{ij}:

$A_{11}= a+3$, $A_{12}=0$, $A_{13}= 0$, $A_{21}= 15-4a$, $A_{22}= 2a$, $A_{23}= -6$, $A_{31}=-9$, $A_{32}=2$, $A_{33}= 2$.

$$adj(A)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+3 & 15-4a & -9\\ 0 & 2a & 2\\ 0 & -6 & 2\end{pmatrix}$$

οπότε $$A^{-1} = \frac{1}{2(a+3)}\begin{pmatrix}a+3 & 15-4a & -9\\ 0 & 2a & 2\\ 0 & -6 & 2\end{pmatrix} = \ = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{27}{2b}-2 & -\frac{9}{2b}\\ 0 & 1-\frac{3}{b} & \frac{1}{b}\\ 0 & \frac{-3}{b} & \frac{1}{b}\end{pmatrix}$$ όπου θεσαμε $\boxed{b = a+3}$.

2β) Θεωρούμε τον πίνακα Α επαυξημένο με τον ταυτοτικό πίνακα και με πράξεις στις γραμμές έχουμε:

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & a & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 5/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a+3 & 0 & -3 & 1\end{array}\right)$$

Θεωρούμε την περίπτωση $a+3 \neq 0$ (ειδάλλως ο πίνακας δεν αντιστρέφεται) και θέτοντας (για ευκολία) $\boxed{a+3 = b}$, με $\boxed{b \neq 0}$, συνεχίζουμε ως εξής:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 5/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/b & 1/b\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1/2 & 15/(2b) & -5/(2b)\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-3/b & 1/b\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/b & 1/b\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & -2+27/(2b) & -9/(2b)\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-3/b & 1/b\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/b & 1/b\end{array}\right) = \left(I \mid A^{-1}\right).$$

Άρα $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2+27/(2b) & -9/(2b) \\ 0 & 1-3/b & 1/b \\ 0 & -3/b & 1/b \end{pmatrix}$ με $\boxed{b = a+3 \neq 0}$.

3. (10 μονάδες) (βλ. ΕΔΥ_Κεφ 4)

Υπολογίστε την ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1+a & a & a & a & a \\ b & 1+b & b & b & b \\ c & c & 1+c & c & c \\ d & d & d & 1+d & d \\ e & e & e & e & 1+e \end{pmatrix}$.

(Υπόδειξη: Προσθέστε στην πρώτη γραμμή όλες τις άλλες και βγάλτε κοινό παράγοντα. Στη συνέχεια, πάλι με κατάλληλες πράξεις στις γραμμές μετατρέψτε τον πίνακα σε τριγωνικό).

ΛΥΣΗ

προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή όλες τις υπόλοιπες. Καλούμε S το άθροισμα $a+b+c+d+e$.

$$\det\begin{pmatrix} 1+a & a & a & a & a \\ b & 1+b & b & b & b \\ c & c & 1+c & c & c \\ d & d & d & 1+d & d \\ e & e & e & e & 1+e \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1+S & 1+S & 1+S & 1+S & 1+S \\ b & 1+b & b & b & b \\ c & c & 1+c & c & c \\ d & d & d & 1+d & d \\ e & e & e & e & 1+e \end{pmatrix} =$$

κοινός παράγοντας στην πρώτη γραμμή (1+S)

$$=(1+S)\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b & b & b \\ c & c & 1+c & c & c \\ d & d & d & 1+d & d \\ e & e & e & e & 1+e \end{pmatrix} =$$

αφαιρούμε από την $1^{η}$ στήλη από όλες τις υπόλοιπες

$$=(1+S)\ \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =(1+ a + b+ c+ d+ e)$$

Ορίζουσα τριγωνικού ισούται προς το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων.

4. (10 μονάδες) (Για την μέθοδο απόδειξης με επαγωγή βλ. ΕΔΥ_Κεφ 1 σελ 10 και για την άσκηση βλ. ΣΕΥ_Πίνακες σελ 17-21).

Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4a) Χρησιμοποιώντας επαγωγή αποδείξτε ότι $A^n = \frac{3^n - 1}{2} A + \frac{3 - 3^n}{2} I$ για κάθε μη αρνητικό ακέραιο *n*.

4b) Θεωρούμε την ακολουθία $x_0, x_1, \ldots$ πραγματικών αριθμών που ορίζεται από $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ για $n \geq 2$. Να υπολογιστεί το x_{2007}.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι η σχέση $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ είναι ισοδύναμη με τη $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$.

Οπότε έχουμε $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = AA \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$. Χρησιμοποιήστε το υποερώτημα 4a).

ΛΥΣΗ 4a) Θα δείξουμε με επαγωγή οτι $A^n = \frac{3^n - 1}{2} A + \frac{3 - 3^n}{2} I$ για κάθε μη αρνητικό ακέραιο *n*.

Για *n* =0 ισχύει καθώς $\frac{3^0 - 1}{2} A + \frac{3 - 3^0}{2} I = I = A^0$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για ένα μη αρνητικό ακέραιο *k*, δηλαδή, $A^k = \frac{3^k - 1}{2} A + \frac{3 - 3^k}{2} I$.

Τότε $A^{k+1} = A^k A = A\left(\frac{3^k - 1}{2} A + \frac{3 - 3^k}{2} I \right) = \frac{3^k - 1}{2} A^2 + \frac{3 - 3^k}{2} A$.

Στο σημείο αυτό καθώς εμφανίζεται ο A^2 αποδεικνύουμε την σχέση για *n* =2, δηλαδή $A^2 = 4A - 3I$. Πράγματι $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ και $4A - 3I = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Δηλαδή $A^2 = 4A - 3I$ και συνεχίζουμε ως εξής:

$$A^{k+1} = \frac{3^k - 1}{2}(4A - 3I) + \frac{3 - 3^k}{2} A = \frac{4 \cdot 3^k - 4 + 3 - 3^k}{2} A - 3\frac{3^k - 1}{2} I =$$

$$\frac{3 \cdot 3^k + 1}{2} A + \frac{3 - 3^{k+1}}{2} I = \frac{3^{k+1} + 1}{2} A + \frac{3 - 3^{k+1}}{2} I$$.Δηλαδή ισχύει για *k* +1.

Αρα ισχύει για κάθε *n* μη αρνητικό ακέραιο.

ΛΥΣΗ 4b) Εχουμε

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \frac{3^n - 1}{2} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3 - 3^n}{2} I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3^{n-1} - 1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3 - 3^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{3^{n-1} - 1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3 - 3^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4(3^{n-1} - 1) + 3 - 3^{n-1} \\ 3^{n-1} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3^{n-1} - 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $x_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ και $x_{2007} = \frac{1}{2}(3^{2007} - 1) =$

1911297213758719535163182246056556333873529830010378644227299540914985432119525747540240454797
0287949611783875862348599498214913846298687060570119299893936799280296876283900456537026487410
4349246837548252222508770896580844955629745838453881799525503355774909686131385595693951054673
9899296276937211721718640848455626084424845551857009191022938665451994707139888102715418623803
4922480228968166382931372409535225997257848357733812587197232556955034530378560950928891932366
7712795911242094291567822570210191029247448525089508121903360288169962341746619664107697670351
4300864611670256776376164458542432861251747354097250126647796006519371631949921473185331793391
9075921973154352266549682359041126690620623414962499660320252453685298353179618748662798358959
6765087532390511044656002822252487916192702413965332038646016314783539061047851380146211410954

669380535156743991692328155133882324042692407105025120393862006586942913018977314408996406589 5
321135669766141093.

5. (10 μονάδες) (βλ ΕΔΥ_Κεφ. 3, Άσκηση 4)

Έστω $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα υπολογίστε τη δύναμη B^{2007}.

ΛΥΣΗ

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} = 2I + N$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{=0}$$

$$B^n = (2I + N)^n = 2^n I + n2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2 = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & -n2^{n-1} & 4n2^{n-1} - 2^{n-2}5\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 2^n & 0 & -2n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & -n2^{n-1} & 2^{n-3} n(21-5n) \\ 0 & 2^n & 0 & -n2^n \\ 0 & 0 & 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Προχωρήστε στην λύση των επόμενων ασκήσεων αφού πρώτα διαβάσετε ΕΔΥ_Κεφ_6 και Κεφ_7 και κατανοήστε τον τρόπο λύσης των ασκήσεων σε αυτά.

6. (20 μονάδες)

6Α) Εξετάστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου των 2×2 πραγματικών πινάκων $M_{22}(\mathbf{R})$:

$$A=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix}, x,y\in \mathrm{R}\right\}, B=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & -x \end{pmatrix}, x\in \mathrm{R}\right\}, C=\left\{\begin{pmatrix} x & x^2 \\ x & -x \end{pmatrix}, x\in \mathrm{R}\right\}$$

ΛΥΣΗ _6Α)Το A <u>δεν</u> είναι υπόχωρος καθώς $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\notin A$.

Το B είναι υπόχωρος του $M_{22}(\mathbf{R})$ καθώς

$$B=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & -x \end{pmatrix}, x\in \mathrm{R}\right\}=\left\{x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, x\in \mathrm{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(Είναι εύκολο επίσης να το δείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό:

α) Το Β είναι μη κενό υποσύνολο του διαν.χώρου $M_{22}(\mathbf{R})$ καθώς $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in B$ (για x=0).

β) Θεωρούμε δύο στοιχεία του Β, $u=\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & -x \end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix} y & 0 \\ y & -y \end{pmatrix}$, $x,y\in \mathrm{R}$ και δύο πραγματικούς αριθμούς λ,μ. Θα δείξουμε ότι $\lambda u+\mu w\in B$.Πράγματι $\lambda u+\mu w=$

$$\lambda\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & -x \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} y & 0 \\ y & -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x+\mu y & 0 \\ \lambda x+\mu y & -(\lambda x+\mu y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & 0 \\ z & -z \end{pmatrix},$$ με $z=\lambda x+\mu y$.

Αρα ο $\lambda u+\mu w\in B$.).

Το C <u>δεν</u> είναι υπόχωρος καθώς για κάθε λ και x θα έπρεπε ο πίνακας

$\lambda\begin{pmatrix} x & x^2 \\ x & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x & \lambda x^2 \\ \lambda x & -\lambda x \end{pmatrix}$ να ανήκει στο C. Αυτό όμως ισχύει μόνο όταν $\lambda x^2=(\lambda x)^2$

Όμως $\lambda x^2=(\lambda x)^2 \Leftrightarrow \lambda x^2-(\lambda x)^2=0 \Leftrightarrow \lambda x^2(1-\lambda)=0$ δηλαδή λ=0 ή x=0 ή λ=1 και όχι για όλους τους πραγματικούς λ και x.

6Β) Θεωρούμε τους υπόχωρους του R^3, $U=\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 \,|\, x+y+2z=0\}$, $V=\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 \,|\, x+2y+z=0\}$.Βρείτε τη διάσταση και μια βάση για καθέναν από τους χώρους $U,V,\ U\cap V, U+V$. Αληθεύει ότι ο R^3 είναι το ευθύ άθροισμα των U,V; Να βρεθεί ένας χώρος W, τέτοιος ώστε $U\oplus W=\mathrm{R}^3$.

ΛΥΣΗ_6Β Για τον υπόχωρο $U=\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 \,|\, x+y+2z=0\}$:

Η εξίσωση $x+y+2z=0$ ισοδυναμεί με $x=-y-2z$ με σύνολο λύσεων που

περιγράφεται ως εξής : $\left.\begin{array}{l} x=-\kappa-2\lambda \\ y=\kappa \\ z=\lambda \end{array}\right\}, \kappa,\lambda\in \mathrm{R}$

Αρα $U=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 \left| x+y+2z=0\right.\right\}=\{(-\kappa-2\lambda,\kappa,\lambda),\kappa,\lambda\in \mathrm{R}\}=$

$\{\kappa(-1,1,0)+\lambda(-2,0,1),\kappa,\lambda\in \mathrm{R}\}=span\{(-1,1,0),(-2,0,1)\}$ και μάλιστα το σύνολο $\{(-1,1,0),(-2,0,1)\}$ είναι βάση του U καθώς τα δύο αυτά διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (άμεση απόδειξη από τον τρόπο που έχουν βρεθεί: $\kappa(-1,1,0)+\lambda(-2,0,1)$=(0,0,0) ισοδυναμεί με $(-\kappa-2\lambda,\kappa,\lambda)$=(0,0,0) δηλ. $\kappa=0$ και $\lambda=0$ **)**. Αρα ο ***U*** είναι διάστασης 2.

Παρόμοια, για τον υπόχωρο $V=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 \left| x+2y+z=0\right.\right\}=span\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$ με $\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$ βάση του *V* και ο υπόχωρος αυτός είναι διάστασης 2.

Για την τομή των υποχώρων *U*, *V* έχουμε:
$U\cap V=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 \left| x+y+2z=0 \ \kappa\alpha\iota\ x+2y+z=0\right.\right\}$.

Το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x+y+2z=0 \\ x+2y+z=0\end{matrix}\right\}$ ισοδυναμεί με το $\left\{\begin{matrix} x+y+2z=0 \\ y-\ z=0\end{matrix}\right\}$ δηλαδή $\left\{\begin{matrix} x=-3z \\ y=z\end{matrix}\right\}$ με z αυθαίρετο. Αρα $U\cap V=$ span{(-3,1,1)} υπόχωρος διάστασης 1 με βάση {(-3,1,1)}.

Για το άθροισμα των υποχώρων *U*, *V* έχουμε ότι

dim(*U*+*V*) =dim*U* + dim *V* - dim($U\cap V$) =2+2-1=3 και συνεπώς *U*+*V*= R^3 με βάση την συνήθη βάση του R^3, {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}.

Όμως ο R^3 δεν είναι ευθύ άθροισμα των υποχώρων *U*, *V* καθώς η τομή τους δεν είναι ο τετριμμένος υπόχωρος $\{\mathbf{0}\}$.

Ενας χώρος W, τέτοιος ώστε $U\oplus W=\mathrm{R}^3$ είναι αναγκαστικά διάστασης 1, δηλαδή παράγεται από ένα (μη μηδενικό) διάνυσμα. Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε ένα διάνυσμα στον R^3 που δεν ανήκει στον *U*. Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι (π.χ.) το (-1,0,1) που ανήκει στον *V* και δεν ανήκει στον *U* καθώς δεν είναι συγγραμμικό με το (-3,1,1) διάνυσμα που παράγει την τομή $U\cap V$.

7. (15 μονάδες) (Για την γραμμική θήκη (span) και βάσεις βλ. και ΣΕΥ_Διανυσματικοί Χώροι §§ 6.3, 6.4)

Θεωρούμε τον υπόχωρο $V = span(\alpha,\beta,\gamma)$ του R^4, όπου

$\alpha = (1,2,1,0), \beta = (3,0,1,1), \gamma = (-1,4,1,-1)$. Να βρεθεί μια βάση του V.

7a) Εξετάστε για ποιους πραγματικούς αριθμούς x έχουμε $(5,4,x,1) \in V$.

7b) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda, \mu \in \mathrm{R}$, με $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, έχουμε $V = span(\lambda\alpha - \mu\beta,\ \mu\alpha + \lambda\beta)$.

ΛΥΣΗ

Για να βρούμε μία βάση για τον V καθώς γνωρίζουμε ηδη ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του, μπορούμε να ακολουθήσουμε δυο αλγορίθμους (σελ. 112 βιβλιου). Ο πρώτος χρησιμοποιεί πίνακα με γραμμές τις συνιστώσες των γεννητόρων ως προς μία βάση του χώρου. Ενας τρόπος που στηρίζεται στον δεύτερο αλγόριθμο εύρεσης βάσης ενός υποχώρου όταν είναι γνωστό ένα σύστημα γεννητόρων του είναι ο εξής:
Σχηματίζουμε τον πίνακα με στήλες τις συνιστώσες των γεννητόρων (ως προς μία βάση του χώρου), και βρίσκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα αυτού. Μία βάση του υποχώρου αποτελείται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν σε εκείνες τις στήλες του αρχικού πίνακα τα οποία στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή περιέχουν τους οδηγούς.
Με την ίδια διαδικασία μπορούμε να απαντήσουμε και στο 7α) ερώτημα εφ' όσον επαυξήσουμε τον πίνακα με μία ακόμη στήλη που αντιστοιχεί στο διάνυσμα δ.

Σχηματίζουμε τον πίνακα Π με στήλες τις συντεταγμένες των *α*, *β*, *γ*, και *δ*=(5, 4, *x*, 1) (ως προς την συνήθη βάση) και με πράξεις στις γραμμές βρίσκουμε:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & x-5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & x-5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Pi'$$

Από τον τελευταίο πίνακα Π΄ είναι φανερό ότι:

1^{o} . Για να ανήκει το διάνυσμα δ στόν *V*, δηλαδή να είναι γραμμικός συνδυασμός των α,β,γ πρέπει και αρκεί *x* =3 και μάλιστα από τα στοιχεία της τέταρτης στήλης του Π΄ έχουμε ότι *δ*=2 *α*+*β*.

2^{o} . Η τρίτη στήλη του Π΄ ισούται με 2 φορές την πρώτη μείον την δεύτερη άρα το διάνυσμα γ είναι γραμμικός συνδυασμός των *α*, *β*: γ=2*α*-*β*.

3^{o} . Μια βάση του *V* είναι το σύνολο *B*={*α*,*β*}.

7β) Τα διανύσματα *ζ*=*λα*-*μβ*, *η*=*μα*+*λβ* ανήκουν στον υπόχωρο *V* ως γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων του.

Ως προς την βάση *B*, $[\zeta]_B = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix}$ και $[\eta]_B = \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Αφού $\det\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ έπεται ότι τα *ζ*, *η* είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επειδή ο *V* είναι διάστασης 2 αποτελούν βάση του *V*.