ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 12 Νοεμβρίου 2007

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 14 Δεκεμβρίου 2007.

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι Ασκήσεις της δεύτερης εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 3 (Χώροι εσωτερικού γινομένου),
Κεφάλαιο 4 (Γραμμικοί μετασχηματισμοί)
Κεφάλαιο 5 τις παραγράφους 5.1-5.2 (Χαρακτηριστικά μεγέθη και κανονικές μορφές γραμμικών απεικονίσεων) του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Εναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό:

Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι Κεφ7 Βάση και Διάσταση,
Κεφ8 Γραμμικές απεικονίσεις, Κεφ9 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, και
Κεφ10 Διαγωνοποίηση.

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό:

Γραμμικές απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση.

Στόχοι: Κατανόηση των εννοιών που αναφέρονται στο εσωτερικό γινόμενο, ορθοκανονική βάση, ορθογώνιο συμπλήρωμα υπόχωρου, στο γραμμικό μετασχηματισμό, στον πυρήνα του γραμμικού μετασχηματισμού, στα ιδιοποσά και στη διαγωνοποίηση πινάκων.

1. (18 μονάδες) (<u>Μπορείτε να συμβουλευθείτε ΕΔΥ_ Κεφ.7 σελ. 25-26 </u>).

Έστω ο υπόχωρος $W = span\{\mathbf{v}_1 = (2,2,-2,0),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,1,-1),\ \mathbf{v}_3 = (1,1,2,-4)\}$ του $\mathbf{R}^4$ που είναι εφοδιασμένος με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

i) Βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_3$. Τι παρατηρείτε;

ii) Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του υποχώρου W.

iii) Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^{\perp}$ του υποχώρου W.

iv) Υπολογίστε την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\mathbf{v} = (1,-1,1,1)$ επί του W και $W^{\perp}$.

<u>Λύση</u>

i) Επειδή $\mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_3 = 0$, η γωνία μεταξύ $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ είναι 90° όπως και αυτή μεταξύ των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_3$. Ετσι συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{v}_1 \in (span\{\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\})^{\perp}$.

ii) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gram-Schmidt στο σύνολο γεννητόρων του *W* έχουμε:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (2,2,-2,0),\ \hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1,0)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \underbrace{(\mathbf{v}_2 \circ \hat{\mathbf{u}}_1)}_{0}\hat{\mathbf{u}}_1 = (0,1,1,-1),\ \hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,-1)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \underbrace{(\mathbf{v}_3 \circ \hat{\mathbf{u}}_1)}_{0}\hat{\mathbf{u}}_1 - (\mathbf{v}_3 \circ \hat{\mathbf{u}}_2)\hat{\mathbf{u}}_2 = (1,1,2,-4) - \frac{7}{3}(0,1,1,-1) = (1,-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{5}{3})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{51}}(3,-4,-1,-5).$$

Η ορθοκανονική βάση που προκύπτει αποτελείται από τα:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1,0),\quad \hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,-1),\quad \hat{\mathbf{u}}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{51}}(3,-4,-1,-5).$$

iii) Καθώς $W = span\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ έχουμε ότι $W^{\perp} = \{\mathbf{w} \in \mathbf{R}^4 :\ \mathbf{w} \circ \mathbf{v}_1 = 0\ \&\ \mathbf{w} \circ \mathbf{v}_2 = 0\ \&\ \mathbf{w} \circ \mathbf{v}_3 = 0\}$

(ένα διάνυσμα ανήκει στον $W^{\perp}$ αν και μόνο αν είναι ορθογώνιο σε κάθε διανυσμα ενός συνόλου γεννητόρων του *W*).

Αρα, αν $(x,y,z,w) \in W^{\perp}$, το (x,y,z,w) είναι λύση του συστήματος: $\left.\begin{aligned} 2x + 2y - 2z \quad &= 0 \\ y + z - w &= 0 \\ x + y + 2z - 4w &= 0 \end{aligned}\right\}.$

Με γραμμοπράξεις στον πίνακα συντελεστών του ομογενούς γραμμικού συστήματος έχουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{pmatrix}$$ από όπου αμέσως βρίσκουμε την γενική λύση

$(x,y,z,w)=(5/3,-1/3,4/3,1)w$ και συνεπώς μία βάση του $W^{\perp}$ είναι $\{\mathbf{w_1}\}=\{(5,-1,4,3)\}$ από την οποια

παίρνουμε την ορθοκανονική βάση $\{\frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|}\}=\{\frac{1}{\sqrt{51}}(5,-1,4,3)\}$.

iv) Η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\mathbf{v}=(1,-1,1,1)$ επί του $W^{\perp}$ είναι

$$\pi\rho o\beta_{W^{\perp}}\mathbf{v}=\left(\mathbf{v}\bullet\frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|}\right)\frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|}=\frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{w_1}}{\mathbf{w_1}\bullet\mathbf{w_1}}\mathbf{w_1}=\frac{13}{51}(5,-1,4,3)$$

και η ορθογώνια προβολή του επί του W

$$\pi\rho o\beta_{W}\mathbf{v}=\mathbf{v}\text{-}\pi\rho o\beta_{W^{\perp}}\mathbf{v}=(1,-1,1,1)-\frac{13}{51}(5,-1,4,3)=\frac{1}{51}(-14,-38,-1,12)$$

<u>Σημείωση</u>: Αν μας είχε ζητηθεί αμέσως μετα το δευτερο ερώτημα να βρούμε την προβολή επί του υποχώρου *W*, καθώς ήδη γνωρίζουμε μία ορθοκανονική βάση του W, $\pi\rho o\beta_{W}\mathbf{v}=\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{3}}(\mathbf{v}\circ\hat{\mathbf{u}}_i)\hat{\mathbf{u}}_i=\cdots$.

2. (15 μονάδες)

Έστω ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

i) Να εξετάσετε αν ο πίνακας **A** είναι ορθογώνιος.

ii) Έστω **B** ο πίνακας που προκύπτει μετά από την κανονικοποίηση των γραμμών του πίνακα **A**. Είναι ο πίνακας **B** ορθογώνιος;

iii) Έστω $V = span\{\mathbf{v}_1 = (1,-2,4),\ \mathbf{v}_2 = (2,0,-4)\}$. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\mathbf{x} = (1,4,-1)$ ως άθροισμα δύο διανυσμάτων $\mathbf{y}$ και $\mathbf{w}$, όπου $\mathbf{y} \in V$ και $\mathbf{w} \in V^{\perp}$.

__**Λύση**__

i) $\mathbf{AA}^T = diag(6,8,48) \neq \mathbf{I}_3$, συνεπώς ο **A** δεν είναι ορθογώνιος.

ii) Έστω $\mathbf{a}_1 = (1,2,1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,0,2)$ και $\mathbf{a}_3 = (4,-4,4)$.

Επειδή $\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \circ \mathbf{a}_3 = 0$, μετατρέποντας τις γραμμές του **A** σε μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{a}}_1$, $\hat{\mathbf{a}}_2$, $\hat{\mathbf{a}}_3$,

έχουμε τον ορθογώνιο πίνακα $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

iii) Βρίσκουμε μία βάση του $V^{\perp} = \{\mathbf{v}:\ \mathbf{v} \circ \mathbf{v}_1 = 0,\ \ \mathbf{v} \circ \mathbf{v}_2 = 0\}$.

Εχουμε ότι το $(x,y,z) \in V^{\perp}$ αν και μονο αν $\begin{Bmatrix} x - 2y + 4z = 0 \\ 2x \qquad - 4z = 0 \end{Bmatrix}$.

Με γραμμοπράξεις στον πίνακα συντελεστών του ομογενούς γραμμικού συστήματος έχουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

από όπου έχουμε ότι $V^{\perp} = span\{(2,3,1)\}$.

Η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\mathbf{x} = (1,4,-1)$ επί του $V^{\perp}$ είναι

$$\mathbf{w} = \pi\rho o\beta_{V^{\perp}}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \circ (2,3,1)}{\|(2,3,1)\|}(2,3,1) = \frac{13}{14}(2,3,1) = (\frac{13}{7}, \frac{39}{14}, \frac{13}{14}),$$

και η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{x} = (1,4,-1)$ επί του V είναι $\mathbf{y} = \pi\rho o\beta_{V}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \pi\rho o\beta_{V^{\perp}}\mathbf{x} = (-\frac{6}{7}, \frac{17}{14}, -\frac{27}{14})$.

3. (12 μονάδες) (Μπορείτε να συμβουλευθείτε ΕΔΥ_Κεφ.6 σελ 18-19 και Κεφ.7 σελ. 25-26).

Έστω $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

i) Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} : (\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ με

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 3x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3,$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbf{R}^3$.

ii) Να βρείτε τον πίνακα του εσωτερικού γινομένου στο ερώτημα (i) ως προς την κανονική βάση του $\mathbf{R}^3$ και να εξετάσετε αν είναι θετικά ορισμένος.

Λύση

i) Για να αποτελεί η δοθείσα σχέση εσωτερικό γινόμενο αρκεί να επαληθεύει τις ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1. Θεωρούμε $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{R}^3$.

Εξετάζουμε αν ισχύει η I_1 ιδιότητα του ορισμού, δηλαδή $(\kappa\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \bullet \mathbf{z} = \kappa(\mathbf{x} \bullet \mathbf{z}) + \lambda(\mathbf{y} \bullet \mathbf{z})$.

α΄ μέλος = (από τον ορισμό του εσωτερ. γινομένου)=

$$3(\kappa x_1 + \lambda y_1)z_1 + 2(\kappa x_2 + \lambda y_2)z_1 + 2(\kappa x_1 + \lambda y_1)z_2 + 3(\kappa x_2 + \lambda y_2)z_2 + 2(\kappa x_3 + \lambda y_3)z_3$$

$$= 3\kappa x_1z_1 + 3\lambda y_1z_1 + 2\kappa x_2z_1 + 2\lambda y_2z_1 + 2\kappa x_1z_2 + 2\lambda y_1z_2 + 3\kappa x_2z_2 + 3\lambda y_2z_2 + 2\kappa x_3z_3 + 2\lambda y_3z_3 =$$

$$= 3\kappa x_1z_1 + 2\kappa x_2z_1 + 2\kappa x_1z_2 + 3\kappa x_2z_2 + 2\kappa x_3z_3 + 3\lambda y_1z_1 + 2\lambda y_2z_1 + 2\lambda y_1z_2 + 3\lambda y_2z_2 + 2\lambda y_3z_3 =$$

$$\kappa(3x_1z_1 + 2x_2z_1 + 2x_1z_2 + 3x_2z_2 + 2x_3z_3) + \lambda(3y_1z_1 + 2y_2z_1 + 2y_1z_2 + 3y_2z_2 + 2y_3z_3) =$$

(από τον ορισμό του εσωτερ. γινομένου)= β΄μέλος.

Για την ιδιότητα I_2 του ορισμού $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{x}$ έχουμε:

α΄ μέλος = $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ =(από τον ορισμό του εσωτερ. γινομένου)

$= 3x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3$ =(αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών)=

$3y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 3y_2x_2 + 2y_3x_3$ =(αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών)

$= 3y_1x_1 + 2y_2x_1 + 2y_1x_2 + 3y_2x_2 + 2y_3x_3$ =(από τον ορισμό του εσωτερ. γινομένου)= $\mathbf{y} \bullet \mathbf{x}$.

Για την I_3 ιδιότητα έχουμε:

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = 3x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 = 3(x_1^2 + x_2^2) + 4x_1x_2 + 2x_3^2.$$

Προσθετοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις ταυτότητες

$$(x_1 + x_2)^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2,\ (x_1 - x_2)^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

έχουμε $x_1^2 + x_2^2 \equiv \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2]$ και $4x_1x_2 \equiv (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$.

Οπότε

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = 3\frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2] + [(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2] + 2x_3^2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{5}{2}(x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 \geq 0,$$

άρα $\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} \geq 0$ ως άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων.

Για την ισότητα της τελευταίας ισότητας έχουμε:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Παρατήρηση: Επειδή $\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=3x_1y_1+2x_2y_1+2x_1y_2+3x_2y_2+2x_3y_3=\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, όπου $\mathbf{x}=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, $\mathbf{y}=[y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T$ και $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, άμεσα διαπιστώνουμε ότι:

I_1) $(k\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y})\circ\mathbf{z}=\mathbf{z}^T\mathbf{A}(k\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y})=k(\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{x})+\lambda(\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{y})=k(\mathbf{x}\circ\mathbf{z})+\lambda(\mathbf{y}\circ\mathbf{z})$

I_2) $\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=(\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x})^T=\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{y}^T)^T=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{y}\circ\mathbf{x}$, καθόσον $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$.

Για την (I_3) ιδιότητα απαιτείται η διαγωνοποίηση του συμμετρικού πίνακα **A**, που θα αναφερθούμε στην 3η εργασία.

ii) Αν θεωρήσουμε την κανονική βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ του χώρου $\mathbf{R}^3$, ο πίνακας αναπαράστασης του εσωτερικού γινομένου είναι

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_3\end{bmatrix},$$

όπου με $\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j$ συμβολίζεται το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων που ορίστηκε στο (i), (δείτε παράγραφο 3.7 του βιβλίου). Από τη ιδιότητα (I_2) του εσωτερικού γινομένου, αρκεί να υπολογισθούν τα $\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j$, για τα οποία ισχύει $\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_j\circ\mathbf{e}_i$. Έχουμε:

$\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_1=(1,0,0)\circ(1,0,0)=3$, $\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_2=(1,0,0)\circ(0,1,0)=2=\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_1$,

$\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_3=(1,0,0)\circ(0,0,1)=0=\mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_2=(0,1,0)\circ(0,1,0)=3$,

$\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_3=(0,1,0)\circ(0,0,1)=0=\mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_3=(0,0,1)\circ(0,0,1)=2$,

οπότε $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

Από τον ορισμό 3.7.1 εχουμε ότι ο συμμετρικος πίνακας A είναι θετικά ορισμένος, αν για κάθε μη μηδενικό πινακα-στηλη $\mathbf{x}$ ισχύει $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x}>\mathbf{0}$. δηλαδή, αν $(x_1,x_2x_3)\neq(0,0,0)$, τότε $3x_1^2+2x_2x_1+2x_1x_2+3x_2^2+2x_3^2>0$. Αυτό όμως ισχύει λόγω της ιδιότητας I_3 του εσωτερικού γινομένου που εχει αποδειχθεί στο i) .(ενας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 3.7.2 του βιβλίου: Ο συμμετρικός πίνακας **A** του εσωτερικού γινομένου είναι θετικά ορισμένος καθόσον $\det[3]=3>0$, $\det\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}=5>0$ και $\det\mathbf{A}=10>0$).

4. (20 μονάδες) (Μπορείτε να συμβουλευθείτε ΕΔΥ_Κεφ.8 και

ΣΕΥ_Γραμμικές απεικονίσεις, σελ 1-47).

Έστω ο μετασχηματισμός $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ με

$$f(x,y,z) = (x+y+z,\ 2x-3y+4z).$$

i) Να αποδείξετε ότι ο f είναι γραμμικός.

ii) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση της εικόνας του f.

iii) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του πυρήνα του f.

iv) Υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός f^{-1};

v) Να υπολογίσετε τον πίνακα αναπαράστασης του f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$.

Λύση

i) Ο μετασχηματισμός f είναι γραμμικός, διότι για κάθε $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ στον $\mathbf{R}^3$ έχουμε:

$f(k(x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)) = f(kx_1+\lambda x_2, ky_1+\lambda y_2, kz_1+\lambda z_2) =$
$= \left(kx_1+\lambda x_2+ky_1+\lambda y_2+kz_1+\lambda z_2, 2(kx_1+\lambda x_2)-3(ky_1+\lambda y_2)+4(kz_1+\lambda z_2)\right)$ (από τον ορισμό της f)

$= k(x_1+y_1+z_1, 2x_1-3y_1+4z_1)+\lambda(x_2+y_2+z_2, 2x_2-3y_2+4z_2)$

$= kf(x_1,y_1,z_1)+\lambda f(x_2,y_2,z_2)$ (από τον ορισμό της f).

ii) Επειδή $f(x,y,z) = x(1,2)+y(1,-3)+z(1,4)$, τα διανύσματα $(1,2)$, $(1,-3)$ και $(1,4)$ είναι γεννήτορες της εικόνας του *f*. Τα διανύσματα $(1,2)$ και $(1,-3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς $\{(1,2)\ ,(1,-3)\}$ είναι μία βάση της εικόνας του *f* και συνεπώς η διάσταση της εικόνας είναι 2.

iii) Ο πυρήνας του *f* είναι τα διανύσματα (x,y,z) του $\mathbf{R}^3$ για τα οποία ισχύει:

$\begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{matrix}$. Η λύση του συστήματος είναι: $(x,y,z) = (-\frac{7}{5},\frac{2}{5},1)z$, δηλαδή $\{(-7,2,5)\}$ αποτελεί μία βάση του $\ker f$ και $\dim\ker f = 1$.

iv) Επειδή $\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$, ο μετασχηματισμός f δεν είναι αντιστρέψιμος.

v)

Θέτοντας διαδοχικά στην σχέση $f(x,y,z) = x(1,2)+y(1,-3)+z(1,4)$

(x,y,z) **=(1,0,0),** (x,y,z) **=(0,1,0),** (x,y,z) **=(0,0, 1), εχουμε τον πίνακα αναπαράστασης του** f **ως προς τις κανονικές βάσεις των** $\mathbf{R}^3$ **και** $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

5. (15 μονάδες)

Θεωρούμε το σύνολο $S_1=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$, με $\mathbf{u}_1=(1,2,3)$, $\mathbf{u}_2=(1,-1,1)$ και $\mathbf{u}_3=(1,0,1)$ το σύνολο $S_2=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, όπου $\mathbf{e}_i$, $i=1,2,3$, τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbf{R}^3$ και τον γραμμικό μετασχηματισμό $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ με

$$f(x,y,z)=(x+y,\ 2y-z,x+z).$$

i) Να αποδείξετε ότι το σύνολο S_1 αποτελεί μία βάση του $\mathbf{R}^3$.

ii) Να βρεθούν οι πίνακες αναπαράστασης $\mathbf{A}=[f]_{S_1}$ και $\mathbf{B}=[f]_{S_2}$

iii) Οι πίνακες **A**, **B** είναι όμοιοι; Ποιος είναι ο πίνακας ομοιότητάς τους;

<u>Λύση</u>

i) Εχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= (1,2,3)=1\mathbf{e}_1+2\ \mathbf{e}_2+3\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{u}_2 &= (1,-1,1)=1\mathbf{e}_1+(-1)\ \mathbf{e}_2+1\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{u}_3 &= (1,0,1)\ =1\mathbf{e}_1+0\ \mathbf{e}_2+1\ \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμενες των διανυσματων του συνόλου $S_1=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ ως προς την κανονική (συνήθη) βάση $S_2=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ **του** $\mathbf{R}^3$ **ειναι** $\mathbf{P}=[[\mathbf{u}_1]_{S_2}\quad [\mathbf{u}_2]_{S_2}\quad [\mathbf{u}_3]_{S_2}]=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\3&1&1\end{bmatrix}$ και επειδή

$\det\mathbf{P}=2\neq 0$, τα διανύσματα $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^3$. Ο πίνακας **P** είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S_2 στην S_1 (ορισμός σελ 120-121 του βιβλίου).

ii) Αμεσα υπολογίζουμε τον πινακα αναπαραστασης της f, $\mathbf{B}=[f]_{S_2}$, ως προς την κανονική (συνήθη) βάση: .

Από τις ισότητες

$$\begin{aligned}f(\mathbf{e}_1)&=f(1,0,0)=(1,0,1)=1\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2+1\mathbf{e}_3\\ f(\mathbf{e}_2)&=f(0,1,0)=(1,2,0)=1\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+0\mathbf{e}_3\\ f(\mathbf{e}_3)&=f(0,0,1)=(0,-1,1)=0\mathbf{e}_1-1\mathbf{e}_2+1\mathbf{e}_3\end{aligned}\qquad \text{έχουμε}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&-1\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

Για τον πινακα αναπαράστασης της f, $\mathbf{A}=[f]_{S_1}$, έχουμε ότι $\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{P}$ (σελ 246)

Υπολογίζουμε τον $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\left[\mathbf{P}|I_3\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\3&1&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-2&-3&0&1\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-2&-2&-3&0&1\\0&-3&-2&-2&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&3/2&0&-1/2\\0&-3&-2&-2&1&0\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & 1 & -3/2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & 1 & -3/2 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & 1 & -3/2 \end{array}\right] = [I_3 \,|\, P^{-1}]$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5/2 & 1 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5/2 & -6 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

.

iii) Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι ο **A** είναι όμοιος προς τον **B** με πίνακα ομοιότητας τον πίνακα (αλλαγής βάσης από την S_2 στην S_1) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. (20 μονάδες) (Μπορείτε να συμβουλευθείτε ΕΔΥ_Κεφ9, Κεφ10,

ΣΕΥ_Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, σελ 29-39 και Διαγωνοποίηση σελ. 1-22).

Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ ονομάζεται ταυτοδύναμος ή αδύναμος, αν ισχύει $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Δίνεται ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι:

i) οι πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ είναι ταυτοδύναμοι.

ii) ο πίνακας $\mathbf{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσετε τους βαθμούς των πινάκων $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^8$ και $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^8$, καθώς και τους αριθμούς $tr\mathbf{A}$, $\det(\mathbf{I}-\mathbf{A})$.

iii) ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται και να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $\mathbf{P}$ ώστε $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, όπου $\mathbf{D}$ διαγώνιος πίνακας.

iv) $\mathbf{A}^{2007} - 3\mathbf{A}^{2004} = -2\mathbf{A}$.

Λύση

i) Πράγματι, $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3-5 & -6-12+15 & -10-15+20 \\ -2-4+5 & 3+16-15 & 5+20-20 \\ 2+3-4 & -3-12+12 & -5-15+16 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$

και $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^2 = \mathbf{I} - 2\mathbf{A}+\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} - 2\mathbf{A}+\mathbf{A}$ (αφού $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$)

$= \mathbf{I}-\mathbf{A}$. Αρα οι πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ είναι ταυτοδύναμοι.

ii) Μία κλιμακωτή μορφή του $\mathbf{A}$ είναι $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, επομένως $rank\mathbf{A} = 2$ και αφου $rank\mathbf{A} = 2 < 3$ έχουμε οτι $\det \mathbf{A} = 0$. Επειδή $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ έπεται ότι $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}$ για κάθε γνήσια θετικό ακέραιο k συνεπώς $rank(\mathbf{A}^8) = rank(\mathbf{A}) = 2$.

Όμοια, $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^8 = \mathbf{I}-\mathbf{A}$ και $rank(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = rank\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$.

Είναι δε $tr\mathbf{A} = 2$ (το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα) και αφού $rank(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 1 < 3$ έχουμε $\det(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0$.

iii) Αν $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbf{A}$ ιδιοτιμής λ, τότε $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ και $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$. Συνεπώς $\lambda^2\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ και επειδή $\mathbf{x}$ διαφορο του μηδενικού διανύσματος $\lambda^2 - \lambda = 0$. Δηλαδή $\lambda \in \{0,1\}$ (προσοχή! αυτό δεν σημαινει αναγκαστικά ότι και οι δυο τιμές είναι ιδιοτιμές). Για $\lambda = 1$ βρίσκουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Για $\lambda = 0$, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Συνεπώς ο πίνακας $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και διαγωνοποιεί τον **A:**

$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ με $\mathbf{D} = diag(1,1,0)$, (βλ. θεώρημα 5.2.1 του βιβλίου).

iv) Επειδή $\mathbf{A}^{2007} = \mathbf{A}^{2004} = \mathbf{A}$, προφανώς $\mathbf{A}^{2007} - 3\mathbf{A}^{2004} = \mathbf{A} - 3\mathbf{A} = -2\mathbf{A}$.